

Aufgaben Teil B (mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1

Die Punkte $A(8|4|0)$, $B(0|6|2)$, $C(0|0|8)$ und $D(8|-1|5)$ bestimmen als Eckpunkte ein Viereck.

- Stellen Sie das Viereck in einem räumlichen Koordinatensystem dar!
- Weisen Sie nach, daß das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenkelig ist!
- Untersuchen Sie, ob das Viereck ABCD ein Trapez ist!
- Berechnen Sie die Größe des Flächeninhalts des Vierecks ABCD!

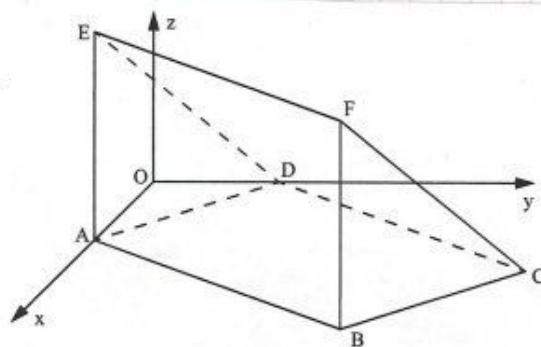
Aufgabe 2

Teil B1

B1

In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Prisma ABCDEF durch die Koordinaten der Eckpunkte $A(4; 0; 0)$, $B(10; 8; 0)$, $C(6; 11; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $E(4; 0; 5)$ gegeben (siehe Skizze).

(Skizze nicht maßstäblich)



- Zeigen Sie, daß das Viereck ABCD ein Rechteck ist.
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes F.

c) Bestimme rechnerisch das Volumen des Prismas.

Teil B2

B2

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(3; 2; 1)$, $B(4; 6; 7)$, $C(1; -6; -11)$, $D(1; 3; 4)$, $F(6; 5; 4)$ und $S(\frac{7}{2}; 4; 4)$ gegeben.

- Weisen Sie nach, daß das Dreieck ABD nicht rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABD.
- Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes T so, daß das Viereck ABTD ein Trapez mit $\overrightarrow{TD} = 2\overrightarrow{AB}$ ist.

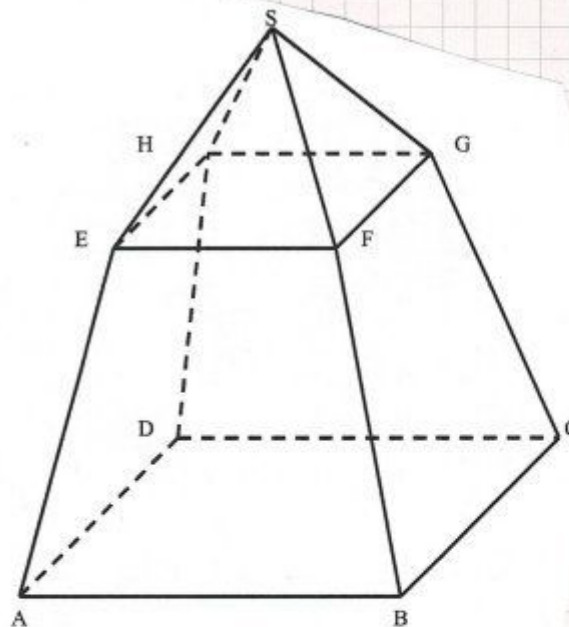
Aufgabe 3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|0|0)$, $B(12|4|3)$, $C(4|3|12)$ und $D(4|\frac{4}{3}|1)$ gegeben.

- 2.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks sind.
Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.
- 2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt D auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.
- 2.3 Der Vektor $\overrightarrow{CB}$ lässt sich darstellen durch $\overrightarrow{CB} = r\overrightarrow{CD} + s\overrightarrow{CA}$, $r, s \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Werte für r und s.

Aufgabe 4

Eine Gartenlaterne hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes mit einer aufgesetzten geraden quadratischen Pyramide. Die Seitenlänge der Grundfläche des Pyramidenstumpfes beträgt 6 dm, die Seitenlänge der Deckfläche 4 dm. Die Höhe des Pyramidenstumpfes beträgt 8 dm. Die gesamte Laterne hat eine Höhe von 9,5 dm.



(Skizze nicht maßstäblich)

- a) Der Punkt D liegt im Koordinatenursprung. Die Punkte $A(6; 0; 0)$ und $E(5; 1; 8)$ sind Eckpunkte des Pyramidenstumpfes. Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter. Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte! Stellen Sie die Laterne in einem kartesischen Koordinatensystem dar!

- b) Die Seitenflächen des Pyramidenstumpfes bestehen aus Glas. Berechnen Sie die Größe der gesamten Glasfläche in Quadratmetern!

Pyramiden-
stumpf



gerade Pyramide $\hat{=}$
Spitze befindet sich
genau über der Mitte
der Grundfläche

c)

Im Mittelpunkt der Grundfläche des Pyramidenstumpfes soll eine Kerze stehen.
In welchem Punkt befindet sich die Spitze der Kerzenflamme, wenn sie von den Eckpunkten der Grundfläche genauso weit entfernt ist wie von der Pyramidenspitze?

Aufgabe 5 (Baden-Württemberg 2026)

Abbildung 1 zeigt den Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit $f(t) = 0,016t \cdot e^{-0,005t}$.
Für $t \geq 0$ beschreibt f die Wachstumsgeschwindigkeit des Horns einer Antilope (t in Tagen nach der Geburt des Tieres, $f(t)$ in Millimeter pro Tag).
Bei der Geburt des Tieres ist das Horn zwei Millimeter lang.

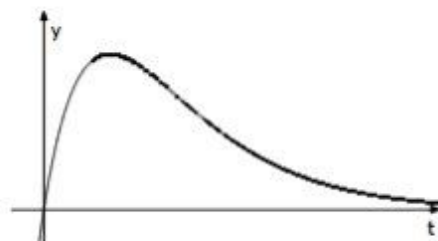


Abb. 1

- Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit an, die das Horn 20 Tage nach der Geburt des Tieres hat. (1 BE)
- Es gibt einen Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt. (4 BE)
- Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t+100) = 2 \cdot f(t)$ führt. (2 BE)
- Die Funktion F mit $F(t) = -3,2 \cdot (200 + t) \cdot e^{-0,005t}$ ist eine Stammfunktion von f . Ermitteln Sie die Länge, die das Horn 120 Tage nach der Geburt des Tieres hat. (3 BE)

Bei einer anderen Antilope, die zum selben Zeitpunkt geboren wurde, lässt sich für $t \geq 0$ die Wachstumsgeschwindigkeit des Horns durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g beschreiben (t in Tagen nach der Geburt des Tieres, $g(t)$ in Millimeter pro Tag). Bei der Geburt dieses Tieres ist das Horn ebenfalls zwei Millimeter lang. Abbildung 2 zeigt die Graphen der Funktionen f und g .

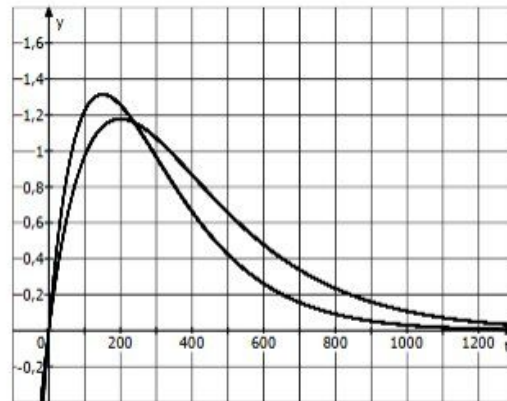


Abb. 2

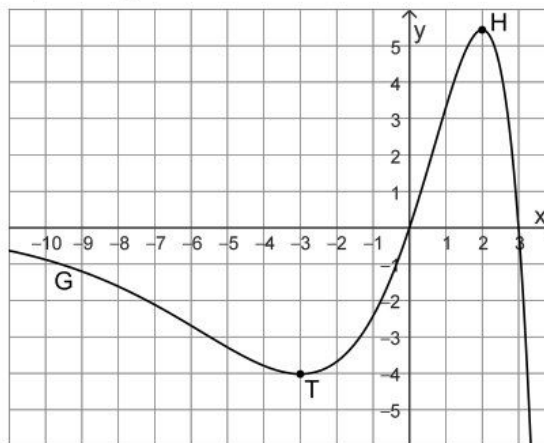
- e) Betrachtet wird die Funktion d mit $d(t) = g(t) - f(t)$.
Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von d im abgebildeten Bereich an und interpretieren Sie diese Nullstellen im Sachzusammenhang. (3 BE)
- f) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Es gibt einen Zeitpunkt nach der Geburt der beiden Tiere, zu dem die Hörner der beiden Antilopen gleich lang sind. (2 BE)

Aufgabe 6 (Bayern 2026)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f: x \mapsto (-x^2 + 3x) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$. Die

Abbildung zeigt ihren Graphen G , der genau zwei Extrempunkte besitzt: den

Tiefpunkt $T\left(-3 \mid -18e^{-\frac{3}{2}}\right)$ und den Hochpunkt H .



- a) Es gilt $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$. Deuten Sie diese Tatsache geometrisch und berechnen Sie die Nullstellen von f .
- b) Berechnen Sie die Koordinaten von H . Geben Sie die Wertemenge von f an und begründen Sie Ihre Angabe.

(zur Kontrolle: $f'(x) = \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3\right) \cdot e^{\frac{1}{2}x}$; $H(2 \mid 2e)$)

- c Ermitteln Sie die Größe des Winkels, unter dem sich die Tangente an G im Koordinatenursprung und die Gerade durch T und H schneiden.
- d Die erste Ableitungsfunktion von f besitzt ein globales Maximum. Beschreiben Sie, wie man dieses Maximum berechnen kann.

Die beim Abbremsen eines Elektroautos frei werdende Energie kann teilweise genutzt werden, um der Batterie des Elektroautos wieder Energie zuzuführen. Über einen Zeitraum von 13 Sekunden, beginnend zehn Sekunden vor Beginn eines Bremsvorgangs, wird der Ladezustand der Batterie eines Elektroautos beobachtet. Die Funktion f beschreibt für $x \in [-10; 3]$ modellhaft die momentane Änderungsrate der in der Batterie gespeicherten Energie. Der Betrag von x gibt den zeitlichen Abstand zum Beginn des Bremsvorgangs in Sekunden an; negative x -Werte beziehen sich auf Zeitpunkte vor Beginn des Bremsvorgangs. $f(x)$ ist die momentane Änderungsrate der in der Batterie gespeicherten Energie in Kilojoule pro Sekunde.

- e Geben Sie im Sachzusammenhang die Bedeutung des Hochpunkts H unter Berücksichtigung seiner Koordinaten an.
- f Bestimmen Sie mithilfe der Abbildung die Länge der Zeitspanne auf Sekunden genau, in der der Batterie mindestens drei Kilojoule pro Sekunde entnommen werden.
- g Es gilt $\int_{-10}^3 f(x) dx \approx -15$. Interpretieren Sie den Wert des Integrals im Sachzusammenhang.

Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_a : x \mapsto -f(x) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$. Der Graph von g_a wird mit G_a bezeichnet.

- h Zeichnen Sie G_0 in die Abbildung ein. Geben Sie an, wie G_a für $a > 0$ aus G_0 hervorgeht.
- i Geben Sie diejenigen Werte von a an, für die G_a und G genau zwei Schnittpunkte besitzen.
- j Betrachtet wird nun die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $g_{a,b} : x \mapsto -f(bx) + a$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ermitteln Sie a und b so, dass folgende Bedingungen erfüllt sind:
 - I Der Graph von $g_{a,b}$ hat die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote.
 - II Die x -Koordinate des Tiefpunkts des Graphen von $g_{a,b}$ ist $-0,5$.

Asymptote: Der Graph nähert sich immer weiter $y=2$ an. Der Wert 2 ist ein Grenzwert der neuen Funktion.

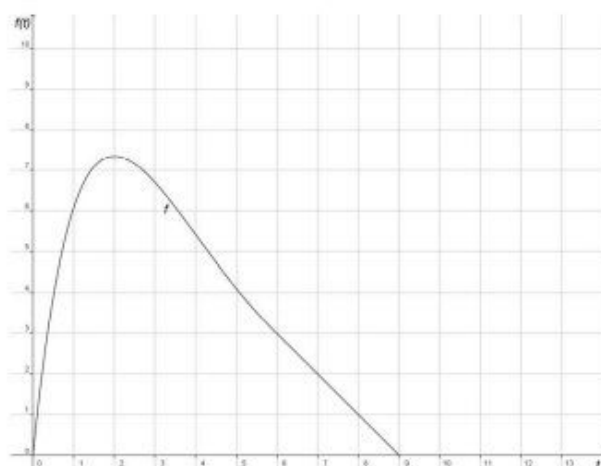
Aufgabe 7 (Hamburg 2008)

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t . Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear (siehe Anlage).

- Berechnen Sie die maximale Konzentration im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist. **20 P**
- Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird. **10 P**
- Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente k am Graphen von f im Punkt $(6 | f(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist. **15 P**
- Beschreiben Sie, wie Sie die mittlere Konzentration des Medikamentes bis zum vollständigen Abbau berechnen würden. Bestimmen Sie eine grobe Abschätzung dieser mittleren Konzentration, z. B. mithilfe der Grafik in der Anlage. **15 P**
- Ein Patient nimmt das Medikament 4 Stunden nach der ersten Einnahme in gleicher Dosierung ein weiteres Mal ein. Nehmen Sie in einem vereinfachenden Modell an, dass sich die Konzentrationen im Blut dieses Patienten addieren und dass der Abbau (und damit auch der Übergang in die „lineare Zone“) für beide Medikationen unabhängig voneinander erfolgt. Skizzieren Sie zur Grafik in der Anlage die Darstellung der Gesamtkonzentration bis zum vollständigen Abbau nach dem eben beschriebenen Modell. **15 P**
- Ein Patient muss mit starken Nebenwirkungen rechnen, wenn die Konzentration des Medikamentes im Blut 10 Milligramm pro Liter übersteigt. Entscheiden Sie, ob der Patient aus Aufgabenteil e) gefährdet ist. **10 P**

Um das Medikament in seiner Wirksamkeit zu verbessern, verändert der Hersteller seine Zusammensetzung. Die Konzentration des Medikamentes im Blut wird wieder durch eine Funktion der Form $g(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. t ist wiederum die Zeit in Stunden nach der Einnahme und $g(t)$ wird in der Einheit $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ (Milligramm pro Liter) gemessen.

- Bestimmen Sie die Konstanten a und b , wenn die Konzentration genau vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert von $10 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreichen soll. **15 P**



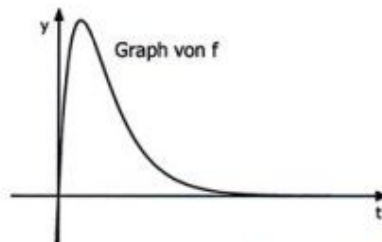
Aufgabe 8

Gegeben ist eine Pyramide ABCDS mit viereckiger Grundfläche, wobei S die Spitze der Pyramide ist. Die Eckpunkte haben die Koordinaten A(4/0/0), B(4/8/0), C(0/8/0), D(0/0/0) und S(2/4/10).

- Zeichne die Pyramide in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.
- Wir betrachten die viereckige Grundfläche ABCD. Überprüfe rechnerisch, ob es sich um ein besonderes Viereck handelt (und wenn ja, gib die Art des besonderen Vierecks an).
- Wir betrachten das Dreieck ABS. Überprüfe rechnerisch, ob es sich um ein besonderes Dreieck handelt (und wenn ja, gib die Art des besonderen Vierecks an).
- Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes der Grundfläche.
- Zeige rechnerisch, dass die Verbindung vom Mittelpunkt der Grundfläche zur Spitze senkrecht zur Diagonalen von A nach C ist.
- Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt des Dreiecks ABS.
- Bestimme rechnerisch das Volumen der Pyramide.

Aufgabe 9 (Baden- Württemberg 2024)

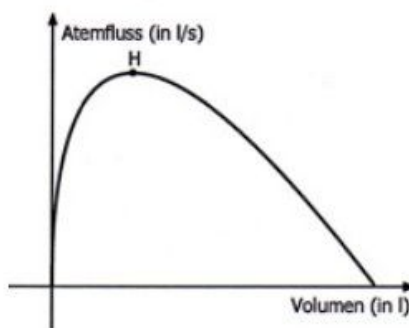
Zur Untersuchung der Lungenfunktion muss eine Person tief einatmen und anschließend zügig in ein Messgerät ausatmen. Die Änderungsrate des Luftvolumens pro Zeiteinheit beim Ausatmen heißt Atemfluss. Bei einer Messung wird der Atemfluss für $0 \leq t \leq 2$ näherungsweise durch die Funktion f mit $f(t) = 30 \cdot (e^{-3t} - e^{-6t})$ beschrieben (t in Sekunden seit Beginn des Ausatmens, $f(t)$ in Liter pro Sekunde). Abgebildet ist der Graph von f . Für die Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(t) = -90e^{-3t} \cdot (1 - 2e^{-3t})$.



- Weisen Sie nach, dass der maximale Atemfluss 7,5 Liter pro Sekunde beträgt. (4 BE)
- Zeigen Sie, dass der Atemfluss zwei Sekunden nach Beginn des Ausatmens weniger als ein Prozent seines maximalen Werts beträgt. (2 BE)
- Bestimmen Sie rechnerisch die Länge des Zeitraums, in dem der Atemfluss mindestens 5 Liter pro Sekunde beträgt. (7 BE)
- Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $\int_0^x f(t)dt = \frac{1}{4} \cdot \int_0^2 f(t)dt$ führt. (3 BE)
- Berechnen Sie $\int_0^2 f(t)dt$. (4 BE)

- f) Bei einer anderen Modellierung wird der Atemfluss ab dem Zeitpunkt $t_1 = 1,5$ nicht mehr durch die Funktion f , sondern durch die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(1,5|f(1,5))$ beschrieben. Bei dieser Modellierung gibt es einen Zeitpunkt $t_2 > 0$, zu dem der Atemfluss 0 Liter pro Sekunde beträgt. Bestimmen Sie den Wert von t_2 . (4 BE)

- g) Bei ärztlichen Untersuchungen werden Atemfluss-Volumen-Diagramme betrachtet. Diese stellen den Atemfluss in Abhängigkeit vom Volumen der ausgeatmeten Luft dar. Abgebildet ist das Diagramm zu derjenigen Messung, die durch die Funktion f beschrieben wird. Betrachtet wird der Hochpunkt $H(x_0 | y_0)$ der abgebildeten Kurve. Begründen Sie, dass y_0 der in a) genannte maximale Atemfluss ist, und geben Sie einen Term an, mit dem man x_0 berechnen kann. (4 BE)



Aufgabe 10 (IQB 2026)

- 1 Zur Beschreibung des Wachstums einer Pflanze wird ihre Höhe gemessen. Beim Einpflanzen beträgt die Höhe der Pflanze 3 Zentimeter. Betrachtet wird im Folgenden die momentane Änderungsrate der Höhe der Pflanze, die als Wachstumsrate bezeichnet wird. Die Wachstumsrate wird für $t \geq 0$ modellhaft durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion r mit $r(t) = \frac{3}{4}t \cdot (t+4) \cdot e^{-\frac{1}{2}t}$ beschrieben. Dabei gibt t die seit dem Einpflanzen vergangene Zeit in Wochen an und $r(t)$ die Wachstumsrate in Zentimeter pro Woche. Abbildung 1 zeigt den Graphen von r .

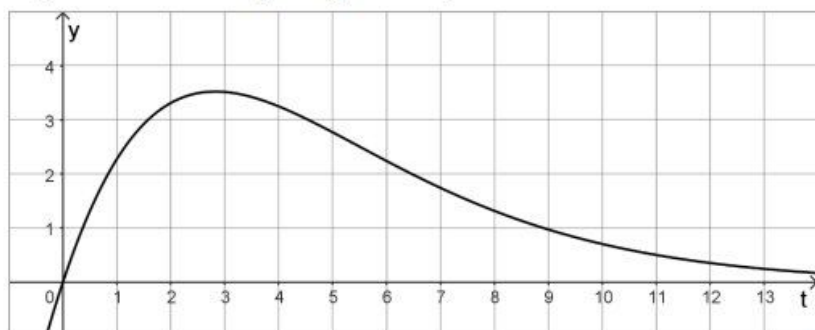


Abb. 1

- a Es gilt $r(10) < 1$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache im Sachzusammenhang an.

b Es gibt einen Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsrate genauso groß ist wie fünf Wochen davor. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt und stellen Sie den Sachverhalt in Abbildung 1 dar.

4

c Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Pflanze am schnellsten wächst.

2

d Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion w , deren erste Ableitungsfunktion r ist und für die $w(0) = 0$ gilt.

3

Außerdem gilt $\lim_{t \rightarrow +\infty} (w(t) + 3) = 27$.

Geben Sie die Bedeutung sowohl von $w(t)$ als auch des Wertes 27 im Sachzusammenhang an.

2 Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit

$f_a(x) = \frac{3}{4} \cdot (x^2 - a^2) \cdot e^{1-\frac{x}{a}}$ und $a \in \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_a wird mit G_a bezeichnet.

a Geben Sie die Nullstellen von f_a an und begründen Sie, dass G_a für jeden Wert von a die y-Achse unterhalb der x-Achse schneidet.

3

Gegeben ist außerdem die in $\mathbb{R}^+$ definierte Funktion h mit $h(x) = k \cdot \ln x$ mit einer positiven reellen Zahl k . Die Graphen von f_1 und h haben im Punkt $(1|0)$ eine gemeinsame Tangente.

b Berechnen Sie k und geben Sie eine Gleichung der gemeinsamen Tangente an.

3

c Abbildung 2 zeigt die Graphen von f_1' und von h' . Der einzige gemeinsame Punkt der Graphen ist $(1|f_1'(1))$. Geben Sie die

5

Anzahl der gemeinsamen Punkte der Graphen von f_1 und h an. Begründen Sie Ihre Angabe ohne weitere Rechnung mithilfe Abbildung 2.

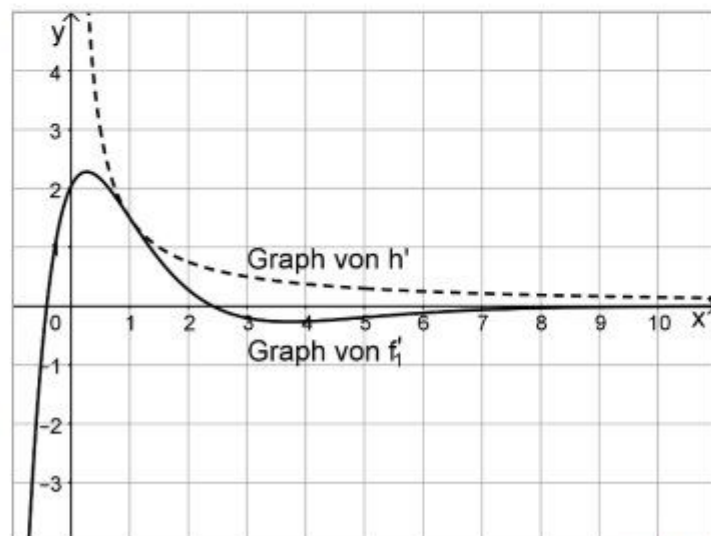


Abb. 2

d Für jeden Wert von a besitzt der Graph G_a einen Tiefpunkt T_a und einen

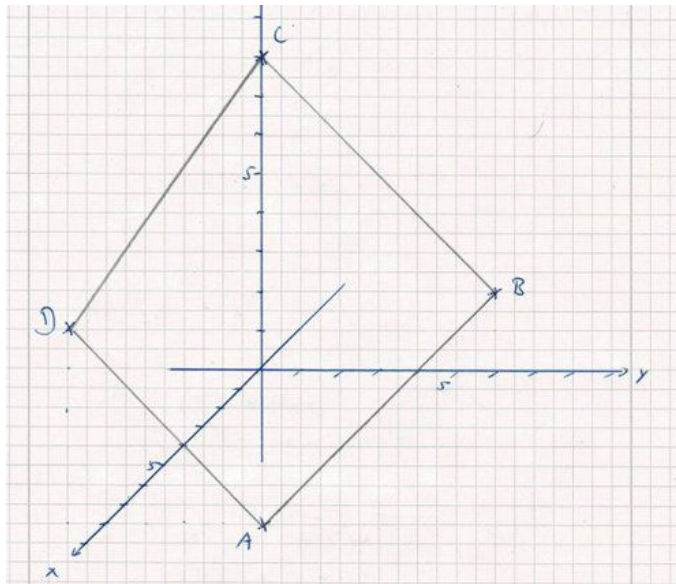
4

Hochpunkt H_a . Es gibt einen Wert von a , für den die Punkte T_a und H_a gegenüberliegende Eckpunkte eines Quadrats sind, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen liegen. Bestimmen Sie diesen Wert von a auf Hundertstel gerundet.

Lösungen Teil B (mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1

a)



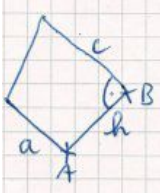
b)

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} 0-4 \\ 6-4 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} & |\vec{AB}| &= \sqrt{16+4+64} = \sqrt{84} \text{ LE} \\ \vec{BC} &= \begin{pmatrix} 0-4 \\ 0-4 \\ 8-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} & |\vec{BC}| &= \sqrt{16+16+16} = \sqrt{48} \text{ LE} \\ \Rightarrow \text{Dreieck gleichschenkelig} \\ \vec{BA} \cdot \vec{BC} &= \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} = 16 - 8 - 32 = -24 \\ \Rightarrow \vec{BA} \perp \vec{BC} & \text{, rechter Winkel bei B} \\ \Rightarrow \text{Dreieck rechtwinklig}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \\ \vec{AD} &= \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ 6-4 \\ 8-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \\ \vec{DC} &= \begin{pmatrix} 0-(-4) \\ 0-6 \\ 8-8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{BC} &= -\frac{1}{2} \cdot \vec{AD} \\ \Rightarrow \vec{BC} &\parallel \vec{AD} \\ \Rightarrow \text{Trapez}\end{aligned}$$

d)



Weil bei B ein rechter Winkel ist, kann man die Höhe schnell angeben:
 $h = |\vec{AB}|$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (|\vec{AD}| + |\vec{BC}|) \cdot |\vec{AB}|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}| + |\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}|) \cdot |\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}|$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{50} + \sqrt{72}) \cdot \sqrt{72}$$

$$= 66 \text{ FE}$$

Aufgabe 2

Teil B1

a)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 10-6 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6-10 \\ -8-8 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ -8-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -11 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0-6 \\ -4-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{DC} \quad \text{parallel}$$

$$\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{AD} \quad \text{"}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC} \quad \text{rechter Winkel}$$

$$\Rightarrow \text{Rechteck}$$

b)

E befindet sich genau über A
 (nur bezüglich der z-Koordinate 5 LE höher)
 $\Rightarrow$ F hat dasselbe Verhältnis zu B
 F(10|8|5)

c)

$$V_{\text{Prisma}} = G \cdot h$$

G: Grundfläche Dreieck BCF = A_{Dreieck}
 h: räuml. Höhe, hier $h = |\vec{AB}|$

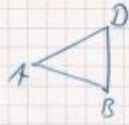
$\vec{BF}$ ist senkrecht zu $\vec{BC}$
 $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -16 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2} \cdot |\vec{BC}| \cdot |\vec{BF}| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2 + 3^2} \cdot 5 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \\
 &= 12,5 \text{ FE} \\
 \\
 V &= 12,5 \cdot |\vec{AB}| \\
 &= 12,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right| \\
 &= 12,5 \cdot \sqrt{6^2 + 1^2} \\
 &= 12,5 \cdot 10 \\
 &= \underline{125 \text{ VE}}
 \end{aligned}$$

Teil B2

a)

a)

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \\
 \vec{BD} &= \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} \\
 \vec{DA} &= \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$


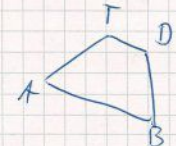
$$\begin{aligned}
 \vec{AB} \cdot \vec{BD} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 20 \neq 0 \\
 \vec{BA} \cdot \vec{BD} &= \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} = 33 \neq 0 \\
 \vec{DB} \cdot \vec{DA} &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = -6 \neq 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Kein rechter Winkel vorhanden

$$A = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 12-6 \\ -12-3 \\ 1+8 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 6 \\ -15 \\ 9 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \sqrt{36+225+81} = 0,5 \cdot \sqrt{432}$$

Der Flächeninhalt beträgt $0,5 \cdot \sqrt{432} \approx 9,25 \text{ FE}$.

b)



$$\begin{aligned}
 \vec{OT} &= \vec{OB} + \frac{1}{2} \cdot \vec{BA} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -6 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0,5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow T(0,5/1/1)
 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \quad |\vec{AB}| = \sqrt{12^2 + 4^2 + 3^2} = 13 \text{ LE}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \quad |\vec{AC}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13 \text{ LE}$$

$\Rightarrow$ gleichschenkeliges Dreieck

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 4 - 12 \\ 3 - 4 \\ 12 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix} \quad |\vec{BC}| = \sqrt{(-8)^2 + (-1)^2 + 9^2} = \sqrt{146} \text{ LE}$$



$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix}}{13 \cdot 13} = \frac{96}{169}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{96}{169}\right) \approx 55,39^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}}{13 \cdot \sqrt{146}} = \frac{73}{13 \cdot \sqrt{146}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{73}{13 \cdot \sqrt{146}}\right) \approx 62,31^\circ$$

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta = 62,3^\circ$$

(ohne Runden $62,31^\circ$)

α und γ sind Basiswinkel. Basiswinkel sind im gleichschenkl. Dr. gleich groß



Nun zum Flächeninhalt:

$$A = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 48 - 9 \\ 12 - 144 \\ 36 - 16 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 39 \\ -132 \\ 20 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \sqrt{19345} \approx 69,54$$

Der Flächeninhalt liegt bei etwa 69,54 FE.

b)

Der Punkt D liegt auf der Strecke AB, wenn er zwischen A und B liegt. In diesem Fall muss es ein r (zwischen 0 und 1) geben, so dass $\vec{OD} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}$ gilt.

Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist $r = 1/3$. Damit ist die obige Bedingung erfüllt. Der Punkt liegt auf der Strecke.

c)

$$\vec{CB} = r \cdot \vec{CD} + s \cdot \vec{CA}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -5/3 \\ -11 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 8 &= -4s \\ 1 &= -\frac{5}{3}r - 3s \\ -9 &= -11r - 12s \end{aligned}$$

Aus $8 = -4s$ folgt: $s = -2$

$$\Rightarrow \begin{aligned} 1 &= -\frac{5}{3}r - 3 \cdot (-2) \\ 1 &= -\frac{5}{3}r + 6 \\ -5 &= -\frac{5}{3}r \\ \frac{1}{3} &= r \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} -9 &= -11r - 12 \cdot (-2) \\ -9 &= -11r + 24 \\ -33 &= -11r \\ \frac{1}{3} &= r \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & 8 = -4s \\ \text{II.} & 1 = -\frac{5}{3}r - 3s \\ \text{III.} & -9 = -11r - 12s \end{array}$$

6 III ...

$$\begin{aligned} s &= -2 \\ r &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Aufgabe 4

a)

Die Pyramide ist gerade $\Rightarrow$

Die Spitze befindet sich genau über der Mitte des Quadrats ABCD.

Das Quadrat ABCD muss in der xy-Ebene liegen, da A und D die z-Koordinate 0 haben und die z-Koordinate von E genau der Höhe des Stumpfs entspricht.

(Wenn die Pyramide „gekippt“ wäre und ABCD sich nicht in der xy-Ebene befände, so müsste E einen anderen z-Wert haben.)

A(6/0/0)

B(6/6/0)

da die Kante $\overline{AB}$ parallel zur y-Achse verläuft und die Kantenlänge 6 ist

C(0/6/0)

da die Kante $\overline{DC}$ auf der y-Achse liegt und 6 lang ist

D(0/0/0)

E(5/1/8)

F(5/5/8)

da EFGH ein Quadrat mit Kantenlänge 4 ist und die Kanten parallel zur x- bzw. y-Achse sind

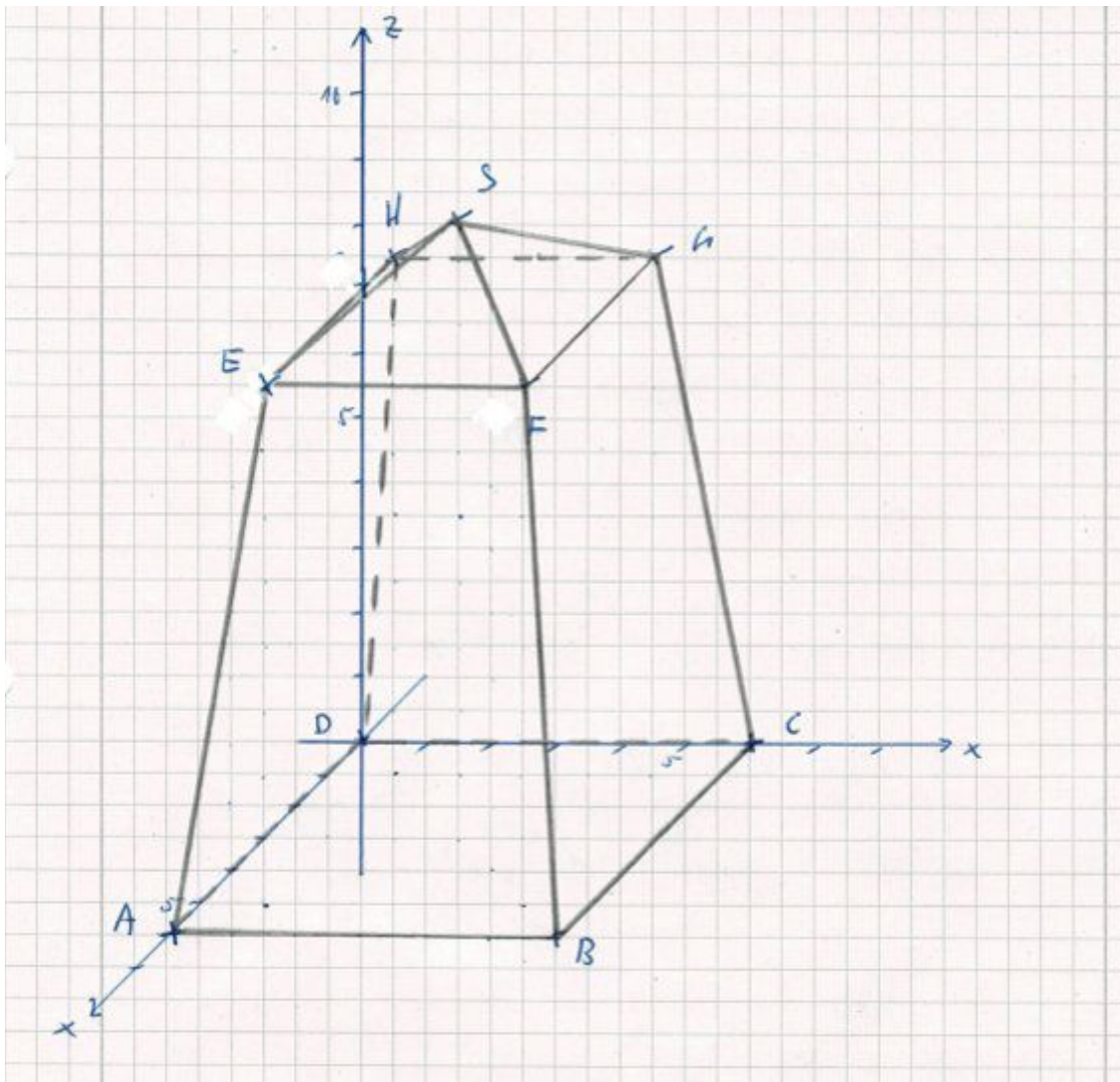
G(1/5/8)

(analog)

H(1/1/8)

S(3/3/9,5)

da M(3/3/0) die Mitte des unteren Quadrats ist & die Spitze 9,5 Einheiten darüber ist



b)

Die Seitenflächen sind vier gleich große Trapeze. Wir rechnen die Fläche von einem Trapez aus (und multiplizieren dann mit 4). Wir betrachten das Trapez ABFE. Zur Flächenberechnung (wir kennen die Höhe im Trapez nicht – können also die Trapezformel nicht verwenden) zerlegen wir es in zwei Dreiecke: ABR und AFE.

Dreieck ABF:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}; \vec{AF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 48 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \sqrt{2340} \approx 24,19$$

Dreieck AFE:

$$\vec{AF} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}; \vec{AE} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$A = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 40-8 \\ -8+8 \\ -1+5 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} 32 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \sqrt{1040} \approx 16,12$$

Daraus folgt: $A_{\text{Trapez}} = 24,19 + 16,12 = 40,31$

Die Glasfläche ist 4-mal so groß, also: $4 \text{ mal } 40,31 = 161,24 \text{ FE} = 161,24 \text{ dm}^2 = 1,6124 \text{ m}^2$

c)

Ein Objekt, dass über der Mitte steht,
ist von den Eckpunkten unten immer
gleich weit entfernt. Es genügt also, einen
Eckpunkt zu nehmen.

$P(3/3/z)$... ein Punkt über der Mitte

Abstand von P
zur Spitze S

$$|\vec{PS}|$$

Abstand von P
zum Eckpunkt D

$$|\vec{PD}|$$

$$\left| \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 9,5 - z \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 - z \end{pmatrix} \right|$$

$$\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9,5 - z \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -z \end{pmatrix} \right|$$

$$\sqrt{(9,5 - z)^2}$$

$$= \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + (-z)^2}$$

$$\sqrt{(9,5 - z)^2}$$

$$= \sqrt{9 + 9 + z^2}$$

$$\sqrt{(9,5 - z)^2}$$

$$= \sqrt{18 + z^2}$$

$$|1|^2$$

$$(9,5 - z)^2 = 18 + z^2$$

$$90,25 - 19z + z^2 = 18 + z^2$$

$$90,25 - 19z = 18$$

$$-19z = -72,25$$

$$\underline{z \approx 3,80}$$

/ Bin. Formel

$$|-z^2$$

$$|-90,25$$

$$| : (-19)$$

Aufgabe 5

- a) *Geben Sie die Wachstumsgeschwindigkeit an, die das Horn 20 Tage nach der Geburt des Tieres hat.*

$$f(20) = 0,016 \cdot 20 \cdot e^{-0,005 \cdot 20} \approx 0,29$$

Die Wachstumsgeschwindigkeit nach 20 Tagen beträgt 0,29 Millimeter pro Tag.

- b) *Es gibt einen Zeitpunkt, zu dem die Wachstumsgeschwindigkeit maximal ist. Berechnen Sie diesen Zeitpunkt.*

Notwendige Bedingung für Hochpunkt: $f'(t) = 0$

$$f'(t) = 0,016 \cdot e^{-0,005t} + 0,016t \cdot e^{-0,005t} \cdot (-0,005) = 0,016e^{-0,005t} \cdot (1 - 0,005t)$$

$$0,016e^{-0,005t} \cdot (1 - 0,005t) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $e^{-0,005t} = 0$ ist nicht lösbar

Gleichung II): $1 - 0,005t = 0 \Leftrightarrow t = 200$

Die Wachstumsgeschwindigkeit ist nach $t = 200$ Tagen maximal.

Da bereits in der Aufgabe vorausgesetzt wurde, dass ein Maximum existiert, braucht die hinreichende Bedingung nicht geprüft werden.

- c) *Formulieren Sie eine Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf die Gleichung $f(t + 100) = 2 \cdot f(t)$ führt.*

Fragestellung: Bestimme das 100-Tages-Intervall, in dem sich die Wachstumsgeschwindigkeit verdoppelt.

- d) *Ermitteln Sie die Länge, die das Horn 120 Tage nach der Geburt des Tieres hat.*

$$2 + \int_0^{120} f(t) dt = 2 + \left[-3,2 \cdot (200 + t) \cdot e^{-0,005t} \right]_0^{120} = 2 + (-561,98 - (-640)) \approx 80 \text{ mm}$$

Nach 120 Tagen ist die Länge des Horns ca. 80 mm.

- e) Geben Sie die Anzahl der Nullstellen von d im abgebildeten Bereich an und interpretieren Sie diese Nullstellen im Sachzusammenhang.

Das Schaubild von f hat bei $t = 200$ eine Maximumstelle.
Somit gehört das Schaubild mit der Maximumstelle bei $t = 200$ zur Funktion f und das andere zur Funktion g .

Die Nullstellen von $d(t)$ sind dort, wo $f(t) = g(t)$ gilt, also an den Schnittstellen der beiden Schaubilder.
Die Schaubilder in Abbildung 2 schneiden sich bei $t = 0$ und bei ungefähr $t = 240$.
Es gibt somit zwei Nullstellen.

Interpretation. An den Nullstellen stimmen die Wachstumsgeschwindigkeiten der Hörner der beiden Antilopen überein.

- f) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Es gibt einen Zeitpunkt nach der Geburt der beiden Tiere, zu dem die Hörner der beiden Antilopen gleich lang sind.

Die Aussage ist wahr.

Begründung: Zum Zeitpunkt $t = 0$ haben beide Hörner die gleiche Länge (2 mm).
Die Fläche A_1 zwischen den beiden Schaubildern im Intervall $[0; 240]$ gibt den Längenunterschied der Hörner in mm an (die Antilope mit der Funktion g hat das längere Horn, da das Schaubild von g in dem Intervall oberhalb des Schaubildes von f liegt).

Nun kann man anschaulich erkennen, dass es einen Zeitpunkt $z > 240$ gibt, so dass die Fläche A_2 zwischen den beiden Schaubildern im Intervall $[240; z]$ genauso groß ist wie die Fläche A_1 .

Zum Zeitpunkt z hat die Antilope die zur Funktion f gehört den Längenvorsprung der Antilope der Funktion g wieder eingeholt und zum Zeitpunkt z haben daher beide Antilopen die gleiche Hornlänge.

Aufgabe 6

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ die x -Achse ist im negativen Bereich des Graphen Asymptote.

Nullstellen

$$\underline{f(x) = 0}: (-x^2 + 3x) \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow -x^2 + 3x = 0 \Rightarrow x(-x + 3) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 0}}; \underline{\underline{x_2 = 3}}$$

b) Hochpunkt

$$f'(x) = (-2x + 3) \cdot e^{\frac{1}{2}x} + (-x^2 + 3x) \cdot e^{\frac{1}{2}x} \cdot \frac{1}{2} = e^{\frac{1}{2}x} \left(-2x + 3 + (-x^2 + 3x) \cdot \frac{1}{2} \right)$$

$$= e^{\frac{1}{2}x} \left(-2x + 3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x \right) = e^{\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \right)$$

$$\underline{f'(x) = 0:} \quad e^{\frac{1}{2}x} \left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 \right) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 3 = 0 \Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x_{1/2}' = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm 5}{2} \Rightarrow x_1' = -3 = x_T; \quad x_2' = 2$$

Aus dem Graphen ergibt sich, dass bei $x_2' = 2$ ein HOP vorliegen muss.

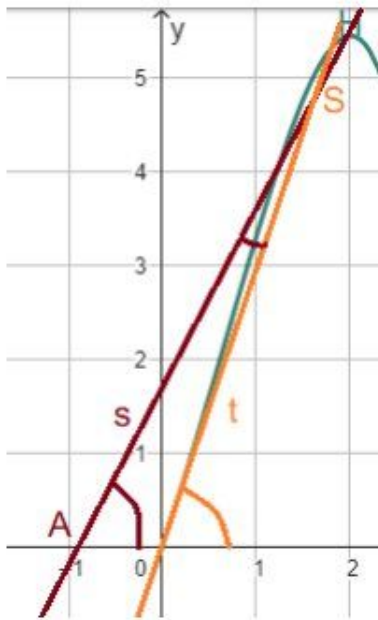
$$f(2) = (-2^2 + 3 \cdot 2) \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot 2} = 2e \Rightarrow \underline{\underline{H(2 | 2e)}}$$

Wertemenge

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \underbrace{(-x^2 + 3x)}_{\rightarrow -\infty} \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{2}x}}_{\rightarrow \infty} = -\infty$$

H ist der einzige Hochpunkt. In Verbindung mit den beiden Grenzwerten (siehe a) ergibt sich: $W =]-\infty; 2e]$

c)



Zunächst brauchen wir die Steigungen der beiden Geraden:

$$\text{Für die Tangente gilt: } m_t = f'(0) = e^0 \cdot 3 = 3$$

Für die Gerade s durch T und H gilt:

$$m_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2e - \left(-18e^{-\frac{3}{2}} \right)}{2 - (-3)} = \frac{2e + 18e^{-\frac{3}{2}}}{5}$$

Zunächst berechnen wir die Winkel zwischen den Geraden und der x-Achse:

$$\tan \varphi_1 = 3 \Rightarrow \varphi_1 \approx 71,57^\circ$$

$$\tan \varphi_2 = \frac{2e + 18e^{-\frac{3}{2}}}{5} \Rightarrow \varphi_2 \approx 62,12^\circ$$

Der gesuchte Winkel ergibt sich im Dreieck AOS:

$$\varphi = 180^\circ - (62,12^\circ - (180^\circ - 71,57^\circ)) = \underline{\underline{9,45^\circ}}$$

d) Globales Maximum der 1. Ableitung

Die Ableitung ist maximal bzw. minimal in den Wendepunkten des Graphen von f . Der Graph von f steigt nur für $-3 < x < 2$. Im Wendepunkt in diesem Bereich ist daher die Steigung absolut am größten.

Zur Bestimmung dieses Wendepunkts geht man wie folgt vor:

$f''(x) = 0$ führt zu zwei Lösungen (beides einfache Nullstellen von f'').

Wir brauchen die größere der beiden Lösungen x_2 .

Das globale Maximum beträgt dann $f'(x_2)$.

e) Interpretation des Hochpunkts

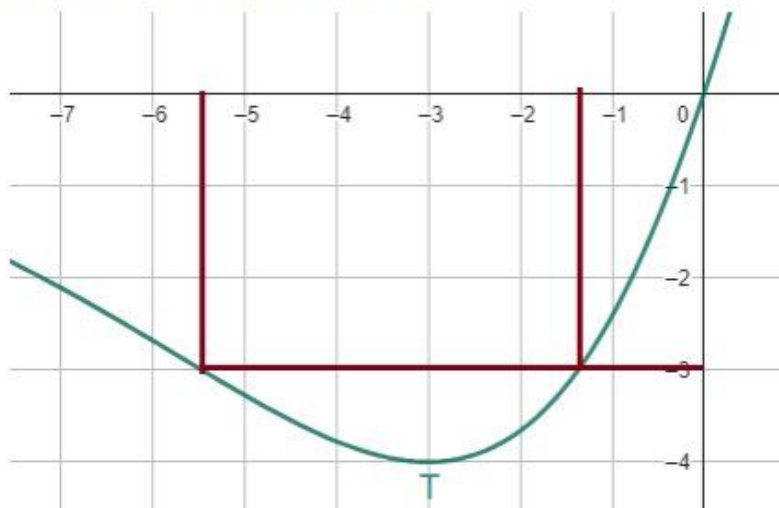
Da f die momentane Änderungsrate der in der Batterie gespeicherten Energie angibt, ist im HOP die Zunahme der gespeicherten Energie am größten.

Konkret: zwei Sekunden nach Bremsbeginn lädt sich die Batterie am stärksten

auf, nämlich mit $2e \approx 5,4 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}$.

f) Die Batterie soll mindestens $3 \frac{\text{kJ}}{\text{s}}$ verlieren. Es muss also gelten: $f(x) < -3$

Das Problem lösen wir graphisch:



Das gesuchte Zeitintervall beträgt ca. 4 Sekunden.

g) $\int_{-10}^3 f(x) dx \approx -15$

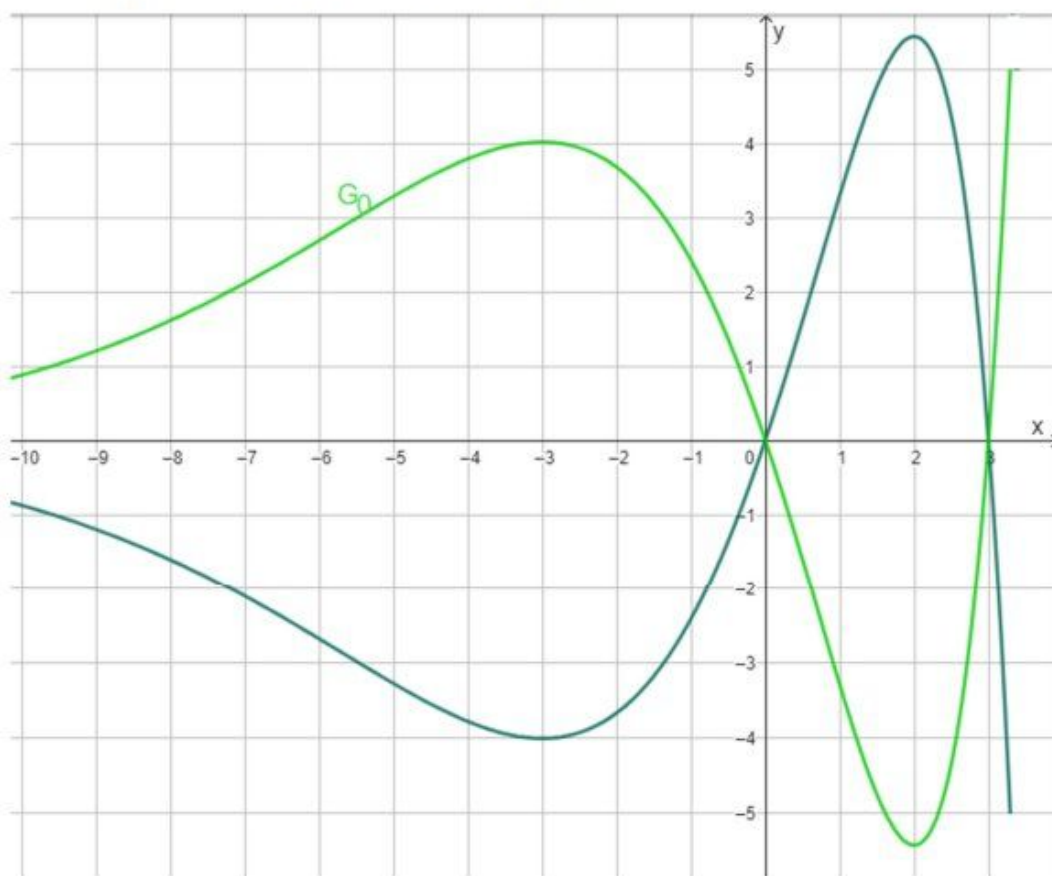
Das Integral gibt die Flächenbilanz zwischen Graph und x-Achse an.

Die Fläche ist der Ladezustand der Batterie. Im Beobachtungszeitraum verliert die Batterie also insgesamt 15 kJ.

h) $g_a(x) = -f(x) + a$ ($a \in \mathbb{R}$)

$$g_0(x) = -f(x)$$

Der Graph von f wird an der x-Achse gespiegelt:



Für positives a gilt: der Graph G_0 wird um a Einheiten nach oben verschoben.

i) zwei Schnittpunkte

Verschiebt man G_0 nach oben, so gibt es so lange genau **zwei** Schnittpunkte, bis der TIP von G_a mit dem HOP von G_f zusammenfällt, also für $a = 2 \cdot 2e = 4e$.

In diesem Fall gibt es nur noch **einen** gemeinsamen Punkt, nämlich den Berührungspunkt.

Verschiebt man G_0 nach unten, so gibt es so lange genau **drei** Schnittpunkte (zusätzlicher Schnittpunkt am linken Rand), bis der HOP von G_a mit dem TIP von

G_f zusammenfällt, also für $a = 2 \cdot \left(-18e^{\frac{3}{2}}\right) = -36e^{\frac{3}{2}}$.

In diesem Fall gibt es einen Berührungspunkt und einen weiteren Schnittpunkt am rechten Rand.

Für $a < -36e^{\frac{3}{2}}$ gibt es nur noch einen Schnittpunkt am rechten Rand.

Zusammengefasst: zwei gemeinsame Punkte gibt es für $0 \leq a < 4e$ und für $a = -36e^{-\frac{3}{2}}$.

j) $g_{a,b}(x) = -f(bx) + a$

Die Gerade $y = 2$ soll Asymptote sein. Diese wird daher im Verhältnis zu G_0 um 2 Einheiten nach oben verschoben. Daher gilt: $a = 2$

Der Faktor b bewirkt eine Streckung in x -Richtung um $\frac{1}{b}$. Der ursprüngliche TIP von G_0 liegt bei $x' = 2$ und soll durch die Streckung bei $x' = -0,5$ liegen.

Daher muss gelten: $2 \cdot \frac{1}{b} = -0,5 \Rightarrow 2 = -0,5b \Rightarrow \underline{\underline{b = -4}}$

(<https://nexkurs.com>)

Aufgabe 7

a)	Die höchste Konzentration im Blut ist an der Stelle, an der der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ einen Hochpunkt hat. Es muss also gelten: $f'(t) = 0$ mit $f'(t) = 10e^{-0,5t} - 5t \cdot e^{-0,5t}$. Somit erhält man $t = 2$. Dem Verlauf des Graphen in der Anlage ist zu entnehmen, dass dies nur ein Maximum sein kann. $f(2) = 10 \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \approx 7,36.$ Die höchste Konzentration ist also nach 2 Stunden vorhanden und beträgt 7,36 Milligramm pro Liter.
b)	Der stärkste Abbau entspricht der betragsmäßig größten Steigung nach dem Maximum des Graphen der Funktion f. Sie wird im Wendepunkt von f angenommen. Also muss gelten: $f''(t) = 0$ mit $f''(t) = -10e^{-0,5t} + 2,5t \cdot e^{-0,5t}$. Damit ergibt sich $t = 4$. Das Medikament wird nach vier Stunden am stärksten abgebaut.
c)	Der lineare Verlauf wird durch die Geradengleichung $k(t) = f(6) + f'(6) \cdot (t - 6)$ beschrieben. Es gilt: $f'(t) = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5t}$. Einsetzen ergibt: $\begin{aligned} k(t) &= 60 \cdot e^{-3} - 20 \cdot e^{-3} \cdot (t - 6) \\ &= 180 \cdot e^{-3} - 20t \cdot e^{-3} \\ &= -20 \cdot e^{-3} \cdot (t - 9). \end{aligned}$ Die Nullstelle von k liegt also bei 9, d. h. dass das Medikament nach 9 Stunden vollständig abgebaut ist.

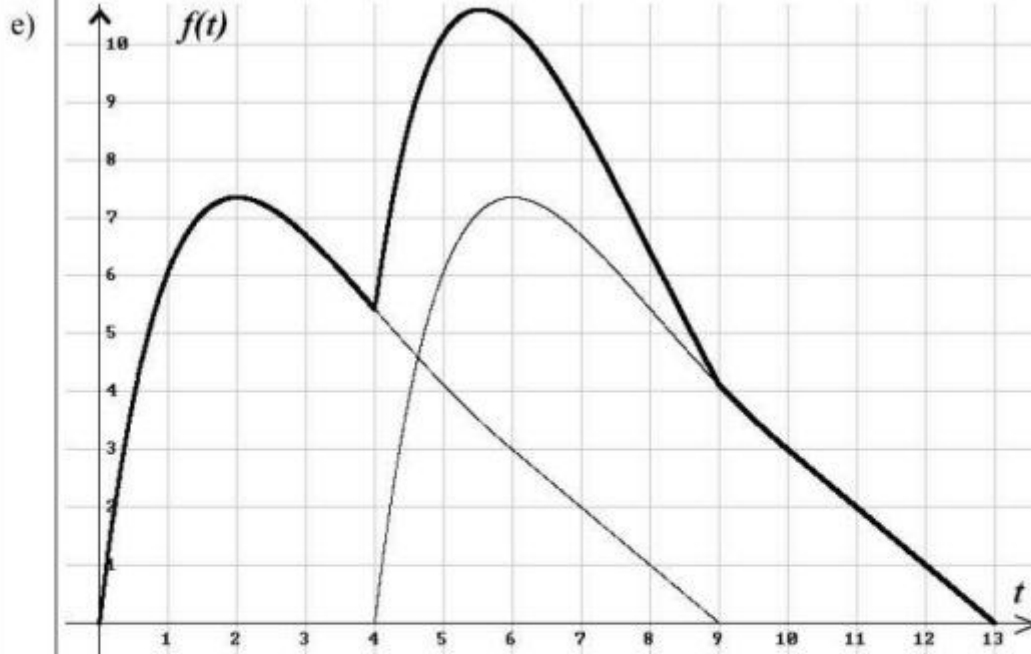
- d) Die mittlere Konzentration des Medikamentes berechnet man folgendermaßen:

$\frac{1}{9} \cdot \int_0^9 f(t) dt$. Eine grobe Abschätzung erhält man z. B. durch Auszählen einerseits der Anzahl n der Kästchen, die ganz in der zugehörigen Fläche liegen, und andererseits der Anzahl m der Kästchen, die von 0 bis 9 vom Graphen geschnitten werden. Man bekommt: $n = 27$ und $m = 19$.

Der gesuchte Mittelwert lässt sich damit grob abschätzen durch

$$\left(n + \frac{m}{2}\right) : 9 = \left(27 + \frac{19}{2}\right) : 9 = 4,055\dots$$

Die Abschätzung sollte zwischen 3,5 Milligramm pro Liter und 4,5 Milligramm pro Liter liegen.



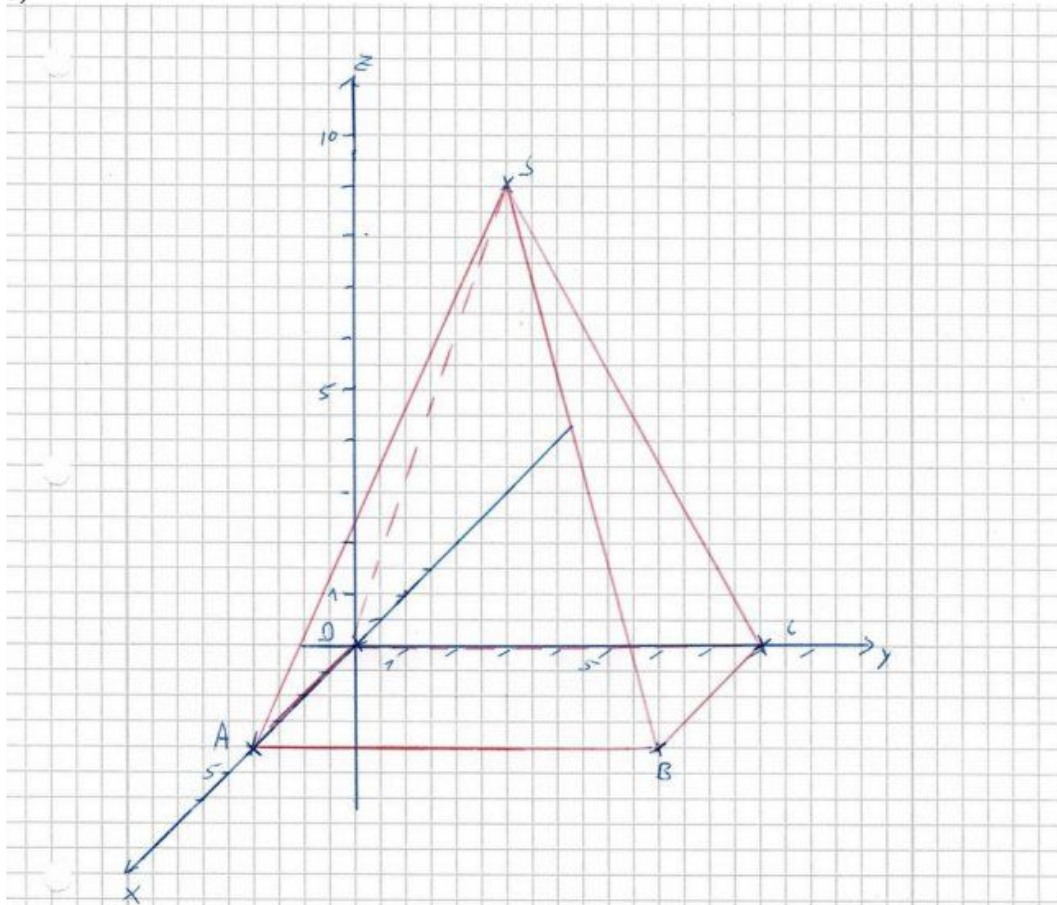
Bemerkung zur grafischen Darstellung: Eine genaue Darstellung der „Überlagerungsfunktion“ ist etwas diffizil, da ja mehrere Definitionsintervalle in Fallunterscheidungen zu betrachten sind, je nachdem bei welcher Funktion der exponentielle oder der lineare Teil wirkt. Das wird nicht erwartet (wenn auch in der obigen Musterskizze geschehen). Wichtig ist die Struktur des Graphen und dass es einen relevanten Zeitraum gibt, in dem die 10-mg/l-Grenze überschritten wird.

f)	Da die Konzentration zeitweilig die Grenze von 10 Milligramm pro Liter übersteigt, muss der Patient mit starken Nebenwirkungen rechnen. Zur Begründung könnte man - entweder am Graphen argumentieren - oder zeigen, dass z. B. bei $t = 6$ der Wert $f(t) + f(t - 4) \approx 10,34$ über 10 liegt (die linearen Teile kommen hier noch nicht ins Spiel) - oder argumentieren, dass das Maximum rechts von $t = 4$ liegen muss, dass also die Funktion $f(t) + f(t - 4)$ betrachtet werden muss, die ihre Extremstelle bei $t = \frac{2(3e^2 + 1)}{e^2 + 1} \approx 5,52$ hat mit dem Maximalwert von ungefähr 10,60 (auch hier kommen die linearen Teile noch nicht ins Spiel).		
----	---	--	--

		I	II
g)	$g(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$ $g'(t) = a \cdot e^{-bt} - abt \cdot e^{-bt}$ Da die Konzentration bei $t = 4$ am größten sein soll, gilt: $g'(4) = 0$. $0 = a \cdot e^{-4b} - 4ab \cdot e^{-4b}$ $a = 4ab \quad :a \ (a \neq 0)$ $b = \frac{1}{4}$ Einsetzen in $g(4) = 4a \cdot e^{-4b}$ mit $g(4) = 10$ ergibt: $a = 2,5e = 6,7957\dots$ Also gilt: $a \approx 6,80$ und $b = 0,25$.		

Aufgabe 8

a)



b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-0 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind also gleich. Daher handelt es sich um ein Parallelogramm. Wir müssen aber noch überprüfen, ob es zusätzlich ein Rechteck oder Quadrat sein könnte.

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Bei A befindet sich also ein rechter Winkel.

$$|\overrightarrow{AB}| = 8$$

$$|\overrightarrow{AD}| = 4$$

Die Seiten sind nicht alle gleich lang.
Es handelt sich daher um ein Rechteck.

c)

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{64} = 8$$

$$|\overrightarrow{AS}| = \left| \begin{pmatrix} 2-4 \\ 4-0 \\ 10-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+16+100} = \sqrt{120}$$

$$|\overrightarrow{BS}| = \left| \begin{pmatrix} 2-4 \\ 4-8 \\ 10-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 10 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{4+16+100} = \sqrt{120}$$

Das Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Seite AB als Basis.

d)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 0,5 \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 0-4 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten M (2/4/0).

e)

$$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} 2-2 \\ 4-4 \\ 10-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MS} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Damit ist der rechte Winkel bewiesen.

f)

$$\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \left| \begin{pmatrix} -80 \\ 0 \\ -16 \end{pmatrix} \right| = 0,5 \cdot \sqrt{6656} \approx 40,79$$

Es sind etwa 40,79 FE.

- g) Die Grundfläche ist ein Rechteck, dessen Seiten jeweils 8 LE bzw. 4 LE lang sind. Sein Flächeninhalt beträgt $4 \cdot 8 = 32$ FE.
Die Höhe der Pyramide beträgt 10 LE. Die Spitze befindet sich genau 10 LE über der Grundfläche und die Verbindung Spitze-Mitte der Grundfläche steht senkrecht auf der Diagonalen der Grundfläche. Daher muss diese Verbindung der Höhe entsprechen. Daher gilt:

$$V_{\text{Pyramide}} = \frac{1}{3} \cdot A_{\text{Grundfläche}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 10 = \frac{320}{3} \text{ VE}$$

Aufgabe 9

- a) Notwendige Bedingung für eine Maximumstelle: $f'(t) = 0$

$$-90e^{-3t} \cdot (1 - 2e^{-3t}) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

Gleichung I): $-90e^{-3t} = 0$ ist nicht lösbar

$$\text{Gleichung II): } 1 - 2e^{-3t} = 0 \Leftrightarrow e^{-3t} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow t_0 = -\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,23$$

An der Abbildung erkennt man, dass bei t_0 eine Maximumstelle existiert.

Es gilt $f(t_0) = 7,5$.

Damit ist gezeigt, dass der maximale Atemfluss 7,5 Liter pro Sekunde beträgt.

- b) Es gilt $f(2) \approx 0,074$.

1 Prozent von 7,5 ist $0,01 \cdot 7,5 = 0,075$.

Damit ist $f(2) < 0,075$ was zu zeigen war.

- c) Bedingung: $f(t) > 5$

Zunächst wird berechnet, zu welchen Zeitpunkten der Atemfluss exakt 5 Liter pro Sekunde beträgt.

$$f(t) = 5 \Leftrightarrow 30 \cdot (e^{-3t} - e^{-6t}) = 5 \Leftrightarrow e^{-3t} - e^{-6t} - \frac{1}{6} = 0$$

Lösung mit Substitution $u = e^{-3t}$

$$u - u^2 - \frac{1}{6} = 0 \Leftrightarrow -u^2 + u - \frac{1}{6} = 0$$

$$u_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-\frac{1}{6})}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}}}{-2} \quad u_1 \approx 0,211 \text{ und } u_2 \approx 0,789$$

$$\text{Rücksubstitution: } e^{-3t} = 0,211 \Leftrightarrow t \approx -\frac{1}{3} \ln(0,211) \approx 0,52$$

$$e^{-3t} = 0,789 \Leftrightarrow t \approx -\frac{1}{3} \ln(0,789) \approx 0,08$$

Aus der Abbildung ergibt sich dass $f(t) > 5$ gilt für $0,08 < t < 0,52$.

Die Länge des Zeitraums beträgt etwa 0,44 Sekunden.

- d) $\int_0^2 f(t) dt$ beschreibt die Menge der ausgeatmeten Luft (in Liter) in den ersten 2 Sekunden.

$\int_0^x f(t) dt$ beschreibt die Menge der ausgeatmeten Luft (in Liter) in den ersten x Sekunden.

Fragestellung: Zu welchem Zeitpunkt x beträgt das Volumen der ausgeatmeten Luft ein Viertel des Volumens der während der ersten zwei Sekunden ausgeatmeten Luft?

$$e) \int_0^2 f(t) dt = \int_0^2 30 \cdot (e^{-3t} - e^{-6t}) dt = 30 \cdot \left[-\frac{1}{3} e^{-3t} + \frac{1}{6} e^{-6t} \right]_0^2 \approx -0,025 - (-5) = 4,975$$

- f) Allgemeine Tangentengleichung an der Stelle $t = 1,5$: $y = f'(1,5) \cdot (t - 1,5) + f(1,5)$

Es gilt $f(1,5) \approx 0,33$ und $f'(1,5) \approx -0,98$

Tangentengleichung: $y = -0,98 \cdot (t - 1,5) + 0,33 \Leftrightarrow y = -0,98t + 1,8$

Schnittstelle der Tangente mit der t-Achse: $0 = -0,98t + 1,8 \Leftrightarrow t \approx 1,84$

Der gesuchte Zeitpunkt beträgt $t_2 \approx 1,84$ Sekunden

- g) Begründen Sie, dass y_0 der in a) genannte maximale Atemfluss ist.

Der maximale Atemfluss beträgt gemäß a) 7,5 Liter pro Sekunde (dies entspricht der Einheit auf der y-Achse der Abbildung). Hierbei spielt es keine Rolle ob auf der x-Achse die Zeit in Sekunden oder das ausgeatmete Volumen abgetragen ist.

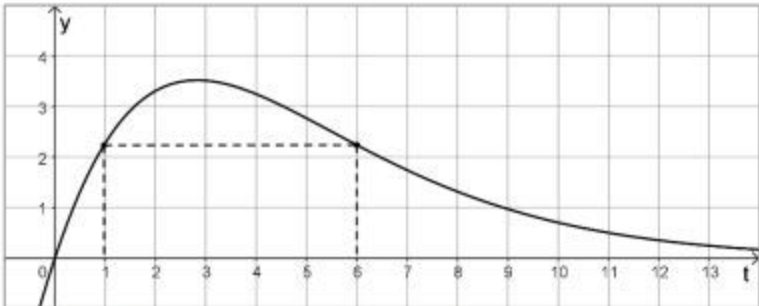
Geben Sie einen Term an, mit dem man x_0 berechnen kann.

x_0 entspricht der Menge der ausgeatmeten Luft bis zum Zeitpunkt

$$t_0 = -\frac{1}{3} \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right).$$

$$x_0 = \int_0^{t_0} f(t) dt$$

Aufgabe 10

		BE
1	a Zehn Wochen nach dem Einpflanzen ist die Wachstumsrate der Pflanze kleiner als 1 Zentimeter pro Woche.	2
	b $r(t) = r(t-5)$ liefert $t \approx 6,0$. Der gesuchte Zeitpunkt ist ungefähr sechs Wochen nach dem Einpflanzen. 	4
	c $r'(t) = 0$ liefert $t = 2\sqrt{2}$, d. h. die Pflanze wächst etwa 2,8 Wochen nach dem Einpflanzen am schnellsten.	2
	d $w(t)$ gibt die Zunahme der Höhe der Pflanze seit dem Einpflanzen in Zentimetern an. Der Wert 27 gibt an, dass die Höhe der Pflanze gegen 27 cm strebt.	3
2	a Nullstellen: $-a$, a Wegen $a^2 > 0$ gilt: $f_a(0) = -\frac{3}{4}a^2 \cdot e < 0$	3
	b $h'(1) = f_1'(1) \Leftrightarrow k = \frac{3}{2}$ Gleichung der Tangente: $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$	3
	c Die Graphen besitzen genau einen gemeinsamen Punkt. Für $x > 1$ gilt: Die Differenz $h(x) - f_1(x)$ wird wegen $h'(x) > f_1'(x)$ für zunehmende Werte von x kontinuierlich größer und ist damit wegen $h(1) - f_1(1) = 0$ positiv. Für $x < 1$ gilt: Die Differenz $f_1(x) - h(x)$ wird wegen $h'(x) > f_1'(x)$ für abnehmende Werte von x kontinuierlich größer und ist damit wegen $h(1) - f_1(1) = 0$ positiv.	5
	d $f_a'(x) = 0 \Leftrightarrow x = a - a\sqrt{2} \vee x = a + a\sqrt{2}$	4

$$a + a\sqrt{2} - (a - a\sqrt{2}) = f_a(a + a\sqrt{2}) - f_a(a - a\sqrt{2}) \text{ liefert } a \approx 0,82.$$