

Aufgaben (Teil A: ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1

Rechne jeweils aus:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\left\| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|$

Aufgabe 2

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A(-3/4/0)$, $B(0/4/-4)$, $C(-3/4/0)$ und $D(0/4/4)$.

a) Zeichne das Viereck in ein dreidimensionales Koordinatensystem

b) Gib einen Vektor an, der die Diagonale von A nach C beschreibt

c) Bestimme die Länge aller 4 Seiten des Vierecks

d) Bestimme rechnerisch, ob es in diesem Viereck rechte Winkel gibt

e) Gib an, ob das Viereck ein besonderes Viereck ist. Und wenn ja, dann gib an, um welches es sich handelt.

- f) Gib einen Term an, mit dem man den Winkel bei A (zwischen $\vec{AB}$ und $\vec{AD}$) ausrechnen kann.
- g) Mit dem Term $\cos \varphi = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{DA}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{DA}|}$ kann man einen Winkel φ ausrechnen. Trage diesen Winkel in deine Zeichnung ein

Aufgabe 3

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A(0/0/0)$, $B(6/0/0)$, $C(8/3/0)$ und $D(2/3/0)$.

- Zeichne das Viereck in ein dreidimensionales Koordinatensystem
- Zeige rechnerisch, dass kein Winkel im Viereck ein rechter Winkel ist
- Zeige rechnerisch, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ parallel zueinander sind
- Gib an, ob es sich um ein besonderes Viereck handelt und wenn ja, um welches
- Gib einen Term an, mit dem man den Winkel bei B (zwischen $\vec{BA}$ und $\vec{BC}$) ausrechnen kann.
- Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks

Aufgabe 4

Gegeben ist das Viereck $ABCD$ mit $A(2|1|1)$, $B(3|5|2)$, $C(0|5|4)$ und $D(-1|1|3)$.

- Zeige rechnerisch, dass es sich um ein Parallelogramm handelt
- Entscheide, ob es sich zugleich um ein Rechteck handelt, und begründe deine Entscheidung
- Entscheide, ob es sich zugleich um eine Raute handelt, und begründe deine Entscheidung.

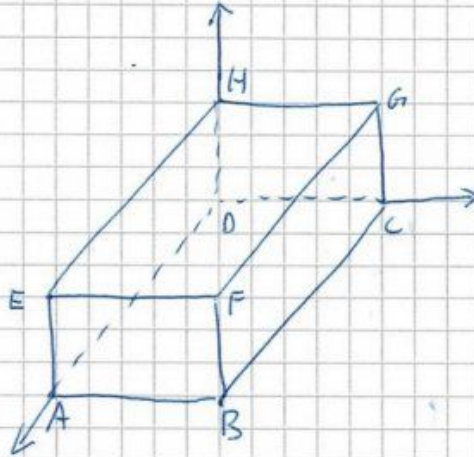
Aufgabe 5

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(3|0|0)$, $B(0|5|0)$ und $C(0|0|2)$.

- Zeichne das Dreieck in ein dreidimensionales Koordinatensystem
- Bestimme rechnerisch, ob es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt.
- Bestimme rechnerisch, ob es sich um ein gleichschenkeliges Dreieck handelt.
- Bestimme die Koordinaten eines Punktes D , so dass das Viereck $ABCD$ ein Parallelogramm ist

Aufgabe 6

Gegeben ist ein Quader mit den Eckpunkten $A(3|0|0)$, B , $C(0|8|0)$, $D(0|0|0)$, E , F , $G(0|8|4)$ und $H(0|0|4)$.



- Bestimme die Koordinaten von B , E und F
- Zeige rechnerisch, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ senkrecht zueinander sind
- Bestimme rechnerisch die Länge der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$
- Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt der Fläche $ABCD$
- Bestimme rechnerisch das Volumen des Quaders
- Bestimme die Koordinaten des Punktes, der genau in der Mitte der Fläche $ABCD$ liegt
- Bestimme die Koordinaten des Punktes, der genau in der Mitte des Quaders liegt

Aufgabe 7

Gegeben ist das Quadrat $ABCD$ mit $A(3/3/4)$, $B(6/7/4)$, $C(2/10/4)$ und $D(-1/6/4)$.

- Zeige rechnerisch, dass das Quadrat einen Flächeninhalt von 25 FE hat
- Es gibt Punkte S , für welche die Pyramide $ABCD S$ ein Volumen von 50 VE hat. Bestimme die Koordinaten von einem dieser Punkte.

Aufgabe 8

Bestimme jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 3 \cdot e^{2x}$

b) $f(x) = (x+2) \cdot e^{2x}$

c) $f(x) = (3x+4) \cdot e^{-3x}$

d) $f(x) = (x^2+2) \cdot e^{-2x}$

e) $f(x) = (-x^2+x+1) \cdot e^{0,5x}$

f) $f(x) = x \cdot e^{3x-4}$

Aufgabe 9

- 1) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 10x \cdot e^{-0,5x}$
- Bestimme die erste, zweite und dritte Ableitung.
 - Bestimme die Nullstelle von f
 - Bestimme die Extremstelle von f
(Auf die y -Koordinate wird verzichtet)
 - Bestimme die Wendestelle von f
(Auf die y -Koordinate wird verzichtet)
 - Für jedes $u > 0$ sind $A(0|0)$, $B(u|0)$, und $C(u|f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks. Gib den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von u an.

Aufgabe 10

[Aufgabensammlung Hamburg Nr. 29]

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

- Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f .
- Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck.
Weisen Sie **nach**, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist.

Aufgabe 11

[Aufgabensammlung Hamburg Nr. 35]

Für jeden Wert von a ($a \in \mathbb{R}$, $a > 0$) ist die Funktion f_a gegeben durch $f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$ ($x \in \mathbb{R}$). Die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(-1|f_a(-1))$ wird mit t_a bezeichnet.

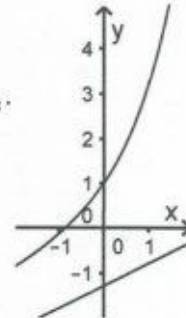
- Weisen Sie **nach**, dass für jeden Wert von a die Tangente t_a durch die Gleichung $y = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2 \cdot a \cdot e^{a-1}$ beschrieben werden kann.
- Für jeden Wert von a schließen die Tangente t_a und die beiden Koordinatenachsen ein Dreieck ein.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks in Abhängigkeit von a .

Aufgabe 12

2) [Aufgabenfundus Hamburg]

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^x + \frac{1}{2}x$.

- a) Begründen Sie, dass der Graph von f und der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ keinen gemeinsamen Punkt besitzen.
- b) Für eine positive reelle Zahl c wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g_c mit $g_c(x) = \frac{1}{2}x - c$ betrachtet. Die Abbildung zeigt die Graphen von f und g_c . Die beiden Graphen schließen mit der y -Achse und der Gerade mit der Gleichung $x = 1$ eine Fläche mit dem Inhalt 3 ein. Berechnen Sie c .



Aufgabe 13 (Baden-Württemberg 2026)

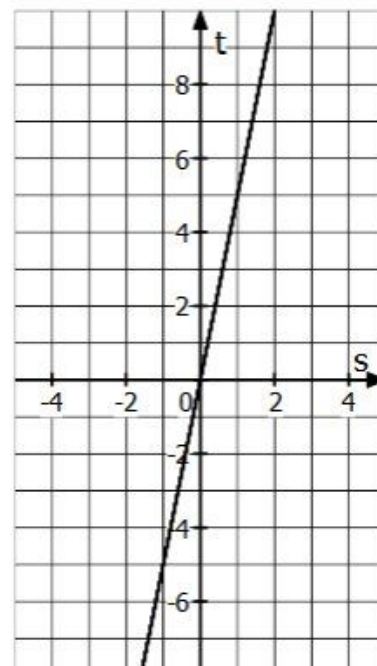
Für eine Zahl $k > 0$ sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f und g mit $f(x) = 2e^{k \cdot x}$ und $g(x) = 2e^{-k \cdot x}$ gegeben.

- a) Geben Sie an, wie der Graph von f aus dem Graphen von g erzeugt werden kann.
- b) Die Graphen von f und g schneiden sich senkrecht. Bestimmen Sie k .

Aufgabe 14 (Baden-Württemberg 2026)

Betrachtet werden die Dreiecke $AB_s C_t$ mit $A(0|0|0)$, $B_s(4s|3s|0)$ und $C_t(0|0|t)$ mit $s, t \in \mathbb{R}^+$.

- a) Begründen Sie, dass jedes Dreieck $AB_s C_t$ im Punkt A rechtwinklig ist.
- b) Zu jedem Wert von s gibt es einen Wert von t , so dass das Dreieck $AB_s C_t$ gleichschenkelig ist. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Punkte $(s|t)$ auf der in der Abbildung dargestellten Gerade liegen.



Aufgabe 15 (Aufgabenfundus Hamburg)

Die Punkte

$$A(1|1|0), B(4|1|0), E(1|1|4) \text{ und } H(1|7|4)$$

sind Eckpunkte des in der Abbildung 3.3 dargestellten Quaders $ABCDEFGH$.

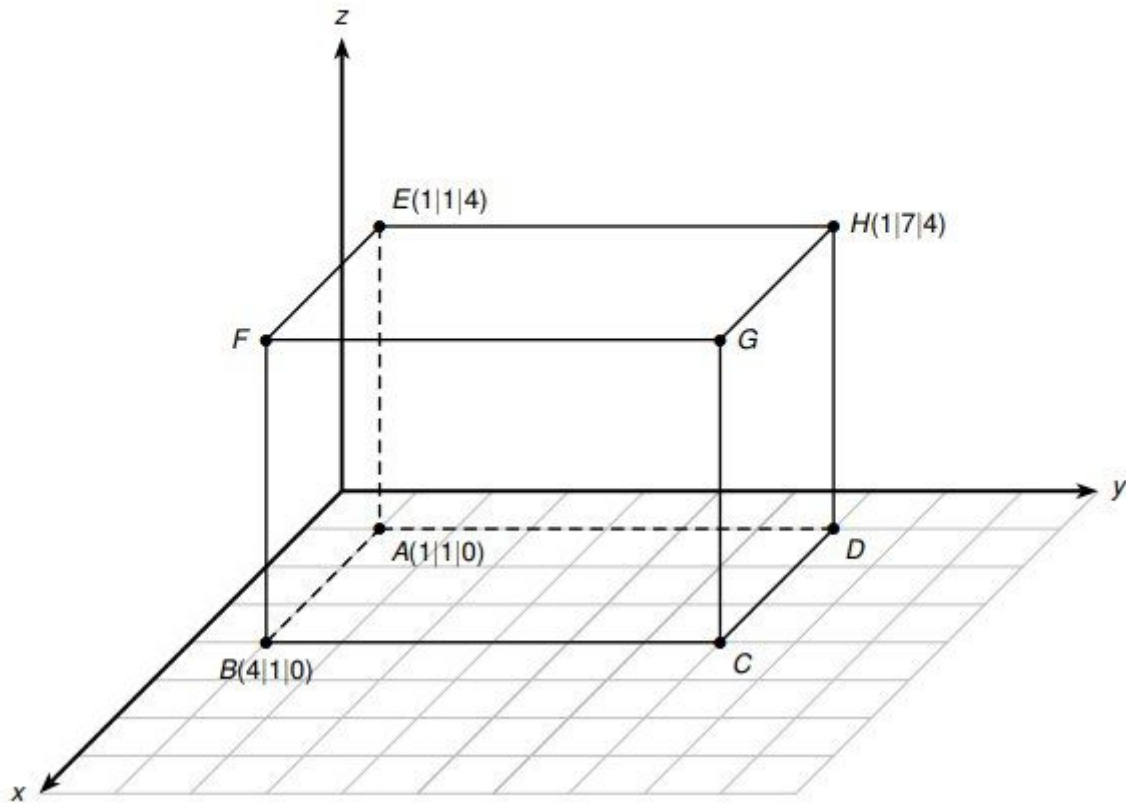


Abbildung 3.3

a) **Geben** Sie die Koordinaten des Punktes G an.

(1 BE)

Der Quader wird parallel zu einer Gerade so verschoben, dass sich der Schnittpunkt seiner Raumdiagonalen im Koordinatenursprung befindet. Dabei entsteht der Quader $A'B'C'D'E'F'G'H'$.

b) **Ermitteln** Sie die Koordinaten des Punktes H' .

(3 BE)

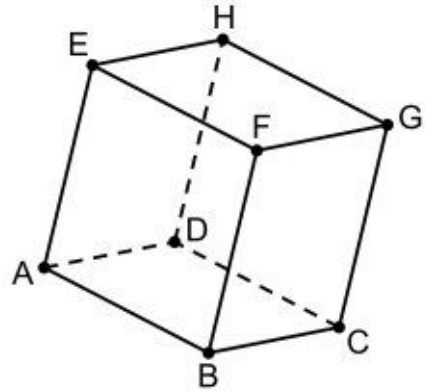
c) **Geben** Sie einen Eckpunkt des Quaders $A'B'C'D'E'F'G'H'$ an, der nur positive Koordinaten hat.

(1 BE)

Aufgabe 16 (Bayern 2025)

Die Abbildung zeigt den Würfel $ABCDEFGH$ mit $A(3|2|-1)$ und $E(1|1|1)$.

- a) Zeigen Sie, dass der Würfel die Kantenlänge 3 besitzt.
- b) Der Punkt S liegt so auf der Strecke $[AE]$, dass die Pyramide $ABCD$ das Volumen 3 hat. Bestimmen Sie die Koordinaten von S .



Lösungen (Teil A)

Aufgabe 1

a)

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 2 + 8 = 10$$

b)

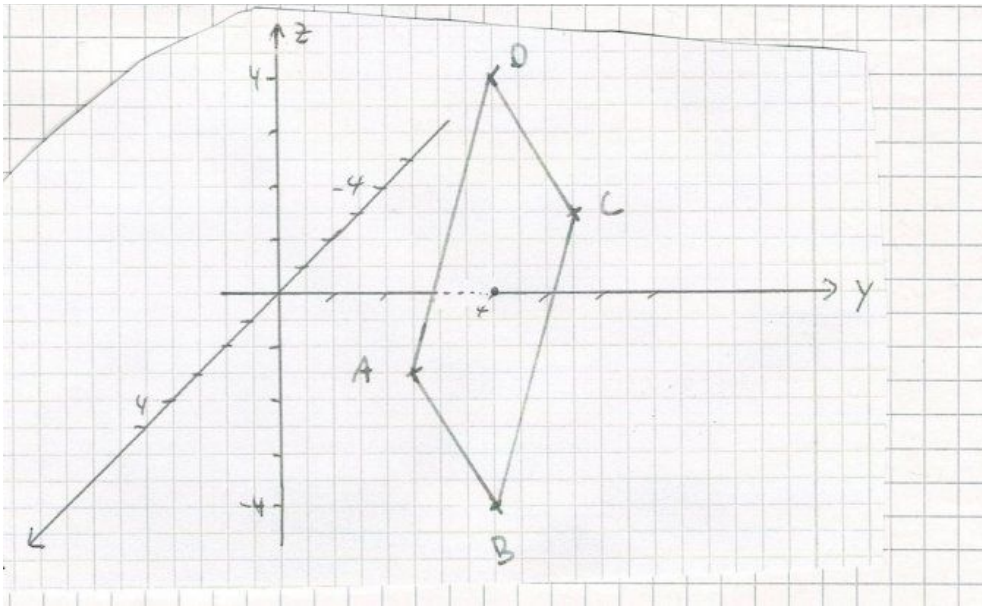
$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-12 \\ 3-2 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\left| \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

Aufgabe 2

a)



b)

$$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3-3 \\ 4-4 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

c)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 4 - 0 \\ -4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \vec{DC} = \begin{pmatrix} -3 - 0 \\ 0 - 4 \\ 0 - 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{DC}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 - 3 \\ 4 - 0 \\ 4 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 - 0 \\ 0 - 4 \\ 0 - (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{AD} \parallel \vec{BC}$$

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ LE}$$

$$|\vec{AB}| = |\vec{DC}| = 5 \text{ LE}$$

$$|\vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5 \text{ LE}$$

$$|\vec{AD}| = |\vec{BC}| = 5 \text{ LE}$$

d)

$$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = 9 - 16 = -7 \neq 0$$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel bei A

analog auch bei den anderen Eckpunkten kein rechter Winkel

e)

Es handelt sich um eine Raute. Die Seiten sind nämlich alle gleich lang und die gegenüberliegenden Seiten sind parallel zueinander. Es ist kein Quadrat, da ansonsten der Winkel bei A 90° groß hätte sein müssen.

f)

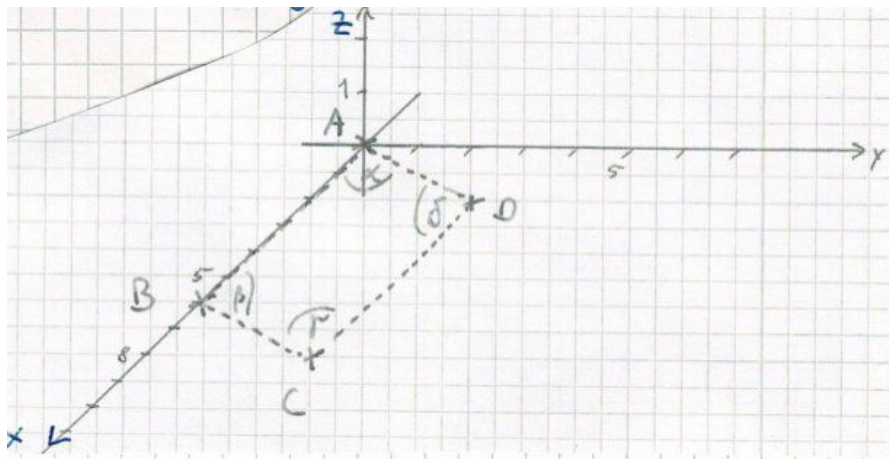
$$\cos \alpha = \frac{\vec{AB} \circ \vec{AD}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{AD}|}$$

g)

Es handelt sich um den Nebenwinkel des bei Aufgabe f ausgerechneten Winkels Alpha. Alpha und der neue Winkel ergeben zusammen 180 Grad.

Aufgabe 3

a)



b)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{zu } \alpha: \vec{AB} \cdot \vec{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 0 \neq 0 \\ \Rightarrow \alpha \neq 90^\circ$$

$$\text{zu } \beta: \vec{BA} \cdot \vec{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -12 \neq 0 \\ \Rightarrow \beta \neq 90^\circ$$

$$\text{zu } \delta: \vec{DA} \cdot \vec{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0 \\ \Rightarrow \delta \neq 90^\circ$$

$$\text{zu } \gamma: \vec{CB} \cdot \vec{CD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0 \\ \Rightarrow \gamma \neq 90^\circ$$

c)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{DC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Die beiden Vektoren sind Vielfache voneinander
 $\Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{DC}$

d)

Es gilt: $\vec{BC}$ und $\vec{AD}$ sind auch Vielfache voneinander
 $\Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{AD}$
 $\Rightarrow$ Das Viereck ist ein Parallelogramm
 (aber nicht zugleich ein Rechteck)

e)

$$\cos \beta = \frac{\vec{BA} \cdot \vec{BC}}{|\vec{BA}| \cdot |\vec{BC}|}$$

f)

Die Seite AB nehmen wir als die Grundseite des Parallelogramms. Diese Seite ist 6 LE lang:

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{36} = 6$$

Die Seite AB ist 3 LE von der Seite DC entfernt. AB verläuft nämlich auf der x-Achse, während DC parallel dazu verläuft. Wenn man einen Punkt auf AB hat, so erhält man einen entsprechenden Punkt auf DC, wenn man bei der y-Achse 3 dazu rechnet. Deshalb ist die Höhe des Parallelogramms 3 LE lang.

Daraus folgt für den Flächeninhalt: $A = 6 \text{ mal } 3 = 18 \text{ FE.}$

Aufgabe 4

a)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{AD} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0-\frac{3}{2} \\ 5-\frac{5}{2} \\ 4-\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{DC} \quad \Rightarrow \vec{AD} = \vec{BC}$$

$\Rightarrow ABCD$ Parallelogramm

b)

Wir testen, ob es einen rechten Winkel gibt.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = -3 + 2 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel bei A
 $\Rightarrow$ kein Rechteck

c)

Wir testen, ob benachbarte Seiten gleich lang sind:

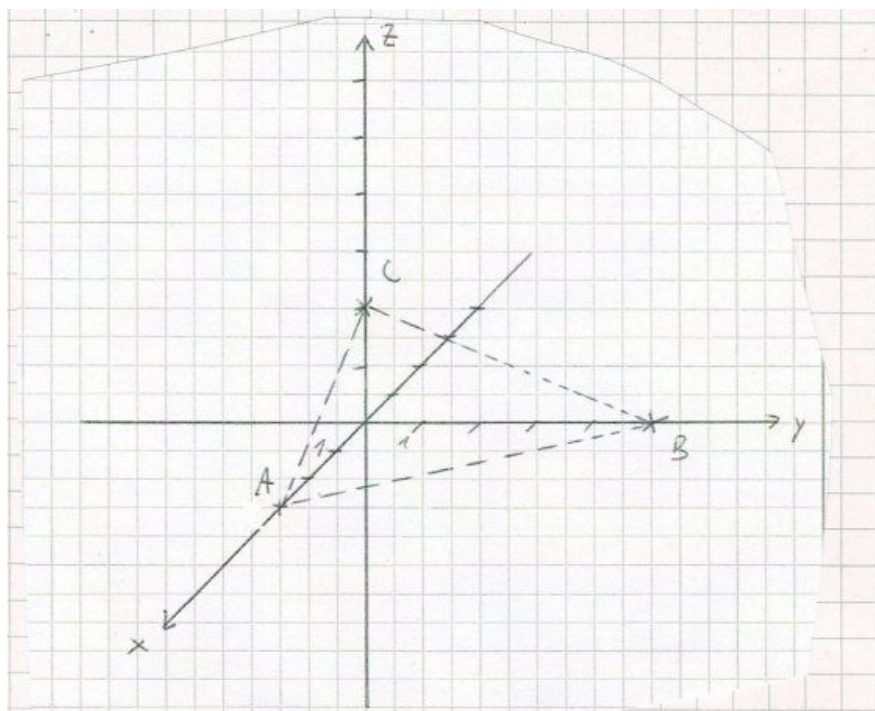
$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$$

$$|\vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Die beiden Seiten AB und AD sind nicht gleich lang. Daher handelt es sich nicht um eine Raute.

Aufgabe 5

a)



b)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Winkel bei A: $\vec{AB} \circ \vec{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 9 \neq 0$

" " B: $\vec{BA} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} = 25 \neq 0$

" " C: $\vec{CA} \circ \vec{CB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel vorhanden

$\Rightarrow$ kein rechtwinkliges Dreieck

c)

$$|\vec{AB}| = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34} \quad \text{LE}$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13} \quad \text{LE}$$

$$|\vec{BC}| = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \quad \text{LE}$$

$\Rightarrow$ kein gleichschenkliges Dreieck

d)



$$\begin{aligned} \vec{OD} &= \vec{OA} + \vec{BC} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow D(3|-5/2)$$

Aufgabe 6

a)

B (3/8/0)
 x-Koordinate wie A
 y- " wie C
 z- " wie A

E (3/0/4)
 x-Koordinate wie A
 y- " wie A
 z- " wie H

F (3/8/4)
 x-Koordinate wie A
 y- " wie C
 z- " wie H

b)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{AD}$$

(rechter Winkel)

c)

$$|\vec{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 8 \text{ LE}$$

$$|\vec{AD}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 3 \text{ LE}$$

d)

$$A = 3 \cdot 8 = 24 \text{ FE}$$


e)

$$|\vec{AE}| = \left| \begin{pmatrix} 3-3 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 4 \text{ LE}$$

$$V = 3 \cdot 8 \cdot 4 = 96 \text{ VE}$$


f)

$$\begin{aligned}
 \vec{OM}_1 &= \vec{OB} + 0,5 \cdot \vec{DA} + 0,5 \cdot \vec{DC} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow M_1 (1,5/4/0)
 \end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned}
 \vec{OM}_2 &= \vec{OM}_1 + 0,5 \cdot \vec{DH} \\
 &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0,5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &\Rightarrow M_2 (1,5/4/2)
 \end{aligned}$$

Alternative: $\vec{OM}_2 = \vec{OB} + 0,5 \cdot \vec{DA} + 0,5 \cdot \vec{DC} + 0,5 \cdot \vec{DH}$

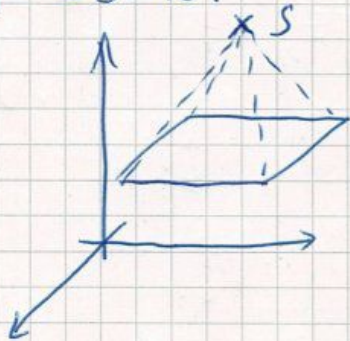
Aufgabe 7

a)

$$\begin{aligned}
 A &= |\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 6-3 \\ 7-3 \\ 4-4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 2-6 \\ 10-7 \\ 4-4 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \\
 &= \sqrt{9+16} \cdot \sqrt{9+16} \\
 &= \sqrt{25} \cdot \sqrt{25} \\
 &= 5 \cdot 5 \\
 &= 25 \text{ FE}
 \end{aligned}$$

b)

Die Punkte haben alle die z-Koordinate $z=4$. Das Quadrat liegt also parallel zur xy-Ebene.



Wir brauchen einen Punkt, der sich über dem Quadrat befindet. Sein Abstand vom Quadrat kann schnell bestimmt werden,

indem man von seiner z-Koordinate 4 abzieht. Dieser Abstand ist die Höhe der Pyramide.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$50 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot h$$

$$50 = \frac{25}{3} \cdot h \quad | \cdot \frac{3}{25}$$

$$6 = h$$

$$\Rightarrow S(x/y | 6+4) \\ S(x/y | 10)$$

Aufgabe 8

$$a) f'(x) = 6e^{2x}$$

$$b) f'(x) = 1 \cdot e^{2x} + 2(x+2) \cdot e^{2x} \\ = e^{2x} + (2x+4) \cdot e^{2x} \\ = (2x+5) \cdot e^{2x}$$

$$\begin{aligned} c) f'(x) &= 3 \cdot e^{-3x} + (-3) \cdot (3x+4) \cdot e^{-3x} \\ &= 3 \cdot e^{-3x} + (-9x-12) \cdot e^{-3x} \\ &= (-9x-9) \cdot e^{-3x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d) f'(x) &= 2x \cdot e^{-2x} + (-2) \cdot (x^2+2) \cdot e^{-2x} \\ &= 2x e^{-2x} + (-2x^2-4) \cdot e^{-2x} \\ &= (-2x^2+2x-4) \cdot e^{-2x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} e) f'(x) &= (-7x+1) \cdot e^{0,5x} + 0,5 \cdot (-x^3+x+1) \cdot e^{0,5x} \\ &= (-2x+1) \cdot e^{0,5x} + (-0,5x^3+0,5x+0,5) \cdot e^{0,5x} \\ &= (-0,5x^3-1,5x+0,5) \cdot e^{0,5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f) f'(x) &= 1 \cdot e^{3x-4} + 3x e^{3x-4} \\ &= (3x+1) \cdot e^{3x-4} \end{aligned}$$

Aufgabe 9

$$\begin{aligned} a) f'(x) &= 10 \cdot e^{-0,5x} + (10x) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= 10 \cdot e^{-0,5x} + (-5x) \cdot e^{-0,5x} \\ &= (-5x+10) \cdot e^{-0,5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -5 \cdot e^{-0,5x} + (-5x+10) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= -5 \cdot e^{-0,5x} + (2,5x-5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= (2,5x-10) \cdot e^{-0,5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'''(x) &= 2,5 \cdot e^{-0,5x} + (2,5x-10) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= 2,5 \cdot e^{-0,5x} + (-1,25x+5) \cdot e^{-0,5x} \\ &= (-1,25x+7,5) \cdot e^{-0,5x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) f(x) &= 0 \Leftrightarrow 10x \cdot e^{-0,5x} = 0 \quad | : e^{-0,5x} \\ 10x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow N(0|0)$$

$$\begin{aligned}
 \text{c) N.B.: } f'(x) &= 0 \\
 (5x + 10) \cdot e^{-0,5x} &= 0 \\
 -5x + 10 &= 0 \text{ oder } e^{-0,5x} = 0 \\
 5x &= 10 & \searrow \\
 x &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{H.B.: } f'(x) &= 0 \text{ und } f''(x) \neq 0 \\
 f''(2) &= (2,5 \cdot 2 - 10) \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \\
 &= -5 \cdot e^{-1} < 0 \\
 &\Rightarrow \text{loß. Max. bei } x=2
 \end{aligned}$$

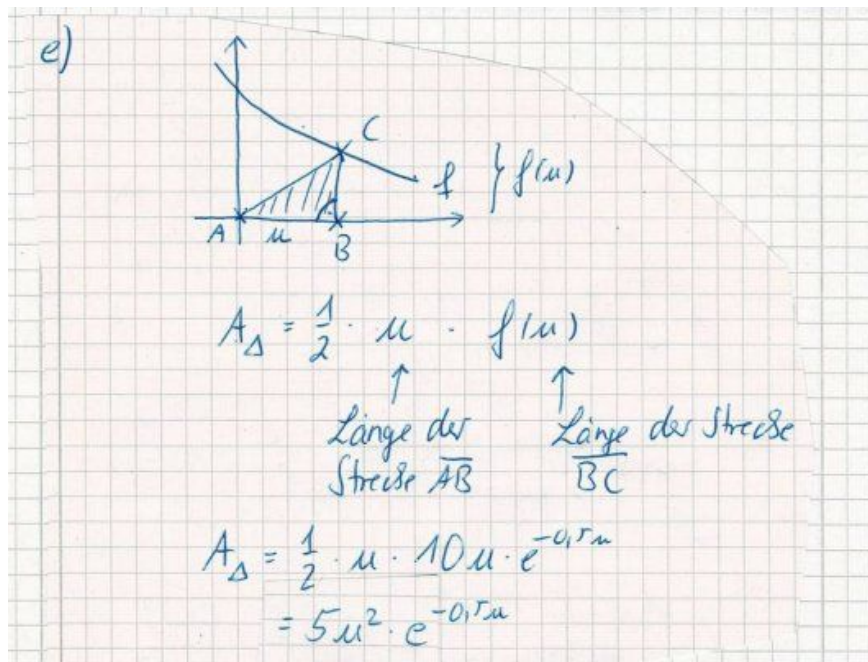
$\Rightarrow$ Die gesuchte Extremstelle liegt bei $x=2$

$$\begin{aligned}
 \text{d) N.B.: } f''(x) &= 0 \\
 (2,5x - 10) \cdot e^{-0,5x} &= 0 \\
 2,5x - 10 &= 0 \text{ oder } e^{-0,5x} = 0 \\
 2,5x &= 10 & \searrow \\
 x &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{H.B.: } f''(x) &= 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \\
 f'''(4) &= (-1,25 \cdot 4 + 7,5) \cdot e^{-0,5 \cdot 4} \\
 &= 2,5 \cdot e^{-2} > 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ WS bei $x=4$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Wendestelle liegt bei $x=4$



Aufgabe 10

a) $f(x) = 0$
 $2e^{0.5x} - 1 = 0$
 $2e^{0.5x} = 1$
 $e^{0.5x} = 0.5 \quad | \ln$
 $0.5x = \ln(0.5) \quad | \cdot 2$
 $x = 2 \cdot \ln(0.5)$

b) Bestimmung der Tangente:

$$t(x) = mx + b$$

$$m = f'(0)$$

$$f'(x) = e^{0.5x}$$

$$f'(0) = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = x + b$$

$$S(0|1) \text{ auf } t \Rightarrow t(0) = 1$$

$$0 + b = 1$$

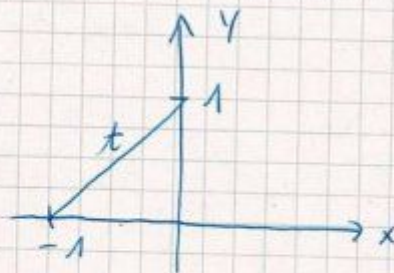
$$b = 1$$

$$\Rightarrow t(x) = x + 1$$

Bestimmung der Schnittpunkte mit den Achsen:

$$y\text{-Achse: } t(0) = 1$$

$$x\text{-Achse: } x + 1 = 0 \\ x = -1$$



Das Dreieck ist gleichschenkelig, da die beiden auf den Achsen verlaufenden Seiten jeweils 1 LE lang sind.

Aufgabe 11

a)

$$f_a(-1) = a \cdot e^{a-1}$$

$$f_a(x) = a \cdot e^{a+x}$$

$$f'_a(x) = a \cdot e^{a+x}$$

$$f'_a(-1) = a \cdot e^{a-1}$$

$$\Rightarrow t_a(x) = a \cdot e^{a-1} \cdot x + b$$

$$P(-1/a e^{a-1}) \text{ auf } t_a \Rightarrow t_a(-1) = a e^{a-1}$$

$$a \cdot e^{a-1} \cdot (-1) + b = a e^{a-1}$$

$$b = 2a e^{a-1}$$

$$\Rightarrow t_a(x) = a \cdot e^{a-1} \cdot x + 2a e^{a-1}$$

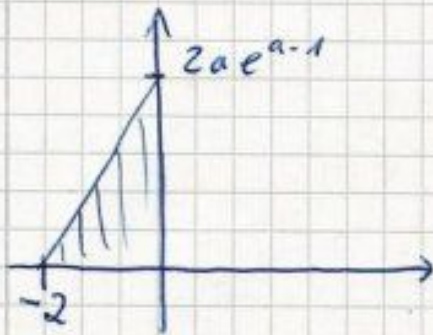
b)

b) Schnittp. von t_a mit den Achsen:

$$t_a(0) = 2ae^{a-1}$$

$$\begin{aligned} t_a(x) = 0 &\Rightarrow ae^{a-1} \cdot x + 2ae^{a-1} = 0 \\ ae^{a-1} \cdot x &= -2ae^{a-1} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{2 \cdot 2ae^{a-1}}{2} = 2ae^{a-1}$$



Aufgabe 12

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad e^x + 0,5x &= 0,5x - 1 && | -0,5x \\ e^x &= -1 \\ &\Downarrow \\ & (e^x > 0 \text{ for all } x \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

b)



Abstand zwischen f und h :
 $f(x) - h(x)$

$$\int_0^1 f(x) - h(x) dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + 0,5x - (0,5x - c) dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + 0,5x - 0,5x + c dx = 3$$

$$\int_0^1 e^x + c dx = 3$$

$$[e^x + cx]_0^1 = 3$$

$$e^1 + c - (e^0 + c \cdot 0) = 3$$

$$e + c - 1 = 3$$

$$c = -e + 4$$

Aufgabe 13

- a) Es gilt $g(-x) = f(x)$.
Spiegelt man den Graphen von g an der y -Achse, entsteht der Graph von f .
- b) Bedingungen für einen senkrechten Schnitt:
- $f(x) = g(x)$
 - $f'(x) \cdot g'(x) = -1$
- I) $2e^{kx} = 2e^{-kx} \quad | :2$
 $\Leftrightarrow e^{kx} = e^{-kx} \quad | \ln$
 $\Leftrightarrow kx = -kx \quad | +kx$
 $\Leftrightarrow 2kx = 0 \quad | :2k$
 $\Leftrightarrow x = 0$

Die Schaubilder schneiden sich an der Stelle $x = 0$.

II) Es gilt $f'(x) = 2k \cdot e^{kx}$ und $g'(x) = -2ke^{-kx}$

Bedingung: $f'(0) \cdot g'(0) = -1$

$$\Leftrightarrow 2k \cdot (-2k) = -1$$

$$\Leftrightarrow -4k^2 = -1$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow k = \frac{1}{2} \quad (\text{da } k > 0 \text{ ist})$$

Für $k = \frac{1}{2}$ schneiden sich die Graphen senkrecht.

Aufgabe 14

a) Das Dreieck ist im Punkt A rechtwinklig, wenn $\overline{AB_s} \circ \overline{AC_t} = 0$ gilt.

$$\text{Es gilt } \overline{AB_s} = \begin{pmatrix} 4s \\ 3s \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overline{AC_t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}.$$

$$\overline{AB_s} \circ \overline{AC_t} = 4s \cdot 0 + 3s \cdot 0 + 0 \cdot t = 0 \text{ was zu zeigen war.}$$

b) Da das Dreieck im Punkt A rechtwinklig ist, müssen bei Gleichschenkligkeit die Seiten $\overline{AB_s}$ und $\overline{AC_t}$ gleich lang sein.

$$|\overline{AB_s}| = \sqrt{16s^2 + 9s^2} = \sqrt{25s^2} = 5 \cdot |s| = 5s, \text{ da } s > 0 \text{ ist.}$$

$$|\overline{AC_t}| = \sqrt{t^2} = |t| = t, \text{ da } t > 0 \text{ ist.}$$

Aufgrund der Gleichschenkligkeit gilt: $t = 5s$

In dem Koordinatensystem ist die Gerade $y = 5x$ eingezeichnet (Steigung 5 und y-Achsenabschnitt 0).

Da s die Rolle von x und t die Rolle von y hat, gilt $t = 5s$.
Damit liegen die zugehörigen Punkte $(s|t)$ auf der Gerade.

Aufgabe 15

a)	$G(4 7 4)$
b)	Schnittpunkt der Raumdiagonalen: $S(2,5 4 2)$ $\overrightarrow{OH'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2,5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ Also ist $H'(-1,5 3 2)$.
c)	G'

Aufgabe 16

a)

Länge eines Vektors

$$|\vec{AE}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

b)

Koordinaten von Punkten ermitteln

Für das Volumen V einer Pyramide $ABCD S$ über der quadratischen Grundfläche $ABCD$ mit Seitenlänge 3 aus Teilaufgabe a gilt:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot h$$

Das Volumen ist laut Aufgabenstellung 3:

$$3 = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot 3 \cdot h$$

$$3 = 3h$$

$$\Rightarrow h = 1$$

Damit ergibt sich aufgrund der Seitenlänge 3 des Würfels zur Berechnung des Punktes S :

$$\begin{aligned} \vec{OS} &= \vec{OA} + \frac{1}{3} \cdot \vec{AE} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow S\left(\frac{7}{3} \mid \frac{5}{3} \mid -\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$