Lösungen
Teil A (mit Hilfsmittel)

Aufgabe 1

a)

$$2x^2-8x+6=0 \qquad |:2$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$x=2\pm\sqrt{4-3}$$
$$x=2\pm\sqrt{1}$$
$$x=2\pm 1$$
$$x_1=1 \qquad x_2=3$$

b)

$$x^3-6x^2-7x=0$$
$$x\cdot(x^2-6x-7)=0$$
$$x=0 \qquad oder \qquad x^2-6x-7=0$$
$$x_1=0 \qquad x=3\pm\sqrt{9+7}$$
$$x_1=0 \qquad x=3\pm\sqrt{16}$$
$$x_1=0 \qquad x=3\pm 4$$
$$x_1=0 \qquad x_2=-1 \qquad x_3=7$$

c)

$$(8x-16)\cdot e^{-0{,}6x}=0$$
$$8x-16=0 \qquad oder \qquad e^{-0{,}6x}=0$$
$$8x=16 \qquad keine\ Lösung$$
$$x=2$$

d)

$$x^3-ax^2=0$$
$$x^2\cdot(x-a)$$
$$x^2=0 \qquad oder \qquad x-a=0$$
$$x_1=0 \qquad x_2=a$$

$Fallunterscheidung:$
$a=0: \qquad eine\ Nullstelle: x=0$
$a\neq 0: \qquad zwei\ Nullstellen: x_1=0 \qquad x_2=a$

e)

$$(x^4-5x^2+4)\cdot e^{-4x}=0$$
$$x^4-5x^2+4=0 \qquad oder \qquad e^{-4x}=0$$
$$z^2-5z+4=0 \quad (Substitution\ x^2=z) \qquad keine\ Lösung$$
$$z=2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-4}$$
$$z=2{,}5\pm\sqrt{2{,}25}$$
$$z=2{,}5\pm 1{,}5$$

$z_1=1 \qquad z_2=4 \qquad (Resubstitution\; z=x^2)$
$x^2=1 \qquad x^2=4$
$x_1=1 \quad x_2=-1 \quad x_3=-2 \quad x_4=2$

f)

$x^2-2x+a=0$
$x=1\pm\sqrt{1-a}$

$1-a=0$
$a=1$

Fallunterscheidung:
$a<1: \quad$ *zwei Nullstellen*: $x_1=1+\sqrt{1-a} \quad x_2=1-\sqrt{1-a}$
$a=1: \quad$ *eine Nullstelle*: $x=1$
$a>1: \quad$ *keine Nullstelle*

g)

$e^{2x}-1=0 \qquad |+1$
$e^{2x}=1 \qquad |\log$
$2x=0$
$x=0$

h)

$x^3-2ax=0$
$x\cdot(x^2-2a)=0$
$x=0 \qquad oder \qquad x^2-2a=0$
$x_1=0 \qquad x^2=2a$
$x_1=0 \qquad x=\pm\sqrt{2a}$

Fallunterscheidung:
$a>0: \quad$ *drei Nullstellen* $\quad x_1=0 \quad x_2=\sqrt{2a} \quad x_3=-\sqrt{2a}$
$a\leq 0: \quad$ *eine Nullstelle* $\quad x=0$

Aufgabe 2

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |7 \\ 2 & -1 & 1 & |2 \\ 2 & 2 & -1 & |4 \end{pmatrix} \qquad 2\cdot I-II \quad und \quad 2\cdot I-III$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & |7 \\ 0 & 3 & 3 & |12 \\ 0 & 0 & 5 & |10 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \quad 5z=10 \qquad \Rightarrow 3y+6=12 \qquad \Rightarrow x+2+4=7$
$z=2 \qquad 3y=6 \qquad x+6=7$
$y=2 \qquad x=1$

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |9 \\ 2 & 3 & -2 & |9 \\ -1 & 2 & 2 & |9 \end{pmatrix} \qquad 2\cdot I-II \qquad und \qquad I+III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |9 \\ 0 & -1 & 4 & |9 \\ 0 & 3 & 3 & |18 \end{pmatrix} \qquad 3\cdot II+III$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |9 \\ 0 & -1 & 4 & |9 \\ 0 & 0 & 15 & |45 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 15z=45$$
$$z=3$$

$$\Rightarrow -y+12=9$$
$$-y=-3$$
$$y=3$$

$$\Rightarrow x+3+3=9$$
$$x=3$$

Aufgabe 3

a)

$$\int_0^2 3x^2+2x\,dx=|x^3+x^2|_0^2 \;=8+4-0=12$$

b)

$$\int_0^a 2x+1dx=30$$
$$|x^2+x|_0^a \;=30$$
$$a^2+a-0=30$$
$$a^2+a-30=0$$
$$a=-0{,}5\pm\sqrt{0{,}25+30}$$
$$a=-0{,}5\pm\sqrt{30{,}25}$$
$$a=-0{,}5\pm5{,}5$$
$$a_1=5 \qquad (a_2=-6)$$

Die obere Grenze muss größer als 0 sein, daher ist das Ergebnis nur a = 5.

c)

$$\int_a^{3a} 2x+1\,dx=14$$
$$|x^2+x|_a^{3a}=14$$
$$9a^2+3a-(a^2+a)=14$$

$$8a^2+2a=14$$
$$8a^2+2a-14=0$$
$$a^2+\frac{1}{4}x-\frac{7}{4}=0$$
$$a=-\frac{1}{8}\pm\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{7}{4}}$$
$$a=-\frac{1}{8}\pm\sqrt{\frac{113}{64}}$$

Die obere Grenze muss größer sein als die untere. Daher ist nur $a=-\frac{1}{8}+\sqrt{\frac{113}{64}}$ eine Lösung.

d)

$$\int_0^2 3x^2+ax\,dx=[x^3+0{,}5ax^2]_0^2=8+2a-0=8+2a$$

e)

$$F_1(x)=x^4+2x^3+3x^2$$
$$F_2(x)=x^4+2x^3+3x^2+4$$

f)

$$f(x)=6x^2+4x \quad\Rightarrow\quad F(x)=2x^3+2x^2+c$$

$$F(1)=1 \quad\Rightarrow\quad 2+2+c=1$$
$$c=-3$$

$$\Rightarrow F(x)=2x^3+2x^2-3$$

g)

$$f(x)=4\cdot e^{2x} \quad\Rightarrow\quad F(x)=2e^{2x}\ .$$

h)

$$F'(x)=2\cdot e^{3x}+(2x+5)\cdot 3\cdot e^{3x}=2\cdot e^{3x}+(6x+15)\cdot e^{3x}=(6x+17)\cdot e^{3x}=f(x)$$

i)

$$f'(x)=(8x+3)\cdot e^{2x}+(4x^2+3x+1)\cdot 2\cdot e^{2x}$$
$$f'(x)=(8x+3)\cdot e^{2x}+(8x^2+6x+2)\cdot e^{2x}\ .$$
$$f'(x)=(8x^2+14x+5)\cdot e^{2x}$$

j)

$$f'(x)=e^x+x\cdot e^x+8x=(1+x)\cdot e^x+8x$$

k)

$$f'(x)=2x\cdot\sin(x^2)+x^2\cdot(\cos(x^2)\cdot 2x)=2x\cdot\sin(x^2)+2x^3\cdot\cos(x^2)$$

l)

$$f(x)=(x^2+1)\cdot e^{x^2+4x}$$
$$f'(x)=2x\cdot e^{x^2+4x}+(x^2+1)\cdot(2x+4)\cdot e^{x^2+4x}$$
$$f'(x)=2x\cdot e^{x^2+4x}+(2x^3+2x+4x^2+4)\cdot e^{x^2+4x}$$
$$f'(x)=(2x^3+4x^2+4x+4)\cdot e^{x^2+4x}$$

m)

$$f'(x)=-2e^{-x}+2e^{x}$$

n)

$$f(x)=\sqrt{2x^2+5}$$
$$f(x)=(2x^2+5)^{0,5}$$
$$f'(x)=(2x^2+5)^{-0,5}\cdot 0{,}5\cdot 4x$$
$$f'(x)=\frac{2x}{\sqrt{2x^2+5}}$$

o)

$$f(x)=\frac{x+1}{x^2}=(x+1)\cdot x^{-2}$$
$$f'(x)=1\cdot x^{-2}+(x+1)\cdot(-2)\cdot x^{-3}$$
$$f'(x)=x^{-2}+(-2x-2)\cdot x^{-3}=\frac{1}{x^2}+\frac{-2x-2}{x^3}=\frac{x}{x^3}+\frac{(-2x-2)}{x^3}=\frac{-x-2}{x^3}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x)=x^2+ax+4$.

a)

$$6^2+6a+4=0$$
$$36+6a+4=0$$
$$6a=-40$$
$$\underline{a=-\frac{40}{6}=-\frac{20}{3}}$$

b)

$$f_a(x)=x^2+ax+4$$
$$f_a'(x)=2x+a$$
$$f_a''(x)=2$$

N.B.: $f_a'(x)=0$

$$2x+a=0$$
$$2x=-a$$
$$x=-a/2$$

H.B.: $f_a'(x)=0 \wedge f_a''(x)\neq 0$

$f_a''(-\frac{a}{2})=2>0 \Rightarrow$ Min. bei $x=-\frac{a}{2}$

y-Wert: $f_a(-\frac{a}{2}) = (-\frac{a}{2})^2 + a\cdot(-\frac{a}{2})+4$
$$= \frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{2}+4$$
$$= -\frac{a^2}{4}+4$$

$\Rightarrow$ TP $(-\frac{a}{2} / -\frac{a^2}{4}+4)$

c)

$x^2+ax+4 = x^2+bx+4 \quad |-x^2$ $\qquad a\neq b$
$$ax+4 = bx+4 \quad |-4$$
$$ax = bx$$
$$ax-bx=0$$
$$\underbrace{(a-b)}_{\neq 0}\cdot x=0$$
$$\Rightarrow x=0$$

$f_a(0)=4$

$\Rightarrow$ Es gibt einen gemeinsamen Punkt: $P(0/4)$.

d)

$P(a|3a^2)$ liegt auf $f_a \Rightarrow f_a(a)=3a^2$
$$a^2+a\cdot a+4=3a^2$$
$$a^2+a^2+4=3a^2$$
$$2a^2+4=3a^2 \quad |-2a^2$$

$$4=a^2 \quad |\sqrt{\ }$$
$$\underline{a=\pm 2}$$

Aufgabe 5

$ax^2 - bx = 0$

$x \cdot (ax - b) = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad ax - b = 0$

$ax = b \quad | : a$

$x = \frac{b}{a}$

Fall 1: $a = 0$ $\qquad$ eine NS: $x = 0$

Fall 2: $a \neq 0$, $b = 0$ $\qquad$ eine NS: $x = 0$

Fall 3: $a \neq 0$, $b \neq 0$ $\qquad$ zwei NS: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{b}{a}$

Aufgabe 6

a)

$\log_2(8) = x \quad \Rightarrow x = 3, \quad denn \;\; 2^3 = 8$

b)

$\log_x(49) = 2 \quad \Rightarrow x = 7, \quad denn \;\; 7^2 = 49$

c)

$\log_3(x) = 3 \quad \Rightarrow x = 27, \quad denn \;\; 3^3 = 27$

d)

$3^x = 81 \quad \Rightarrow x = 4$

e)

$\frac{18}{x^2} = 2 \qquad | \; mal \, x^2$

$18 = 2x^2$

$9 = x^2$

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -3$

Aufgabe 7

a) Nachweis, dass sich die Schaubilder an der Stelle x = 2 schneiden:

Es gilt $f(2) = 4 - \frac{4}{2^2} = 3$ und $g(2) = 15 - 3 \cdot 2^2 = 15 - 12 = 3$.

Da f(2) = g(2) ist, schneiden sich die Schaubilder an der Stelle x = 2.

b) Berechnung des Flächeninhalts:

$$A = \int_1^2 (g(x) - f(x))dx = \int_1^2 (15 - 3x^2 - (4 - \frac{4}{x^2}))dx = \int_1^2 (11 - 3x^2 + 4x^{-2})dx$$

$$= \left[11x - x^3 - 4x^{-1}\right]_1^2 = \left[11x - x^3 - \frac{4}{x}\right]_1^2 = 22 - 8 - 2 - (11 - 1 - 4) = 6 \text{ FE}$$

(www.mathe-aufgaben.com)

Aufgabe 8

a) $f(x) = e^{-2x+1} + 1$

$f'(x) = -2e^{-2x+1}$

Steigung an der Stelle $x = \frac{1}{2}$: $f'(\frac{1}{2}) = -2 \cdot e^{-2\frac{1}{2}+1} = -2 \cdot e^0 = -2$

Damit ist der Nachweis erbracht.

b) Steigung der Tangente: -2

Daher hat die Tangentengleichung die Gestalt t(x) = -2x + b.

$f(0{,}5) = e^{-2 \cdot 0{,}5 + 1} + 1 = e^0 + 1 = 2$

Deshalb:

$t(0{,}5) = 2$

$-2 \cdot 0{,}5 + b = 2$

$-1 + b = 2$

$b = 3$

Die Tangente hat die Gleichung t(x) = -2 x + 3.

Schnittpunkt der Tangente mit der y-Achse: P(0|3)

Nullstelle der Tangente: $-2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 3 = \frac{9}{4}$ Flächeneinheiten

(www.mathe-aufgaben.com)

Aufgabe 9

a)

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 -x^3 + 12x\,dx$$

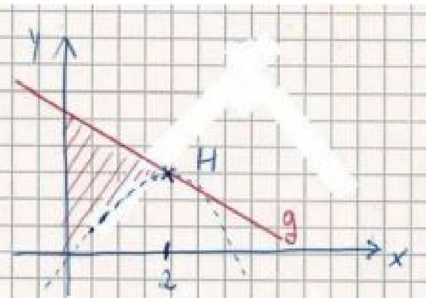
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2\right]_0^2$$

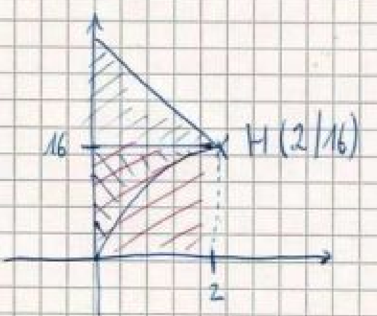
$$= -\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2 - 0$$

$$= -4 + 24$$

$$= 20 \checkmark$$

b)





$$A_{//} = 2\cdot 16 = 32$$

$$A_{\backslash\backslash\backslash} = A_{//} - \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= 32 - 20$$

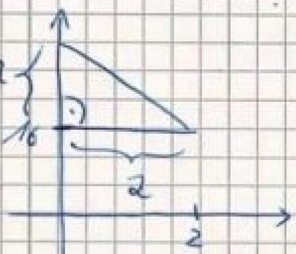
$$= 12$$

Es gilt: $A_{//} + A_{\backslash\backslash\backslash} = 20$

(laut Aufgabenstellung: Fläche zwischen g, f und y-Achse gleich 20 FE)

$$\Rightarrow A_{III} = 20 - A_{IV}$$
$$= 20 - 12$$
$$= 8 \text{ FE}$$

Es gilt aber auch:



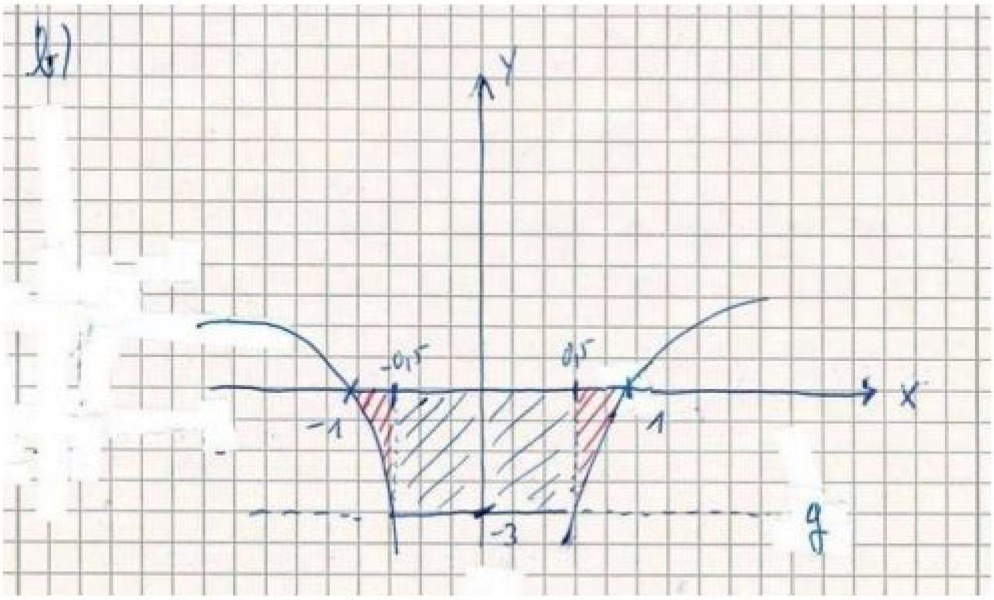
$$A_{III} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a$$
$$8 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot a$$
$$8 = a$$

Der Achsenabschnitt muss 8 LE über der Markierung 16 liegen
$\Rightarrow$ bei 24

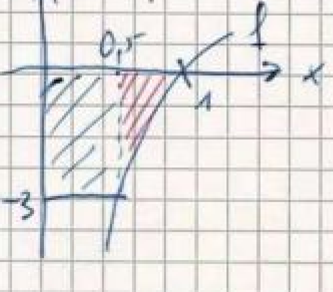
Aufgabe 10

a) Schnittpunkte:

$$1 - \frac{1}{x^2} = -3 \quad \Big| -1$$
$$-\frac{1}{x^2} = -4 \quad \Big| \cdot (-x^2)$$
$$1 = 4x^2 \quad \Big| :4$$
$$\frac{1}{4} = x^2$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}$$



Da der Graph symmetrisch ist besteht die zu bestimmende Fläche aus 2 gleich großen zueinander symmetrischen Teilen. Es reicht eine der Hälften (z.B. $x>0$) auszurechnen



$$A = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5 \text{ FE}$$

$$-A = \int_{0,5}^{1} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0,5}^{1} 1 - \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \int_{1/2}^{1} 1 - x^{-2}\,dx = \left[1x + x^{-1}\right]_{1/2}^{1} = \left[x + \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{1}$$

$$= 1 + \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 2 - (0{,}5 + 2) = 2 - 2{,}5$$

$$= -0{,}5$$

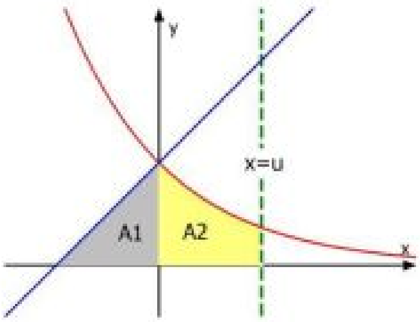
$$\Rightarrow A_{///} = 0{,}5 \text{ FE}$$

$$\Rightarrow A_{gesucht} = 2 \cdot (A_{///} + A_{///}) = 2 \cdot (1{,}5 + 0{,}5)$$

$$\underline{= 4 \text{ FE}}$$

Aufgabe 11

Skizze:



Schnittpunkt der Gerade g mit der x-Achse: A(-1|0)
Schnittpunkt der Gerade g mit der y-Achse: P(0|1

$$A1 = A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$A2 = \int_0^u e^{-x} dx = \left[-e^{-x}\right]_0^u = -e^{-u} - (-1) = -e^{-u} + 1$$

Bedingung: $-e^{-u} + 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-u} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow u = -\ln\frac{1}{2}$ oder $u = \ln(2)$

(www.mathe-aufgaben.com)

Aufgabe 12

$$\int_1^e \left(\frac{2}{x}+4x\right)dx = \left[2\cdot\ln(x)+2x^2\right]_1^e = 2\cdot\ln(e)+2e^2-(2\cdot\ln(1)+2) = 2+2e^2-2 = 2e^2$$

(www.mathe-aufgaben.com)

Aufgabe 13

Es gilt $f_k(x) = x^4+(2-k)\cdot x^3 - k\cdot x^2$.

a) Für k = 2 lautet er Funktionsterm $f_2(x) = x^4-2\cdot x^2$.
Da der Funktionsterm nur Potenzen mit geraden Hochzahlen (Exponenten).
Somit ist der Graph von f_2 symmetrisch zur y-Achse.

b) Notwendige Bedingung für eine Wendestelle: $f_k''(x)=0$

$f_k'(x) = 4x^3+3\cdot(2-k)\cdot x^2-2k\cdot x$

$f_k''(x) = 12x^2+6\cdot(2-k)\cdot x-2k$

Bedingung: $f_k''(1)=0$: $\quad 12+6(2-k)\cdot 1-2k=0 \Leftrightarrow 24-8k=0 \Leftrightarrow k=3$

Für k = 3 ist die Bedingung erfüllt.

Hinweis:
Da in der Aufgabe vorgegeben ist, dass eine Wendestelle existiert, muss die Bedingung $f_k'''(1)\neq 0$ nicht geprüft werden.

(www.mathe-aufgaben.com)

Aufgabe 14

a) Berechnung des Flächeninhalts:

$$A = \int_0^{2a}(-x^2+2ax)dx = \left[-\frac{1}{3}x^3+ax^2\right]_0^{2a} = -\frac{8}{3}a^3+4a^3-0 = \frac{4}{3}a^3$$

b) Da die Nullstellen von f bei x = 0 und x = 2a sind, besitzt der Hochpunkt aus Symmetriegründen die Koordinaten H(a|f(a)).
Es gilt $f(a) = -a^2+2a^2 = a^2$, das heißt die Breite des Quadrats (und damit auch die Länge des Quadrats) ist a^2.
Flächeninhalt des Quadrats: $A_Q = a^2\cdot a^2 = a^4$
Bedingung: $a^4 = \frac{4}{3}a^3 \Leftrightarrow a^4-\frac{4}{3}a^3 = 0 \Leftrightarrow a^3\cdot(a-\frac{4}{3}) = 0$
Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt: a = 0 (scheidet als Lösung aus, da laut Aufgabenstellung a > 1 sein soll) und $a=\frac{4}{3}$.
Somit gilt $a=\frac{4}{3}$.

(www.mathe-aufgaben.com)

<u>Aufgabe 15</u>

14a) $f_a(0) = \frac{a \cdot e^0}{(1+e^0)^2} = 9$ (siehe Abbildung)

$$\frac{a}{4} = 9$$

$$a = 36$$

b) $f_{36}(x) = \frac{36e^x}{(1+e^x)^2}$ $\quad g(x) = e^x$

$$\frac{36e^x}{(1+e^x)^2} = e^x \quad | : e^x \quad (e^x \neq 0)$$

$$\frac{36}{(1+e^x)^2} = 1 \quad | \cdot (1+e^x)^2$$

$$36 = (1+e^x)^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$6 = 1+e^x \quad (1+e^x > 0)$$

$$5 = e^x \quad | \ln$$

$$\ln(5) = x$$

$\Rightarrow S(\ln(5) / 5)$

allgemein:

$$\frac{ae^x}{(1+e^x)^2} = e^x \quad | e^x$$

$$\frac{a}{(1+e^x)^2} = 1$$

$$a = (1+e^x)^2$$

Die Wurzel kann gezogen werden, wenn $a > 0$

$$\sqrt{a} = 1 + e^x$$

$$\sqrt{a} - 1 = e^x$$

$$\ln(\sqrt{a} - 1) = x$$

$$\Rightarrow S\left(\ln(\sqrt{a}-1) \,/\, \sqrt{a}-1\right)$$

Den Punkt gibt es, wenn $a > 0$

Lösungen
Teil B (mit Hilfsmitteln)

<u>Aufgabe 1</u>

a) Schnittpunkte mit den Achsen

y-Achse: $f(0) = (0^2 - 2 \cdot 0 + 1) \cdot e^{-0}$
$= 1 \cdot e^0$
$= 1$
$\Rightarrow S_y(0/1)$

x-Achse: $(x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x} = 0$
$x^2 - 2x + 1 = 0$ oder $e^{-x} = 0$ $\lightning$
$x = 1 \pm \sqrt{1-1}$
$x = 1$
$\Rightarrow N(1/0)$

Extrempunkte

$f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x}$
$f'(x) = (2x - 2) \cdot e^{-x} + (x^2 - 2x + 1) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$
$= (2x - 2) \cdot e^{-x} + (-x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x}$
$= (-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x}$

$f''(x) = (-2x + 4) \cdot e^{-x} + (-x^2 + 4x - 3) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$
$= (-2x + 4) \cdot e^{-x} + (x^2 - 4x + 3) \cdot e^{-x}$
$= (x^2 - 6x + 7) \cdot e^{-x}$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$(-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x} = 0$

$-x^2 + 4x - 3 = 0$ oder $e^{-x} = 0$

↯

$x^2 - 4x + 3 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{4-3}$

$x = 2 \pm \sqrt{1}$

$x_1 = 1$

$x_2 = 3$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(1) = (1 - 6 + 7) \cdot e^{-1} = 2e^{-1} > 0$ TP

$f''(3) = (9 - 18 + 7) \cdot e^{-3} = -2 \cdot e^{-3} < 0$ HP

y-Werte:

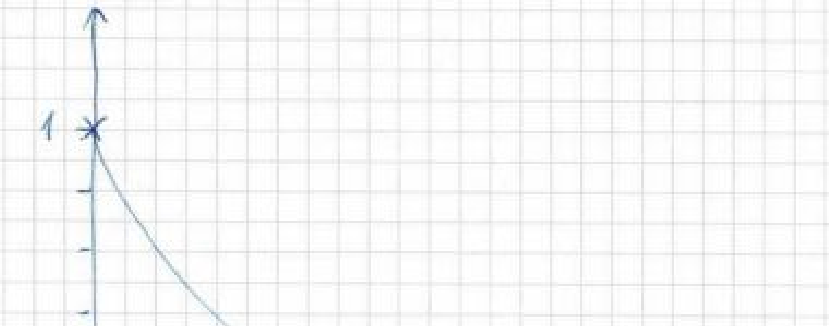
$f(1) = (1 - 2 + 1) \cdot e^{-1} = 0$

$f(3) = (9 - 6 + 1) \cdot e^{-3} = 4e^{-3}$

$\Rightarrow$ TP$(1|0)$

HP$(3|4e^{-3})$

b)



c) gesucht: maximale positive Steigung von f

$\Leftrightarrow$ Maximum von f'

(Wendestelle oder Randwert)

Notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$(x^2 - 6x + 7) \cdot e^{-x} = 0$

$x^2 - 6x + 7 = 0$ oder $e^{-x} = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{9-7}$ $\quad \lightning$

$(x_1 = 3 + \sqrt{2}$ außerhalb Def.bereich$)$

$x_2 = 3 - \sqrt{2}$

Hinr. Bed.: (laut Aufgabenstellung nicht notwendig)

$f'(0) = (-0^2 + 4 \cdot 0 - 3) \cdot e^0 = -3 < 0$

$f'(3-\sqrt{2}) \approx f'(1{,}59)$

$= (-1{,}59^2 + 4 \cdot 1{,}59 - 3) \cdot e^{-1{,}59}$

$= 0{,}8319 \cdot e^{-1{,}59} = 0{,}1696$

$\approx 0{,}17$

$f'(2) = (4 - 12 + 7) \cdot e^{-2}$

$= -1 \cdot e^{-2} < 0$

$\Rightarrow x \approx 1{,}59$ mit $f'(x) \approx 0{,}17$

d) $F'(x) = (-2x) \cdot e^{-x} + (-x^2 - 1) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$

$= -2x \cdot e^{-x} + (x^2 + 1) \cdot e^{-x}$

$= (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x} = f(x)$

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x}\,dx$$

$$= \left[(-x^2 - 1) \cdot e^{-x}\right]_0^1$$

$$= (-1-1) \cdot e^{-1} - (0-1) \cdot e^0$$

$$= -2e^{-1} + 1$$

$$= 1 - 2e^{-1}$$

$$\approx 0{,}2642 \text{ FE}$$

$$= 26{,}42 \text{ m}^2$$

10m

10m $\boxed{1FE}$ $\quad$ $1FE = 10m \cdot 10m$

e) $f'(0) = -3$

$\Rightarrow t(x) = -3x + b$

$R(0|1)$ auf $t \Rightarrow t(0) = 1$

$$-3 \cdot 0 + b = 1$$

$$b = 1$$

$\Rightarrow t(x) = -3x + 1$

Schnittpunkte von t mit den Koordinatenachsen:

y-Achse

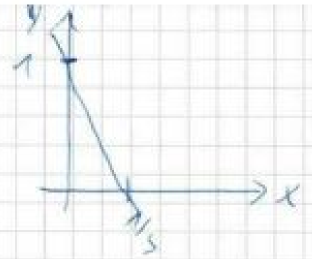
$S_y(0|1)$

x-Achse

$$-3x + 1 = 0$$

$$1 = 3x$$

$$1/3 = x$$



$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ FE

$= 16{,}67\ m^2$

Einsparung: $26{,}42\ m^2 - 16{,}67\ m^2 = 9{,}75\ m^2$

$\Rightarrow$ Einsparung $9{,}75\ m^2$

f) gesucht: $p(x) = ax^2 + bx + c \quad p'(x) = 2ax + b$

$R(0|1)$ auf $p \Rightarrow c = 1$

p tangential zu f bei R $\Rightarrow p'(0) = f'(0) = -3$

$\Rightarrow b = -3$

$S(1|0)$ auf $p \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$

$a + b + c = 0$

$a - 3 + 1 = 0$

$a - 2 = 0$

$a = 2$

p tangential zu f bei S $\Rightarrow p'(1) = f'(1) = 0$

$\Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0$

$2a - 3 = 0$

$2a = 3$

$a = 1{,}5$

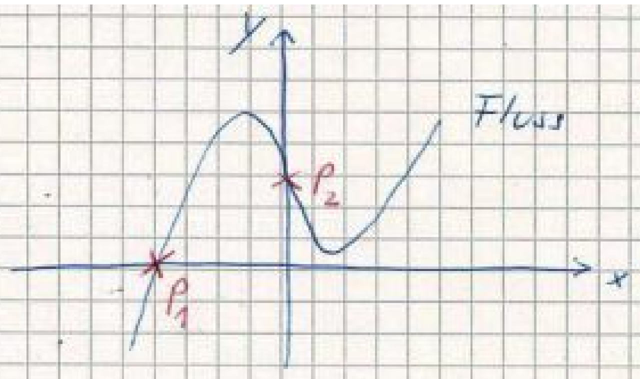
↯

NR: $f'(1) = (-1+4-3) \cdot e$
$= 0$

$\Rightarrow$ Es gibt die gesuchte Funktion p nicht

Aufgabe 2

1a)



Achsenabschnitt:

$f(0) = 2$

$\Rightarrow P_2\ (0/2)$

Autobahn 2 überquert den Fluss im Punkt $P_2\ (0/2)$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 0$

GTR...

$x = -4{,}37$

$\Rightarrow P_1\ (-4{,}37/0)$

Autobahn 1 überquert den Fluss im Punkt $P_1\ (-4{,}37/0)$

b) $f(x) = 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$

$f'(x) = 3{,}6x^2 + 8x - 5$

$f''(x) = 7{,}2x + 8$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$3{,}6x^2 + 8x - 5 = 0$

GTR...

$x_1 = -2{,}73$

$x_2 = 0{,}51$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(-2{,}73) = -11{,}656$ HP

$f''(0{,}51) = 11{,}672$ TP

y-Werte und Ränder:

$f(-5) = -23$

$f(-2{,}73) = 21{,}05$

$f(0{,}51) = 0{,}65$

$f(2) = 17{,}6$

$\Rightarrow$ nördlichste Stelle $P_1(-2{,}73 / 21{,}05)$

südlichste Stelle $P_2(-5 / -23)$

c) Krümmung nach rechts $\Leftrightarrow f''(x) < 0$

$f''(x) = 7{,}2x + 8$

Nullstelle von f'':

$f''(x) = 0$

$7{,}2x + 8 = 0$

$7{,}2x = -8$

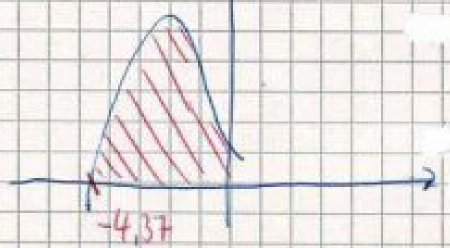
$x = -1{,}11$

$f''(-2) = -6{,}4$ (also f'' negativ links von $x = -1{,}11$)

$f''(0) = 8$ (also f'' positiv rechts von $x = -1{,}11$

$\Rightarrow$ Krümmung nach rechts für $-5 < x < -1{,}11$

d)



$$A = \int_{-4{,}37}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-4{,}37}^{0} 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2\,dx$$

$$= \left[0{,}3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_{-4{,}37}^{0}$$

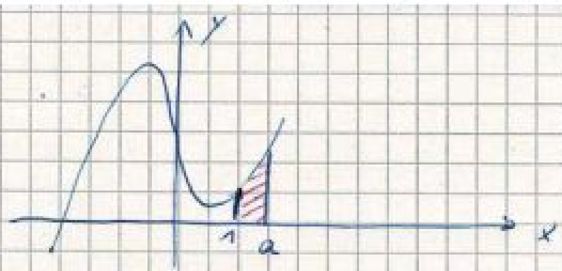
GTR...

$\approx 58{,}35$ FE

1 FE = 1 Hektar (100 m x 100 m)

$\Rightarrow A = 58{,}35$ ha

e)



$$A = \int_1^a 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \, dx$$

$$= \left[0{,}3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_1^a$$

$$= 0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \left(0{,}3 + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 2\right)$$

$$= 0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \frac{17}{15}$$

$$0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \frac{17}{15} = 1$$

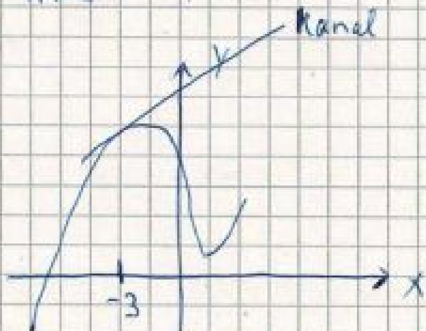
GTR ...

$a_1 \approx -6{,}04$ (außerhalb Def. bereich)

$a_2 \approx 1{,}29$

$\Rightarrow a \approx 1{,}29$

f) ①



$f(-3) = 20{,}6 \Rightarrow A(-3/20{,}6)$

$f'(x) = 3{,}6x^2 + 8x - 5$

$f'(-3) = 3{,}4$

$\Rightarrow t(x) = 3{,}4x + b$

$A(-3/20{,}6)$ auf $t \Rightarrow t(-3) = 20{,}6$

$3{,}4 \cdot (-3) + b = 20{,}6$

$-10{,}2 + b = 20{,}6$

$b = 30{,}8$

$\Rightarrow t(x) = 3{,}4x + 30{,}8$

(II) Achsenabschnitt: 30,8

$\Rightarrow P(0/30{,}8)$

(III) Schnittpunkte:

$f(x) = t(x)$

$1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 3{,}4x + 30{,}8$

GTR...

$x_1 = -3$

$x_2 = 2{,}\overline{6} = \frac{8}{3}$

$$A = \int_{-3}^{8/3} t(x) - f(x)\,dx = \int_{-3}^{8/3} 3{,}4x + 30{,}8 - (1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{8/3} 3{,}4x + 30{,}8 - 1{,}2x^3 - 4x^2 + 5x - 2\,dx$$

$$= \int_{-3}^{8/3} -1{,}2x^3 - 4x^2 + 8{,}4x + 28{,}8 \, dx$$

$$= \left[-0{,}3x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4{,}2x^2 + 28{,}8x\right]_{-3}^{8/3}$$

GTR ...

$\approx 103{,}11$ FE

$= 103{,}11$ ha

Aufgabe 3

a) *Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Profillinie.*

Ableitungen:

$f(x) = 0{,}0008x^4 - 0{,}12x^2 + 5$

$f'(x) = 0{,}0032x^3 - 0{,}24x$

$f''(x) = 0{,}0096x^2 - 0{,}24$

$f'''(x) = 0{,}0192x$

Hinreichende Bedingung für den Tiefpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

$0{,}0032x^3 - 0{,}24x = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot \left(0{,}0032x^2 - 0{,}24\right) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): $x = 0$

Gleichung II): $0{,}0032x^2 - 0{,}24 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 75 \Rightarrow x = \pm\sqrt{75}$

Laut dem Schaubild muss der Tiefpunkt an der Stelle $x = \sqrt{75}$ vorliegen.

Kontrolle: $f''(\sqrt{75}) = 0{,}48 > 0$ also Tiefpunkt

$f(\sqrt{75}) = 0{,}5$

Tiefpunkt $T(\sqrt{75} \mid 0{,}5)$

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle x = 5 am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat.

Der steilste Abfall befindet sich an der Wendestelle.
Kontrolle, dass bei x = 5 eine Wendestelle vorliegt:
$f''(5) = 0{,}0096 \cdot 25 - 0{,}24 = 0$ und $f'''(5) \neq 0$
Damit existiert bei x = 5 eine Wendestelle.

Steigung an der Wendestelle: $f'(5) = -0{,}8$
Die Steigung -0,8 entspricht einem Gefälle von 80%.

Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist.

Der Übergang liegt an der Stelle x = 0 vor.
Es gilt f(0) = 5, das heißt der Punkt P(0|5) ist der Übergangspunkt.

Wegen $f'(0) = 0$ besitzt der Graph von f dieselbe Steigung wie die waagrechte Gerade, die die Hochfläche beschreibt.
Durch den gemeinsamen Übergangspunkt P mit gleicher Steigung liegt ein knickfreier Übergang vor.

b) *Berechnen Sie die Länge des Seils.*

Es gilt $f(5) = 2{,}5$ und somit ist P(5|2,5).
Es gilt $f(10) = 1$ und somit ist Q(10|1).

Die Länge des Seils entspricht dem Abstand von P zu Q.

Berechnung mit dem Satz des Pythagoras:
$\overline{PQ} = \sqrt{(10-5)^2 + (2{,}5-1)^2} = \sqrt{27{,}25} \approx 5{,}22$ Meter

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann.

1.Schritt: Aufstellen der Geradengleichung g(x), die durch P und Q verläuft.

2.Schritt: Aufstellen der Funktion d(u) = g(u) – f(u), die den vertikalen Abstand zwischen der Gerade g und dem Gelände dar mit $5 \leq u \leq 10$

3.Schritt: Berechnung des absoluten Maximums der Funktion d(u).
Hinreichende Bedingung für lokales Maximum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) < 0$
Das lokale Maximum ist hier auch das globale Maximum, da für die Randwerte gilt d(5) = d(10) = 0.

c) Der Lichtmast hat seinen Standort in A(-1 / 5). Das Gelände wird komplett ausgeleuchtet, wenn der Lichtstrahl entlang der Wendetangente (der Tangente durch den Wendepunkt) verläuft.

Aus Teil (a) ergibt sich als Wendestelle x = 5.
Es gilt außerdem: f'(5) = -0,8 und f(5) = 2,5.
Damit haben wir t(x) = -0,8 x + b und -0,8 mal 5 + b = 2,5, also -4 + b = 2,5 und damit b = 6,5

Die gesuchte Tangente hat deshalb die Gleichung t(x) = -0,8x + 6,5

Einsetzen von x = -1 in die Tangente ergibt $y = 7{,}3$.
Das Ende des Lichtmastes muss sich auf einer Mindesthöhe von 7,3 Meter befinden.
Da der Lichtmast auf einer Höhe von 5 Meter beginnt, muss der Lichtmast mindestens 2,3 Meter hoch sein.

(www.mathe-aufgaben.com)

Aufgabe 4

3a) zu Beginn: $6600\ \frac{m^3}{s}$ $P_1(0|6600)$

nach 1h: $9000\ \frac{m^3}{s}$ höchster Wert $P_2(1|9000)$ HP

nach 3h wie zu Beginn $P_3(3|6600)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P_1(0|6600) \Rightarrow d = 6600$ I.
$P_2(1|9000) \Rightarrow a + b + c + d = 9000$ II.
$3a + 2b + c = 0$ III.
$P_3(3|6600) \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 6600$ IV.

Nach Einsetzen von I ergibt sich:

$$\text{II. } a + b + c = 2400$$
$$\text{III. } 3a + 2b + c = 0$$
$$\text{IV. } 27a + 9b + 3c = 0$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2400 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$$a = 600$$
$$b = -3600$$
$$c = 5400$$

$$\Rightarrow f(x) = 600x^3 - 3600x^2 + 5400x + 6600$$

Kontrolle der HB:

$$f'(x) = 1800x^2 - 7200x + 5400$$
$$f''(x) = 3600x - 7200$$

$$f''(1) = 3600 - 7200 = -3600 < 0 \Rightarrow \text{HP bei } x = 1$$

k) $f_k(2) = 600 \cdot 2^3 - k \cdot 2 + 5400 \cdot 2 + 6600 = 22.200 - 2k$

$f_k(3) = 600 \cdot 3^3 - k \cdot 3 + 5400 \cdot 3 + 6600 = 39.000 - 3k$

Da es sich um lineare Funktionen handelt, wird der größte Wert bei $k = 3550$ und der kleinste bei $k = 3600$ erreicht.

Kleinste Wert: $x = 2 \to 15.000$
$x = 3 \to 28.200$
größte Wert: $x = 2 \to 15.100$
$x = 3 \to 28.350$

c) $f_k(x) = 600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600$

$f_k'(x) = 1800x^2 - 2kx + 5400$

$f_k''(x) = 3600x - 2k$

$f_k'''(x) = 3600$

N.B.: $f_k''(x) = 0$

$3600x - 2k = 0$

$3600x = 2k$

$x = \frac{2k}{3600} = \frac{k}{1800}$

H.B.: $f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$

$f_k'''\left(\frac{k}{1800}\right) = 3600 \neq 0$ ✓

y-Wert: $y = 600 \cdot \left(\frac{k}{1800}\right)^3 - k \cdot \left(\frac{k}{1800}\right)^2 + 5400 \cdot \frac{k}{1800} + 6600$

$= \frac{k^3}{9720000} - \frac{k^3}{3240000} + 3k + 6600$

$= -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600 \ \frac{m^3}{s}$

Der Wendepunkt ist der Zeitpunkt mit der größten Abnahme der Fließgeschwindigkeit.

d) – gestrichen -

e) $1h = 3600s$

$\Rightarrow g_k(x) = 3600 \cdot f_k(x)$

Aufgabe 5

a)

Nullstellen

$$(x^2+a)\cdot e^{0,5-x}=0$$

$$x^2+a=0 \quad \textit{oder} \quad e^{0,5-x}=0$$

$$x^2=-a \quad \textit{keine Lösung}$$

$$x=\pm\sqrt{-a}$$

Fallunterscheidung:

$a<0$: *zwei Nullstellen* $x_1=\sqrt{-a}$ $x_2=-\sqrt{-a}$

$a=0$: *eine Nullstelle* $x=0$

$a>0$: *keine Nullstelle*

Grenzwerte

$$\lim_{x\to\infty} f_a(x)=0$$

$$\lim_{x\to-\infty} f_a(x)=\infty$$

b)

Schnittpunkt mit der y-Achse

$$f_a(0)=(0^2+a)\cdot e^{0,5-0}=a\cdot e^{0,5}=a\cdot\sqrt{e}$$
$$\Rightarrow S_y(0/a\cdot\sqrt{e})$$

Bestimmung der Parameter

Der untere Graph hat als Schnittpunkt mit der y-Achse den Punkt P(0/0), der obere Graph ungefähr den Punkt Q (0/3,2). Daher gilt:

unterer Graph	*oberer Graph*
$a\cdot\sqrt{e}=0$	$a\cdot\sqrt{e}\approx 3,2$
$a=0$	$a\approx 1,94$

Da die verwendeten Parameter alle ganzzahlig sind, handelt es sich um $a_1=0$ (Graph unten) und $a_2=2$ (Graph oben).

c)

$$A=\int_0^3 f_2(x)-f_0(x)\,dx$$
$$A=\int_o^3 (x^2+2)\cdot e^{0,5-x}-x^2\cdot e^{0,5-x}\,dx$$
$$A=\int_0^3 2\cdot e^{0,5-x}\,dx$$
$$A=\left|-2\cdot e^{0,5-x}\right|_0^3$$
$$A=-2\cdot e^{-2,5}-(-2)\cdot e^{0,5}=-2\cdot e^{-2,5}+2\cdot e^{0,5}\approx 3,133\,FE$$

d)

Erste Ableitung

$$f_a(x)=(x^2+a)\cdot e^{0,5-x}$$
$$f_a'(x)=2x\cdot e^{0,5-x}+(x^2+a)\cdot(-1)\cdot e^{0,5-x}$$
$$f_a'(x)=2x\cdot e^{0,5-x}+(-x^2-a)\cdot e^{0,5-x}$$
$$f_a'(x)=(-x^2+2x-a)\cdot e^{0,5-x}$$

Notwendige Bedingung

$$(-x^2+2x-a)\cdot e^{0,5-x}=0$$

$-x^2+2x-a=0$	*oder*	$e^{0,5-x}=0$
$x^2-2x+a=0$		*keine Lösung*
$x=1\pm\sqrt{1-a}$		

Wenn a > 1, dann steht unter der Wurzel eine negative Zahl. In diesem Fall führt die notwendige Bedingung zu keiner Lösung. Dann kann es auch keine Extrempunkte geben, da diese unter den Nullstellen der ersten Ableitung auftauchen müssen.

e)

Zweite Ableitung

$$f_2'(x)=(-x^2+2x-2)\cdot e^{0,5-x}$$
$$f_2''(x)=(-2x+2)\cdot e^{0,5-x}+(-x^2+2x-2)\cdot e^{0,5-x}$$
$$f_2''(x)=(-2x+2)\cdot e^{(0,5-x)}+(x^2-2x+2)\cdot e^{0,5-x}$$
$$f_2''(x)=(x^2-4x+4)\cdot e^{0,5-x} \qquad |\ \textit{Binomische Formel}$$
$$f_2''(x)=(x-2)^2\cdot e^{0,5-x}$$

Bedeutung

Sowohl $(x-2)^2$ als auch der Exponentialausdruck können keine negativen Werte annehmen, sondern mehr oder weniger nur positive Werte. Deshalb ist die zweite Ableitung immer positiv. Nur bei x=2 liegt eine Nullstelle der zweiten Ableitung vor. Es gibt deshalb keine Wendepunkte und der Graph ist ständig nach links gekrümmt (außer bei x = 2).

f)

Tangente

$$f_2(x)=(x^2+2)\cdot e^{0,5-x}$$
$$f_2(2)=(4+2)\cdot e^{-1,5}=6\cdot e^{-1,5}$$
$$f_2'(x)=(-x^2+2x-2)\cdot e^{0,5-x}$$
$$f_2'(2)=(-4+4-2)\cdot e^{-1,5}=-2\cdot e^{-1,5}$$

$$\Rightarrow t(x)=-2\cdot e^{-1,5}\cdot x+b$$

$$P(2/6\cdot e^{-1,5})\,auf\,t \;\Rightarrow\; t(2)=6\cdot e^{-1,5}$$
$$-2\cdot e^{-1,5}\cdot 2+b=6\cdot e^{-1,5}$$
$$b=10\cdot e^{-1,5}$$

$$\Rightarrow\; t(x)=-2\cdot e^{-1,5}\cdot x+10\cdot e^{-1,5}$$

Abweichung

$$f_2(1)=(1+2)\cdot e^{-0,5}=3\cdot e^{-0,5}$$
$$t(1)=-2\cdot e^{-1,5}+10\cdot e^{-1,5}=8\cdot e^{-1,5}$$

$$\frac{8\cdot e^{-1,5}}{3\cdot e^{-0,5}}=\frac{8}{3}\cdot e^{-1,5-(-0,5)}=\frac{8}{3}\cdot e^{-1}=\frac{8}{3e}\approx 0,981>0,98$$

Die Abweichung beträgt etwa 1,9 %.

g)

Es gilt: $f_{0,65}(x)=(x^2+0,65)\cdot e^{0,5-x}$.

Ich lasse mir den Graphen dieser Funktion zeichnen mit dem GRAPH-Programm des GTR. Dann bestimme ich mit dem MAX-Programm den Hochpunkt: HP (1,59 / 1,07). Dies ist die erste der gesuchten Stellen. Nun kontrollieren wir noch die Ränder: der Punkt am linken Rand hat die Koodinaten L (0/ 1,07) und R (3/0,79). Damit haben wir die beiden Stellen: bei x=0 und bei x=1,59.

h)

Mit dieser Funktion kann man das Volumen der Vase (als Rotationskörper) berechnen. Dabei ist das obere Ende der Vase mit x = 3 fest. Die untere Grenze varriiert. Der Wert t gibt die Entfernung von 3 an, in der mit der Integration begonnen wird.

i)

Die Höhe der Vase beträgt 3 dm bzw. 30 cm, da die in Bezug auf die x-Achse (von x = 0 bis x = 3) zurückgelegte Entfernung dieser entspricht.

Die Vase hat auf jeder Höhe einen kreisförmigen Querschnitt (der durch die Rotation eines Funktionswerts von $f_{0,65}$ um die x-Achse entsteht). Der größte Radius, der dabei erreicht wird, sind die 1,07 dm = 10,7 cm, die in Aufgabenteil g bestimmt wurden. Der Karton muss so beschaffen sein, dass zumindest ein Kreis mit dem Radius r = 10,7 cm hineinpasst.

Das bedeutet, dass beim regelmäßigen Sechseck der Inkreis einen Radius von 10,7 cm haben muss. Beim Inkreis werden nämlich alle Seiten einmal berührt. Der Inkreisradius entspricht dem größten Radius der Vase.

Die entsprechenden Formeln sind in der Aufgabenstellung angegeben. Daher rechnen wir:

Zunächst drücken wir die Seitenlänge des Sechsecks mit Hilfe seines Inkreisradius aus:

$$r_i=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot a \quad \Rightarrow \quad \frac{r_i\cdot 2}{\sqrt{3}}=a$$

Das bedeutet für den Flächeninhalt:

$$A=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot a^2=\frac{3\cdot\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{r_i^2\cdot 4}{3}=r_i^2\cdot\sqrt{3}\cdot 2$$

Bei unserem Karton bedeutet das:

$$A=10,7^2\cdot\sqrt{3}\cdot 2=396,6\,cm^2$$
$$V=A\cdot h=396,6\cdot 3=1189,8\,cm^3$$

Aufgabe 6

a)

Symmetrie

$$-h(x)=h(-x)$$
$$-\left(-\frac{1}{2}x^{-3}\right)=-\frac{1}{2}(-x)^{-3}$$
$$-\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}\right)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(-x)^3}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}=-\frac{1}{2}\cdot(-1)\cdot\frac{1}{x^3}$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}$$

Ergebnis: Die Funktion h ist symmetrisch zum Koordinatenursprung.

Fernverhalten

$$\lim_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^3}\right)=0$$

Zahl a

Es ist zu zeigen, dass keine Funktion der Funktionsschar 0 als Grenzwert nach rechts hat.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{a}x^3+3x^2+5x+2a\right)=\infty \qquad \textit{für } a>0$$
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{a}x^3+3x^2+5x+2a\right)=-\infty \qquad \textit{für } a<0$$

Damit ist die Behauptung gezeigt, da der Wert 0 nicht als Grenzwert auftaucht.

b)

Tangente

$$h(x)=-\frac{1}{2}\cdot x^{-3}=-\frac{1}{2x^3}$$
$$h(-1)=-\frac{1}{-2}=0{,}5 \quad \Rightarrow P(-1/0{,}5)$$
$$h'(x)=-\frac{1}{2}\cdot(-3)\cdot x^{-4}=1{,}5x^{-4}=\frac{1{,}5}{x^4}$$
$$h'(-1)=\frac{1{,}5}{1}=1{,}5$$
$$\Rightarrow\ t(x)=1{,}5x+b$$

$$P(-1/0{,}5)\,auf\,t \ \Rightarrow \quad t(-1)=0{,}5$$
$$1{,}5\cdot(-1)+b=0{,}5$$
$$-1{,}5+b=0{,}5$$
$$b=2$$
$$\Rightarrow\ t(x)=1{,}5x+2$$

Schnittpunkte mit den Achsen

$$t(x) = 1{,}5x + 2$$

$y-Achse$

$t(0) = 2$

$S_y(0/2)$

$x-Achse$

$1{,}5x + 2 = 0$

$1{,}5x = -2$

$x = -\frac{4}{3}$

$N(-\frac{4}{3}/0)$

Fläche des Dreiecks

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} FE$$

c)

Notwendige Bedingung

$h'(x) = 0$

$\frac{1{,}5}{x^4} = 0 \qquad | \; mal \;\; x^4$

$1{,}5 = 0$

Die notwendige Bedingung führt zu einer Gleichung, die keine Lösung hat. Damit ist klar, es kann keine Extremstellen geben.

d)

$f_2(x) = 0{,}5x^3 + 3x^2 + 5x + 4$

$f_2'(x) = 1{,}5x^2 + 6x + 5$

$1{,}5x^2 + 6x + 5 = 1{,}5$

$1{,}5x^2 + 6x + 3{,}5 = 0$

$x^2 + 4x + \frac{7}{3} = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4 - \frac{7}{3}} = -2 \pm \sqrt{\frac{5}{3}}$

$x_1 = -3{,}29 \qquad\qquad x_2 = -0{,}71$

$f_2(-3{,}29) = 2{,}22 \qquad\qquad f_2(-0{,}71) = 1{,}78$

Es handelt sich um die Punkte P (-3,29 / 2,22) und Q (-0,71 / 1,78).

e)

Erste Ableitung

$$f_a(x)=\frac{1}{a}x^3+3x^2+5x+2a$$
$$f_a{}'(x)=\frac{3}{a}x^2+6x+5$$

Nullstellen der ersten Ableitung

$$\frac{3}{a}x^2+6x+5=0 \qquad | \; mal \;\; \frac{a}{3}$$
$$x^2+2ax+\frac{5}{3}a=0$$
$$x=-a\pm\sqrt{a^2-\frac{5}{3}a}$$

Ein einziger Wert ergibt sich, wenn der Term unter der Wurzel gleich 0 ist.

$$a^2-\frac{5}{3}a=0 \qquad | \; durch \;\; a \;\; (a\neq 0)$$
$$a-\frac{5}{3}=0$$
$$a=\frac{5}{3}$$

Sattelpunkt

Man müsste überprüfen, ob die erste Ableitung vor und hinter der einen Stelle mit waagerechter Tangente dasselbe Vorzeichen hat. Diese eine Stelle ist $x=-a=-\frac{5}{3}$
Ein Sattelpunkt liegt vor, wenn es dasselbe Vorzeichen ist.

f)

Punkte P_1 und P_2

$$f_2(-4)=0{,}5\cdot(-4)^3+3\cdot(-4^2)+5\cdot(-4)+4=0$$
$$h(-4)=-0{,}5\cdot\frac{1}{(-4)^3}=0{,}0078\approx 0$$
$$f_2(-0{,}64)=0{,}5\cdot(-0{,}64)^3+3\cdot(-0{,}64)^2+5\cdot(-0{,}64)+4\approx 1{,}897\approx 1{,}9$$
$$h(-0{,}64)=-0{,}5\cdot\frac{1}{(-0{,}64)^3}\approx 1{,}907\approx 1{,}9$$

Damit steht fest, dass die Grenze ganz links bei P_1 und die Grenze ganz rechts bei P_2 liegt.

Hochpunkt von f_2

$$f_2(x)=0{,}5x^3+3x^2+5x+4$$
$$f_2'(x)=1{,}5x^2+6x+5$$
$$f_2''(x)=3x+6$$

Notwendige Bedingung:

$$1{,}5x^2+6x+5=0$$
$$x^2+4x+\frac{10}{3}=0$$
$$x=-2\pm\sqrt{4-\frac{10}{3}}=-2\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$x_1=-1{,}18 \qquad x_2=-2{,}82$$

Hinreichende Bedingung

$$f_2''(-1{,}18)=2{,}46 \quad TP$$
$$f_2''(-2{,}82)=-2{,}46 \quad HP$$

y-Werte:

$$f_2(-1{,}18)=1{,}46$$
$$f_2(-2{,}82)=2{,}54$$

Ausdehnung in Richtung der x-Achse:

von -4 bis – 0,64: Länge 3,36 m

Ausdehnung in Richtung der y-Achse:

am weitesten unten gelegener Punkt P_1 (-4/0), y-Wert: 0
am weitesten oben gelegener Punkt HP (-2,82 / 2,54), y-Wert: 2,54
Die Ränder sind P_1 und P_2, ihre y-Werte sind kleiner.
von 0 bis 2,54: Breite 2,54 m

Maße der Plane: 3,36 m mal 2,54 m

g)

$$A=\int_{-3}^{-2} f_2(x)-h(x)\,dx$$
$$A=\int_{-3}^{-2} 0{,}5x^3+3x^2+5x+4-(-0{,}5)x^{-3}\,dx$$
$$A=\int_{-3}^{-2} 0{,}5x^3+3x^2+5x+4+0{,}5x^{-3}\,dx$$
$$A=\left|0{,}125x^4+x^3+2{,}5x^2+4x-0{,}25x^{-2}\right|_{-3}^{-2}$$
$$A=2-8+10-8-0{,}0625-(10{,}125-27+22{,}5-12-0{,}028)$$
$$A=-4{,}0625\pm 6{,}403=2{,}3405\,m^2$$

h)

Allgemeine Gleichung: $p(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$

Wegen der Symmetrie zur y-Achse gilt b=d=0. Also:

$$p(x)=ax^4+cx^2+e$$

In der Mitte ist die Brücke 0,5 m hoch. Zu x = 0 gehört daher der y-Wert 0,5.

Also: $p(x)=ax^4+cx^2+0{,}5$

$p'(x)=4ax^3+2cx$

Die Brücke hat eine Spannweite von 4 Metern. Sie ist symmetrisch zur y-Achse, der Anfang liegt also bei $x=-2$, das Ende bei $x=2$.
Die x-Achse legen wir intelligenterweise so, dass $p(-2) = p(2) = 0$ gilt.
Der Steigungswinkel beträgt 45 Grad. Es gilt aber $\tan(45°) = 1$.
Es gilt: $p'(-2) = \tan(45°) = 1$

$p(-2) = 0$. D. h.: $16a + 4c + 0{,}5 = 0$
$p'(-2) = 1$. D. h.: $-32a - 4c = 1$

Wir formen die zweite Gleichung um:
$-4c = 1 + 32a$
$c = -0{,}25 - 8a$

Diesen Ausdruck setzen wir in die erste Gleichung ein:
$16a + 4(-0{,}25 - 8a) + 0{,}5 = 0$
$16a - 1 - 32a + 0{,}5 = 0$
$-16a - 0{,}5 = 0$
$-16a = 0{,}5$
$a = -1/32$

Damit bestimmen wir c:
$c = -0{,}25 - 8$ mal $-1/32$
$c = -0{,}25 + 0{,}25 = 0$

Ergebnis: $p(x)=-\frac{1}{32}x^4+\frac{1}{2}$

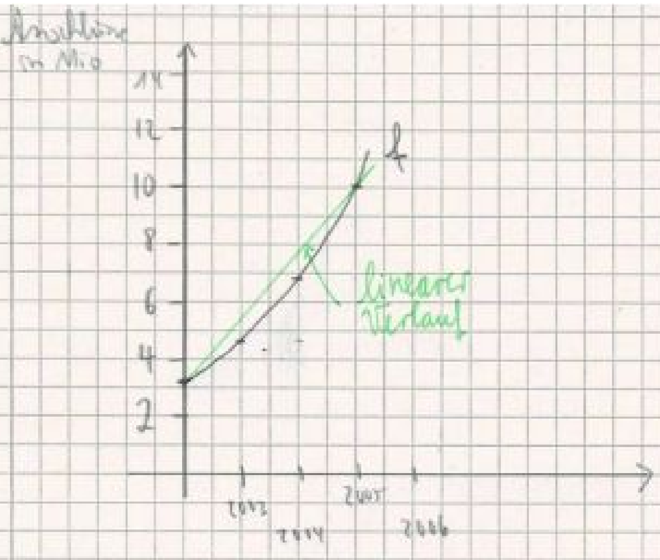
Aufgabe 7

3)a) $f(x) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot x}$

$f(0) = 3{,}3$ 2002
$f(1) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37} = 4{,}78$ 2003
$f(2) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot 2} = 6{,}92$ 2004
$f(3) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot 3} = 10{,}01$ 2005

$\Rightarrow$ Werte von 2002 und 2005 stimmen fast genau überein

7



Gleichung des linearen Verlaufs:

$P_1(0|3,3)$

$P_2(3|10)$

$g(x) = mx + b$

$m = \frac{10-3,3}{3-0} = \frac{6,7}{3}$

Achsenabschnitt: 3,3

$\Rightarrow g(x) = \frac{67}{33}x + 3,3$

b)

$f(x) = 3,3 \cdot e^{0,37x}$

$= 3,3 \cdot (e^{0,37})^x$

$= 3,3 \cdot 1,45^x$

$\Rightarrow$ Wachstumsfaktor 1,45

prozentuale Zunahme pro Jahr 45 %

Verdopplungszeit:

$$3{,}3 \cdot e^{0{,}37x} = 6{,}6$$
$$e^{0{,}37x} = 2 \quad | \ln$$
$$0{,}37x = \ln(2)$$
$$x = \frac{\ln(2)}{0{,}37} \approx 1{,}87$$

Die Verdopplungszeit liegt bei 1,87 Jahren

c)

$$30 = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37x} \quad | :3{,}3$$
$$\frac{100}{11} = e^{0{,}37x} \quad | \ln$$
$$\ln\left(\frac{100}{11}\right) = 0{,}37x \quad | :0{,}37$$
$$\frac{\ln\left(\frac{100}{11}\right)}{0{,}37} = x$$
$$5{,}966 \approx x$$

Es handelt sich um $5{,}966 \approx 6$ Jahre

Die Funktion läuft nach rechts immer schneller gegen ∞ und es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$. Beides ist unrealistisch.

Es können nicht mehr als 40 Mio. Personen einen Anschluss haben und das Wachstum müsste irgendwann anfangen abzunehmen.

d) Ende 2005 nach der Statistik: 10 Mio

$35-(35-a) = 10$
$35-35+a = 10$
$a = 10$

$\Rightarrow h(x) := 35 - 25 \cdot e^{-0,13x}$

$\lim\limits_{x \to \infty} h(x) = 35$

$\Rightarrow$ 5 Millionen Haushalte (40−35) bleiben ohne Anschluss

Warum passt diese Funktion besser?
- Die Funktionswerte nähern sich einem endlichen Grenzwert an (statt $+\infty$)
- Das Wachstum nimmt ab, während es sich dem Wert 35 annähert (allerdings nimmt es ständig ab → am Anfang müsste es wachsen, um dann zu schrumpfen)
- Dass ein Teil der Haushalte ohne Anschluss bleibt ist realistisch

e) 2002: $x = 0$ $\quad g(0) = \frac{105}{3+32 \cdot e^{0}} = 3$
2005: $x = 3$
2010: $x = 8$ $\quad g(3) = 10,35$
$g(8) = 29,28$

Vorhersage für 2010: 29,28 Mio

$$\frac{105}{3+32\cdot e^{-0{,}1x}} = \frac{3\cdot 35}{3\cdot\left(1+\frac{32}{3}\cdot e^{-0{,}1x}\right)} = \frac{35}{1+\frac{32}{3}\cdot e^{-0{,}1x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 35$$

⇒ Wieder ergibt sich eine Grenze von 35 Millionen Anschlüssen. 4,5 Mio. Haushalte bleiben ohne Anschluss

f) Max $(4{,}75 / 4{,}4)$

Es handelt sich um den Wendepunkt des Graphen. Während das Wachstum von g vorher immer schneller wurde beginnt es nun zurückzugehen.

Rechenweg:

N.B.: $g''(x) = 0$

H.B.: $g''(x) = 0$ und $g'''(x) \neq 0$

Ränder