Aufgaben
Teil A (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen bzw. Funktionsscharen

a) $f(x)=2x^2-8x+6$

b) $f(x)=x^3-6x^2-7x$

c) $f(x)=(8x-16)\cdot e^{-0,6x}$

d) $f_a(x)=x^3-ax^2$

e) $f(x)=(x^4-5x^2+4)\cdot e^{-4x}$

f) $f_a(x)=x^2-2x+a$

g) $f(x)=e^{2x}-1$

h) $f_a(x)=x^3-2ax$

Aufgabe 2

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
I. $x + y + 2z = 7$
II. $2x - y + z = 2$
III. $2x + 2y - z = 4$

b)
I. $x + y + z = 9$
II. $2x + 3y - 2z = 9$
III. $-x + 2y + 2z = 9$

Aufgabe 3

a) Berechne das folgende Integral: $\int_0^2 3x^2+2x\,dx$

b) Berechne a: $\int_0^a 2x+1\,dx=30$

c) Berechne a: $\int_a^{3a} 2x+1\,dx=14$

d) Berechne das folgende Integral in Abhängigkeit von a: $\int_0^2 3x^2+ax\,dx$

e) Bestimme zwei verschiedene Stammfunktionen von $f(x)=4x^3+6x^2+6x$

f) Bestimme diejenige Stammfunktion F(x) von $f(x)=6x^2+4x$, für die F (1) = 1 gilt.

g) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)=4\cdot e^{2x}$.

h) Zeige, dass $F(x)=(2x+5)\cdot e^{3x}$ eine Stammfunktion von $f(x)=(6x+17)\cdot e^{3x}$ ist.

i) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=(4x^2+3x+1)\cdot e^{2x}$.

j) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=x\cdot e^x+4x^2$

k) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=x^2\cdot\sin(x^2)$

l) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=(x^2+1)\cdot e^{x^2+4x}$

m) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=2e^{-x}+2e^x$

n) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=\sqrt{2x^2+5}$

o) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=\frac{x+1}{x^2}$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x)=x^2+ax+4$.

a) Bestimme den Wert, den man für a einsetzen muss, damit x = 6 eine Nullstelle der Funktion ist.

b) Bestimme die Koordinaten des Extrempunktes von f_a in Abhängigkeit von a.

c) Untersuche, ob es Punkte gibt, die auf allen Funktionen der Funktionsschar liegen.

d) Bestimme die Werte von a, für die gilt: P(a / 3a²) liegt auf dem Graphen von f_a

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktionsschar $f_{a,b}(x)=ax^2-bx$ mit zwei voneinander unabhängigen Parametern a und b. Bestimme die Nullstellen in Abhängigkeit von a und b.

Aufgabe 6

Bestimme x:

a) $\log_2(8)=x$

b) $\log_x(49)=2$

c) $\log_3(x)=3$

d) $3^x=81$

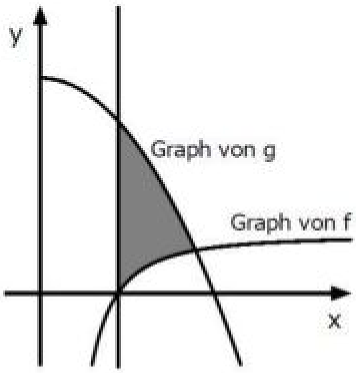
e) $\frac{18}{x^2}=2$

Aufgabe 7

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x)=4-\frac{4}{x^2}$ und g mit $g(x)=15-3x^2$, x >0, sowie die Gerade mit der Gleichung x = 1.

a) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g an der Stelle $x_0=2$ schneiden.

b) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.

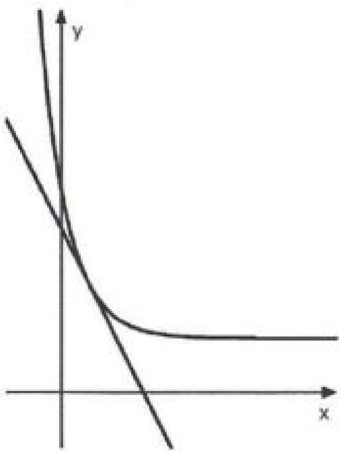


Aufgabe 8

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x)=e^{-2x+1}+1$. Die Abbildung zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x=\frac{1}{2}$.

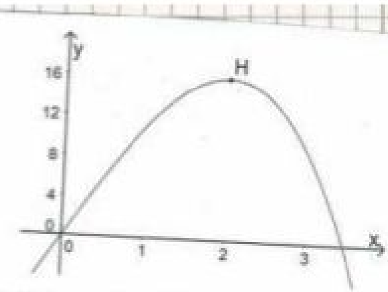
a) Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Steigung -2 hat.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.



Aufgabe 9

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.



a) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen für $0 \le x \le 2$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

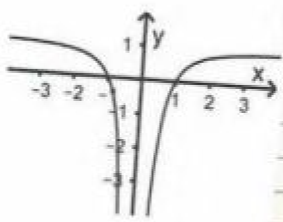
b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen für $0 \le x \le 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y-Achse.

Aufgabe 10

Gegeben ist die in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ definierte Funktion

$f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$,

die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.



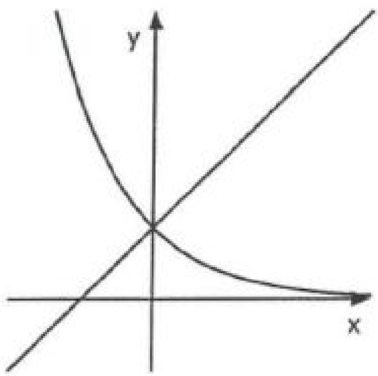
a Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

b Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Aufgabe 11

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$, deren Schnittpunkt auf der y-Achse liegt.

Die Graphen begrenzen mit der x-Achse und der Geraden x = u (u > 0) eine Fläche.
Diese Fläche wird von der y-Achse in zwei inhaltsgleiche Teilflächen geteilt.
Berechnen Sie den Wert von u.



Aufgabe 12

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x\right) dx$

Aufgabe 13

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktionen f_k mit
$f_k(x) = x^4 + (2-k) \cdot x^3 - k \cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

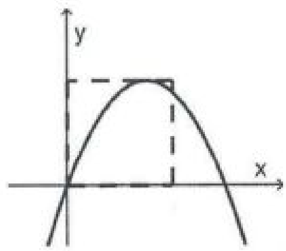
b) Es gibt einen Wert von k, für den $x_W = 1$ eine Wendestelle von f_k ist. Berechnen Sie diesen Wert von k.

Aufgabe 14

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^2 + 2ax$, $a \in \left]1; +\infty\right[$.
Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein. Bestimmen Sie den Wert von a.



Aufgabe 15

Für jedes $a \neq 0$ ist eine Funktion f_a gegeben durch

$$f_a(x) = \frac{a \cdot e^x}{\left(1+e^x\right)^2}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

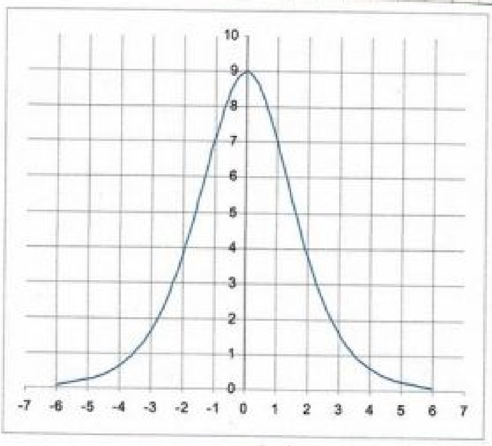
Die nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen einer Funktion f_a.

a) Bestimmen Sie den Zahlenwert des zugehörigen Parameters a.

b) Gegeben ist die Funktion g mit $g(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der Graphen von f_{36} und g.

Für welche Werte von a hat der Graph von f_a mit dem Graphen der Funktion g einen Punkt gemeinsam? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie diesen Punkt an.



Aufgaben
Teil B (mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1

Aufgabe 1.2: Dachformen

Auf dem Foto sehen Sie einen Teil des Daches eines Berliner Veranstaltungsortes.
Das Dach ist aus mehreren gleichartigen Dachelementen zusammengesetzt.
Für ein anderes Gebäude wird ein ähnliches Dach geplant. Die äußere Kante des geplanten Dachelementes lässt sich im Intervall $[0;2]$ annähernd durch die Funktion f mit $f(x)=(x^2-2x+1)\cdot e^{-x}$ beschreiben, $1\,\text{LE}=10\text{ m}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.
Ermitteln Sie Art und Lage aller Extrempunkte des Graphen von f.
[Zur Kontrolle: $f'(x)=(-x^2+4x-3)\cdot e^{-x}$]

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im oben angegebenen Intervall.

c) Im Intervall $[0;2]$ gibt es eine Stelle x_P, an der der Graph von f die maximale positive Steigung hat.
Bestimmen Sie den Wert von x_P und die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle.
Hinweis: Es genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

d) Für eine Veranstaltung soll unter einem Dachelement eine Trennwand errichtet werden. Diese Trennwand wird im Intervall $[0;1]$ durch den Funktionsgraphen und die x-Achse begrenzt.
Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x)=(-x^2-1)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Trennwand, $1\,\text{LE}=10\text{ m}$.

e) Es wird vorgeschlagen, statt der Trennwand eine kleinere Wand zu verwenden, die begrenzt ist durch die Koordinatenachsen und die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R(0\,|\,1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Tangente.
Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Wandfläche durch den Vorschlag eingespart werden.

f) Der Graph einer quadratischen Funktion p soll in den Punkten $R(0|1)$ und $S(1|0)$ tangential zum Graphen von f verlaufen.
Geben Sie vier Bedingungen an, die p erfüllen muss und untersuchen Sie, ob es eine solche Funktion p gibt.

Aufgabe 2

Der Verlauf des Tiexonas-Flusses kann beschrieben werden mit der Funktion $f(x) = 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ mit $-5 \leq x \leq 2$. Dabei steht eine Längeneinheit für 100 m.
Die x-Achse stellt eine von West nach Ost verlaufende Straße (Autobahn 1) und die y-Achse eine von Süd nach Nord verlaufende Straße (Autobahn 2) dar.

a) Berechne die Koordinaten aller Punkte, wo die Straßen den Tiexonas überqueren.

b) Bestimme rechnerisch die Koordinaten des am weitesten südlich und die Koordinaten des am weitesten nördlich gelegenen Punktes des Flusslaufs.

c) Bestimme rechnerisch den Bereich, in dem sich der Flusslauf nach rechts krümmt.

d) Bestimme rechnerisch die Größe der Fläche zwischen dem Fluss und den beiden Straßen.

e) Gegeben sind die Geraden g mit y = 1 und h mit y = a mit $1 \leqslant a \leqslant 2$ (die jeweils parallel zur y-Achse verlaufen)

Die Geraden g, h, der Fluss und Autobahn 1 schließen eine Fläche ein.
Bestimme rechnerisch den Wert von a, für den diese Fläche eine Größe von 1 ha hat.

f) Vom Punkt A (−3 / f(−3)) aus führt ein Wasserkanal Wasser aus dem Tiexonas nach Nordosten. Der Kanal kann mit Hilfe der Tangente an f durch den Punkt A beschrieben werden.

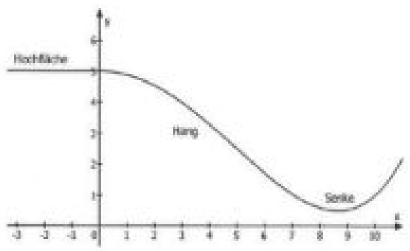
(I) Bestimme eine Gleichung, die den Verlauf des Kanals beschreibt

(II) Gib die Koordinaten des Punktes an, wo Autobahn 2 den Kanal überquert

(III) Der Wasserkanal und der Fluss schließen eine Fläche ein. Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt dieser Fläche.

Aufgabe 3

Das Gelände eines Abenteuerspielplatzes besteht aus einer Hochfläche, an die sich ein Hang mit einer Senke anschließt. Die Profillinie des Geländes wir für $-3 \leq x \leq 0$ durch die Gerade mit der Gleichung $y = 5$ und für $0 \leq x \leq 11$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}0008x^4 - 0{,}12x^2 + 5$ beschrieben. Die Abbildung zeit diese Profillinie. (1 LE entspricht 1m)



a) Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Profillinie. (2 VP)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle x = 5 am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat. (2 VP)

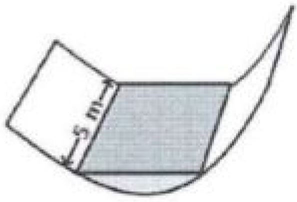
Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist. (1 VP)
(Teilergebnis: Der tiefste Punkt hat die y-Koordinate 0,5)

b) Zwischen zwei Befestigungspunkten, die im Modell durch P(5|f(5)) und Q(10|f(10)) dargestellt werden, wird ein Seil straff gespannt.
Berechnen Sie die Länge des Seils. (1,5 VP)

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann. (2 VP)

c) Auf der Hochfläche, einen Meter vom Übergang zum Hang entfernt, steht ein vertikaler Lichtmast, von dem aus das gesamte Gelände ausgeleuchtet werden kann. Berechnen Sie die Mindestlänge dieses Lichtmasts. (2,5 VP)

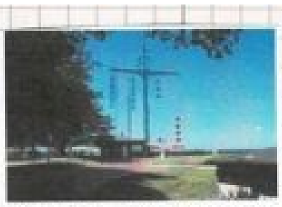
d) Bei einem Umbau soll die Senke auf 5m Länge so mit Sand aufgefüllt werden, dass eine horizontale rechteckige Fläche entsteht, die 0,5m oberhalb des tiefsten Punktes der Senke liegt.
Berechnen Sie das Volumen des dafür benötigten Sandes. (3,5 VP)



Aufgabe 4

Hochwasser

Auf der Höhe von Bremerhaven erzeugt der Tidenverlauf (Zyklus von Ebbe und Flut) in Verbindung mit den vorherrschenden Winden unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten der Weser. Vom Wasser- und Schifffahrtsamt Bremerhaven wurden zu unterschiedlichen Zeitpunkten die Fließgeschwindigkeiten der Weser in $\frac{m^3}{s}$ [Kubikmeter pro Sekunde] gemessen.



Wasserstandsanzeiger Bremerhaven

a) Die Weser hatte zu Beginn der Messung eine Fließgeschwindigkeit von $6600\frac{m^3}{s}$. Eine Stunde nach Beginn der Messung stieg die Fließgeschwindigkeit auf ihren höchsten Wert von $9000\frac{m^3}{s}$ an.
Drei Stunden nach Beginn der Messung hatte die Weser wieder die Fließgeschwindigkeit erreicht, die sie zu Beginn der Messung hatte.
Das Wasser- und Schifffahrtsamt möchte die Fließgeschwindigkeit der Weser auf der Höhe von Bremerhaven mit Hilfe der beschriebenen Messergebnisse näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit x, wobei x die Zeit in Stunden nach Beginn der Messung und $f(x)$ die Fließgeschwindigkeit in $\frac{m^3}{s}$ zum Zeitpunkt x angibt.

Messungen an anderen Tagen bei gleichen Tidenverhältnissen aber unterschiedlichen Winden zeigten, dass sich die Fließgeschwindigkeiten der Weser durch die Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = 600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600,\ 0 \le x \le 3$$

und $k \in [3550;\ 3600]$ beschreiben lassen.

Die Aufgabenteile b) bis e) sollen stets in Abhängigkeit von k gelöst werden.

b) Berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit der Weser sowohl zwei als auch drei Stunden nach Beginn der Messung.
Bestimmen Sie an diesen Punkten jeweils den größten und kleinsten Wert der Fließgeschwindigkeit, der aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

c) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt von f_k bei $x_W = \frac{k}{1800}$ liegt und dass die Fließgeschwindigkeit zu dieser Zeit $-\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600\ \frac{m^3}{s}$ beträgt. Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Fließgeschwindigkeit.

d) – gestrichen -

e) Geben Sie die Funktion g_k an, welche die Fließgeschwindigkeit in „m^3 pro Stunde" statt in „m^3 pro Sekunde" beschreiben.

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 + a) \cdot e^{0,5-x}; a \in \mathbb{R}$.
Die Graphen der Schar sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

b) Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen G_a mit der y-Achse an.
In der Abbildung 1 sind für ganzzahlige Parameterwerte a zwei Graphen der Funktionenschar f_a dargestellt.
Ermitteln Sie die Parameterwerte und beschriften Sie die Graphen.

c) Die Graphen G_2 und G_0, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt A dieser Fläche.

d) Weisen Sie nach, dass die Graphen G_a der Funktionenschar f_a für $a > 1$ keine Extrempunkte besitzen.
[Zur Kontrolle: $f_a'(x) = (-x^2 + 2x - a) \cdot e^{0,5-x}$]

e) Weisen Sie nach, dass gilt: $f_2''(x) = (x-2)^2 e^{0,5-x}$.
Erläutern Sie, welche Schlussfolgerungen daraus über den Verlauf des Graphen G_2 gezogen werden können.

f) Der Graph G_2 verläuft im Intervall $[1;3]$ annähernd geradlinig und kann vereinfacht durch die Tangente t an diesen Graphen in $x = 2$ dargestellt werden.
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t.
[Zur Kontrolle: $t(x) = -2 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 10 \cdot e^{-1,5}$]
Zeigen Sie, dass der Funktionswert der Tangente t an der Stelle $x = 1$ um weniger als 2 % vom Funktionswert von f_2 an dieser Stelle abweicht.

Der Graph $G_{0,65}$ der Funktion $f_{0,65}$ schließt über dem Intervall $[0;3]$ mit der x-Achse eine Fläche ein (siehe Abbildung 2).
Durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper, der modellhaft einer auf der Seite liegenden und nach links geöffneten Vase entspricht. Es gilt: $1\,\text{LE} = 1\,\text{dm}$.

g) Die Vase nimmt an zwei verschiedenen Stellen einen maximalen Radius von ca. 1,07 dm an. Bestimmen Sie diese beiden Stellen.

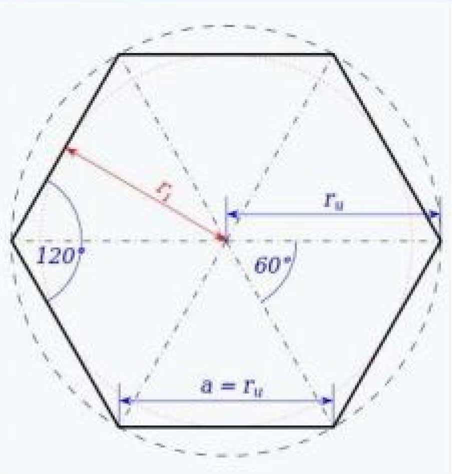
h) Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion $b(t) = \pi \cdot \int_{3-t}^{3} ((f_{0,65}(x))^2\,dx$.

i) Die Vase soll stehend in einem Karton verpackt werden, der die Form eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas besitzt. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem maximalen Radius der Vase und der Grundfläche des Kartons mit Hilfe einer Skizze und einer Gleichung dar.
Ermitteln Sie, welches Volumen (in cm³) dieser Karton mindestens haben muss.

Hinweis

Für ein Sechseck gelten die nachfolgenden Formeln:

Mathematische Formeln zum regelmäßigen Sechseck	
Flächeninhalt	$A = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot a^2 \approx 2{,}598 \cdot a^2$
	$A = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot r_i^2 \approx 3{,}464 \cdot r_i^2$
Länge der **Diagonalen**	$d_2 = 2 \cdot r_i = \sqrt{3} \cdot a \approx 1{,}732 \cdot a$
	$d_3 = 2 \cdot r_u = 2 \cdot a$
Inkreisradius oder halbe **Schlüsselweite**	$r_i = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a \approx 0{,}866 \cdot a$
Umkreisradius	$r_u = a$
Innenwinkel	$\alpha = 120°$



Anlage zu 1.1: Vase

Abbildung 1

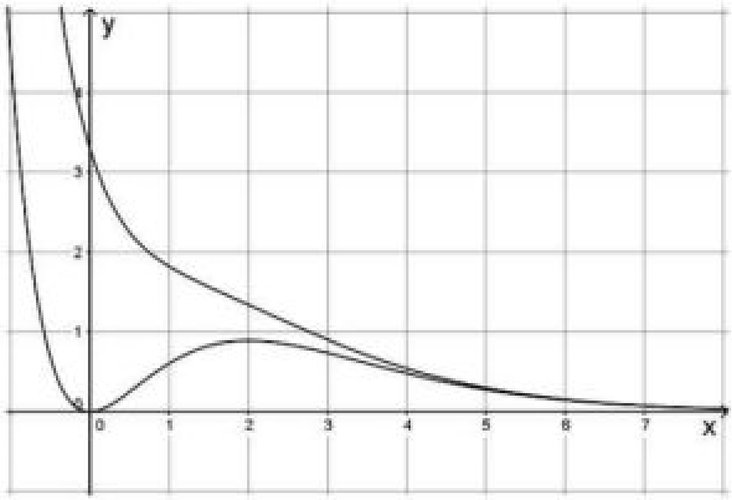
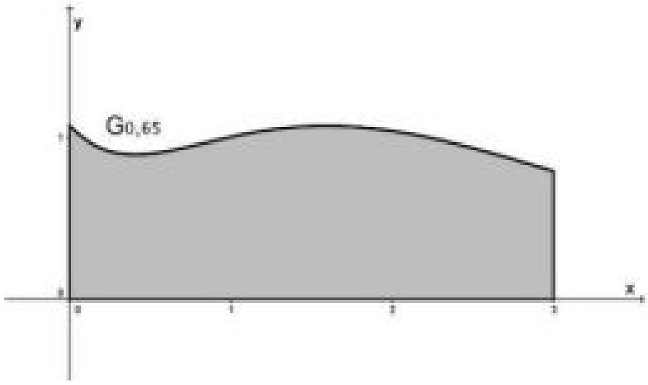


Abbildung 2



Aufgabe 6

Gegeben sind die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 + 3x^2 + 5x + 2a$; $x \in IR$, $a \in IR$, $a \neq 0$

und die Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-3}$; $x \in IR$, $x \neq 0$.

Die zugehörigen Graphen sind G_a und K.

a) Geben Sie die für den Graphen K vorliegende Symmetrie an und begründen Sie diese.
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$.
Begründen Sie, dass es keine reelle Zahl a gibt, so dass gilt: $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} f_a(x)$.

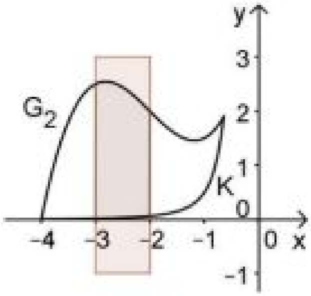
b) Die Tangente an K im Punkt $P(-1 \mid h(-1))$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Begründen Sie, dass der Graph K keine lokalen Extrempunkte besitzt.

d) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte auf dem Graphen G_2 gibt, in denen Tangenten mit dem gleichen Anstieg $m = 1{,}5$ existieren.

e) Es gibt einen Wert des Parameters a, für den der Graph G_a genau einen Punkt mit waagerechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie diesen Parameterwert.
Erläutern Sie, wie Sie nachweisen könnten, dass der Graph G_a für diesen Parameterwert einen Sattelpunkt besitzt.

Ein Gartenbesitzer hat sich in einer Ecke seines Gartens einen Teich angelegt. Der Rand dieses Teiches an der Wasseroberfläche wird durch Teile der Graphen G_2 und K modelliert. Im Intervall $-3 \le x \le -2$ verläuft eine Brücke über den Teich, $1\text{ LE} = 1\text{ m}$.
In der nebenstehenden Darstellung sind die Teichoberfläche und die Brücke senkrecht von oben betrachtet dargestellt.



f) Zeigen Sie, dass die Punkte $P_1(-4 \mid 0)$ und $P_2(-0{,}64 \mid 1{,}9)$ bei entsprechender Rundung der y-Koordinaten auf den beiden zur Modellierung verwendeten Graphen liegen.
Der Gartenteich wird kurzzeitig durch eine rechteckige Plane abgedeckt. Die Seiten dieser Plane liegen parallel zu den Koordinatenachsen.
Berechnen Sie die Seitenlängen, die diese Plane mindestens haben muss.

g) Wenn genau senkrecht zur Teichoberfläche Licht auf den Gartenteich fällt, entsteht durch die Brücke ein Schatten, der zum Teil auf der Wasseroberfläche liegt. Berechnen Sie die Größe der Wasseroberfläche, die in diesem Fall im Schatten liegt.

h) Die über den Teich führende Brücke soll in einem neuen x-y-Koordinatensystem modelliert werden durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die symmetrisch zur y-Achse verläuft.
Die Brücke hat eine Spannweite von 4 Metern und ist in der Mitte 0,5 Meter hoch (über der x-Achse). An den beiden Enden hat die Brücke einen Steigungswinkel von 45° (bzw. – 45°).
Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel.

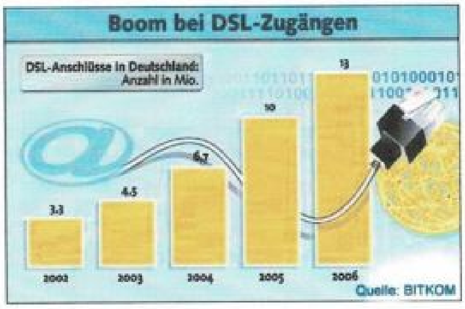
Aufgabe 7

DSL-Boom

In regelmäßigen Abständen werden neue Zahlen zu den DSL-Internet-Zugängen veröffentlicht. Die nebenstehende Grafik zeigt die Entwicklung vom Jahr 2002 bis zum Jahr 2006.

Quelle: BITKOM (Bundesverband der Informationswirtschaft, Telekommunikation und neue Medien)

Durch die Analyse der Daten eines zurückliegenden Zeitraums versucht man Vorhersagen für die Zukunft abzuleiten. Dazu werden mathematische Modelle entwickelt.



In einer ersten Modellannahme soll exponentielles Wachstum angenommen werden. Die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot x}$ beschreibt die Anzahl DSL-Anschlüsse in Millionen zum Zeitpunkt x in Jahren ($x = 0$ entspricht Ende 2002).

a) Zeigen Sie, dass die angenommene Funktion f für die Vorhersage der DSL-Anschlüsse der Jahre 2002 und 2005 eine gute Annäherung darstellt. Stellen Sie den Graf der Funktion f in einem geeigneten Koordinatensystem dar.
Ergänzen Sie in der Darstellung den Verlauf bei linearem Wachstum mit den Daten der Jahre 2002 und 2005. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $g(x)$ des linearen Wachstums.

b) Bestimmen Sie für die Modellannahme des exponentiellen Wachstums den Wachstumsfaktor und die prozentuale Zunahme der DSL-Anschlüsse pro Jahr.
Bestimmen Sie außerdem die Verdopplungszeit für die Zahl der DSL-Anschlüsse.

c) Bestimmen Sie, wann nach diesem Wachstumsmodell dreiviertel aller Haushalte in Deutschland einen DSL-Anschluss haben müssten, wenn von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten ausgegangen wird. Geben Sie die Umformungsschritte an, die auf die Lösung führen.
Begründen Sie, warum die weitere Entwicklung über einen längeren Zeitraum vermutlich mit der obigen Funktionsgleichung nicht vorhergesagt werden kann.

In einem anderen Modell wird angenommen, dass sich die zukünftige Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen besser beschreiben lässt durch eine Funktionsgleichung vom Typ

$$h(x) = 35 - (35 - a) \cdot e^{-0{,}13 \cdot x}.$$

x in Jahren ($x = 0$ entspricht hier Ende 2005), $h(x)$ in Millionen DSL-Anschlüsse.

Benutzen Sie diese Funktionsgleichung für die nachfolgenden Untersuchungen.

d) Bestimmen Sie mit der Anzahl der DSL-Anschlüsse am Ende des Jahres 2005 der obigen Statistik der BITKOM einen Wert für a in Mio. Anschlüssen.
Ermitteln Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} h(x)$ und beurteilen Sie, wie viele Haushalte nach diesem Modell langfristig ohne DSL-Anschluss verbleiben, wenn pro Haushalt immer nur ein DSL-Anschluss eingeplant wird. Gehen Sie dabei wieder von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten in Deutschland aus. Nennen Sie Gründe dafür, dass dieser Modellierungsansatz der Realität vermutlich näher kommen wird.

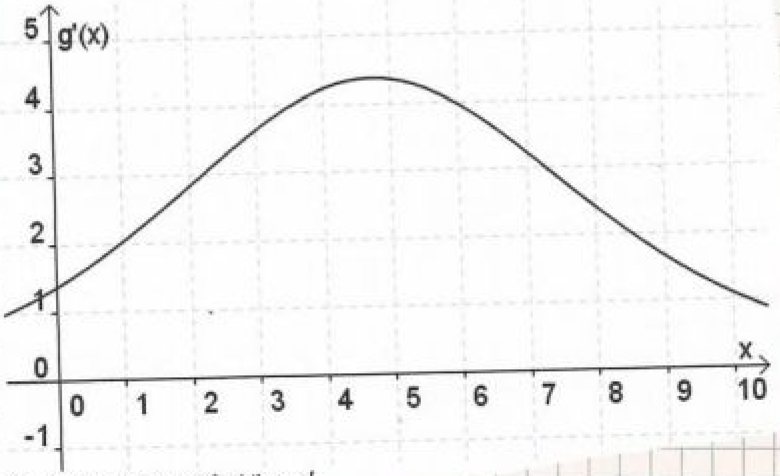
In einer 3. Modellannahme legen wir logistisches Wachstum mit der Funktionsgleichung

$$g(x) = \frac{105}{3 + 32 \cdot e^{-0{,}5 \cdot x}}$$

zugrunde. Sie erfasst die bisherigen DSL-Anschlüsse jeweils am Jahresende hinreichend gut. Wieder gilt: x in Jahren ($x = 0$ entspricht Ende 2002), $g(x)$ in Millionen DSL-Anschlüssen zum Zeitpunkt x. Benutzen Sie diese Gleichung für die nachfolgenden Untersuchungen.

e) Zeigen Sie, dass die Prognosefunktion g die Werte der vergangenen Jahre 2002 und 2005 relativ gut wiedergibt und berechnen Sie einen Vorhersagewert für 2010.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und erläutern Sie seine Bedeutung für eine langfristige Vorhersage. Gehen Sie dabei von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten in Deutschland aus.

f) Der nachfolgend angegebene Graph ist der Graph von g'.
Lesen Sie aus dem Graphen die Koordinaten des Maximums von g' näherungsweise ab.
Beschreiben Sie dessen Bedeutung bei der Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen und für den Graphen der Funktion g.
Beschreiben Sie den Lösungsweg zur genauen Berechnung des Maximums von g', wenn Ihnen keine Skizze vorliegt. Die Ausführung der Rechnung wird nicht erwartet.



Graph der Ableitungsfunktion g'