Lösungen

Teil A

Aufgabe 1

a) $3^2 = 9$ b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ c) $5^0 = 1$

d) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ e) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ f) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

g) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ h) $36^{0,5} = \sqrt{36} = 6$ i) 0^0 (nicht definiert)

j) $1^3 = 1$ k) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ l) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

m) $10^3 = 1000$ n) $(-1)^3 = -1$

o) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ p) $10^7 = 10.000.000$

Aufgabe 2

a) 2^0 gleich 1 b) $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$ kleiner als 1

c) $2^1 = 2$ größer als 1 d) $0,5^2 = 0,25$ kleiner als 1

e) $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ Die Wurzel einer Zahl, die größer ist als 1, muss selbst auch größer als 1 sein.

f) $8^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{8})^2}$ Die Wurzel einer Zahl, die größer ist als 1, muss selbst auch größer als 1 sein. Und das Quadrat davon ist auch mit Sicherheit größer als 1. Wenn ich 1 durch eine solche Zahl teile, so erhalte ich mit Sicherheit eine Zahl kleiner als 1. 1

Aufgabe 3

a)

Zahl 1: $3^0=1$ Zahl 2: $3^{-5}=\frac{1}{3^5}$ Zahl 3: $3^{-4}=\frac{1}{3^4}$

Zahl 4: $3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$ Zahl 5: $3^2=9$ Zahl 6: $\frac{1}{3}=3^{-1}$

Reihenfolge: Zahl 2, Zahl 3, Zahl 6, Zahl 1, Zahl 4, Zahl 5

b)

Zahl 1: $2^0=1$ Zahl 2: $2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$ Zahl 3: $2^4=16$

Zahl 4: $32=2^5$ Zahl 5: $0{,}25=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$ Zahl 6: $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}$

Reihenfolge: Zahl 2, Zahl 6, Zahl 5, Zahl 1, Zahl 3, Zahl 4

c)

Zahl 1: $100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$ Zahl 2: $0{,}25$ Zahl 3: $10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1$

Zahl 4: $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01$ Zahl 5: $\frac{1}{1000}=0{,}001$ Zahl 6: 0

Reihenfolge: Zahl 6, Zahl 5, Zahl 4, Zahl 3, Zahl 2, Zahl 1

Aufgabe 4

a) $3^4\cdot 3^5=3^{4+5}=3^9$

b) $2^3\cdot 2^{-4}=2^{3+(-4)}=2^{-1}$

c) $(3^4)^5=3^{4\cdot 5}=3^{20}$

d) $5^4\cdot 5^4\cdot 5^7=5^{4+4}\cdot 5^7=5^8\cdot 5^7=5^{8+7}=5^{15}$

e) $\frac{3^2\cdot 2^2}{6^{10}}=\frac{(3\cdot 2)^2}{6^{10}}=\frac{6^2}{6^{10}}=6^{2-10}=6^{-8}$

f) $x^6\cdot x^8=x^{6+8}=x^{14}$

g) $x^3\cdot x^4\cdot x^{-5}=x^{3+4}\cdot x^{-5}=x^7\cdot x^{-5}=x^{7-5}=x^2$

h) $\frac{x^3\cdot x^5}{x^2}=\frac{x^{3+5}}{x^2}=\frac{x^8}{x^2}=x^{8-2}=x^6$

i) $(12x^6):(-3x^3)=\frac{12x^6}{-3x^3}=\frac{12}{-3}\cdot\frac{x^6}{x^3}=-4\cdot x^{6-3}=-4x^3$

Aufgabe 5

a) $5^0=1$

b) $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$

c) $81^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{81^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{81}}=\frac{1}{9}$

d) $27^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{27})^2=3^2=9$

e) $\log_2(4)=2$, denn $2^2=4$

f) $\log_{10}(1000)=3$, denn $10^3=1000$

g) $\log_9(3)=\log_9(\sqrt{9})=\log_9(9^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$

h) $7^2=49$

i) $\log_2(-4)$ nicht lösbar (da in der Klammer eine negative Zahl steht)

j) $3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$

k) $\log_a(a^4)=4$

l) $17^1=17$

m) $\log_{\sqrt{2}}(4)=\log_{\sqrt{2}}((\sqrt{2})^4)=4$

Aufgabe 6

a) Wir rechnen alle Ausdrücke aus:

Zahl 1: 8 Zahl 2: $2^0=1$ Zahl 3: $\log_2(16)=4$ denn $2^4=16$

Zahl 4: $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$ Zahl 5 : 0

Daraus ergibt sich die folgende Reihenfolge:
Zahl 5 – Zahl 4 – Zahl 2 – Zahl 3 – Zahl 1

b) Wir rechnen alle Ausdrücke aus:

Zahl 1: $3^2=9$ Zahl 2: $3^{-1}=\frac{1}{3}$ Zahl 3: $\log_3(3)=1$ denn $3^1=3$

Zahl 4: $\sqrt[3]{27}=3$ Zahl 5: - 1

Daraus ergibt sich die folgende Reihenfolge:
Zahl 5 – Zahl 2 – Zahl 3 – Zahl 4 – Zahl 1

Aufgabe 7

a)

$$
\begin{aligned}
&2x^2+4x-16=0 \qquad |:2\\
&x^2+2x-8=0\\
&x=-1\pm\sqrt{1+8}\\
&x=-1\pm3\\
&x_1=-4 \qquad x_2=2
\end{aligned}
$$

j)

$$
\begin{aligned}
&x^2-25=0 \qquad |+25\\
&x^2=25 \qquad |\mathit{Quadratwurzel}\\
&x_1=5 \qquad x_2=-5
\end{aligned}
$$

b)

$$x^2-6x+4=4 \qquad |-4$$
$$x^2-6x=0$$
$$x\cdot(x-6)=0$$
$$x=0 \quad oder \quad x-6=0$$
$$x_1=0 \qquad x_2=6$$

c)

$$8x+10=26 \qquad |-10$$
$$8x=16 \qquad |:8$$
$$x=2$$

d)

$$\log_2(32)=x$$
$$\log_2(32)=5 \qquad denn\, 2^5=32$$
$$\Rightarrow x=5$$

e)

$$\log_2(x)=2 \Leftrightarrow x=2^2=4$$

f)

$$\log_x(81)=2 \Leftrightarrow x^2=81$$
$$x=9$$

i)

$$x^2-10x=0$$
$$x\cdot(x-10)=0$$
$$x=0 \quad oder \quad x-10=0$$
$$x_1=0 \qquad x_2=10$$

k)

$$x^2-4x-12=0$$
$$x=2\pm\sqrt{4+12}$$
$$x=2\pm\sqrt{16}$$
$$x=2\pm4$$
$$x_1=-2 \quad x_2=6$$

l)

$$x^3-4x^2=0$$
$$x^2\cdot(x-4)=0$$
$$x^2=0 \quad oder \quad x-4=0$$
$$x_1=0 \qquad x_2=4$$

m)

$$2\cdot3^x=18 \qquad |:2$$
$$3^x=9$$
$$x=\log_3(9)=2$$

n)

$$x\cdot2^3=48$$
$$x\cdot8=48 \qquad |:8$$
$$x=6$$

Aufgabe 8

Die Funktion $i(x)=2x+2$ ist eine lineare Funktion, ihr Graph muss einer Gerade sein. Von den vier Graphen ist nur der braune eine Gerade. Also gehören die Funktion i und der braune Graph zusammen.
Die Funktion $f(x)=x^2+2x+4$ ist eine quadratische Funktion, ihr Graph muss eine Parabel sein. Von den vier Graphen ist nur der orangene eine Parabel. Also gehören die Funktion f und der orangene Graph zusammen.
Die Funktionen $g(x)=2\cdot1{,}5^x$ und $h(x)=2\cdot0{,}8^x$ sind beides Exponentialfunktionen. Bei g ist der Wachstumsfaktor größer als 1, die Funktionswerte müssen nach rechts hin also wachsen. Bei h ist der Wachstumsfaktor zwischen 0 und 1, die Funktionswerte müssen nach rechts hin also schrumpfen. Nur der grüne Graph wächst nach rechts hin und zeigt den für eine Exponentialfunktion typischen Verlauf. Also gehören die Funktionen g und der grüne Graph zusammen. Am Ende müssen die Funktion h und der blaue Graph zusammengehören.

Aufgabe 9

Die Funktionen $f(x)=2\cdot 1{,}5^x$ und $g(x)=1{,}5^x$ sind beides Exponentialfunktionen, die beide einen Wachstumsfaktor größer als 1 haben. Die Graphen müssten sich also nach links hin der x-Achse annähern und nach rechts hin immer stärker wachsen. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei der Funktion f der Punkt S (0 / 2) und bei der Funktion g der Punkt T (0/1). Der violette Graph verläuft durch den Punkt S, gehört also zur Funktion f. Der graue Graph verläuft durch den Punkt T, gehört also zur Funktion g.
Die beiden Funktionen $h(x)=0{,}2x^2+x$ und $i(x)=-x^2+2$ sind beides quadratische Funktionen, deren Graphen Parabeln sind. Allerdings hat h einen positiven Vorfaktor (nämlich 0,2), der entsprechende Graph muss also nach oben geöffnet sein. Die Funktion i hat einen negativen Vorfaktor (die -1), der Graph muss nach unten geöffnet sein. Der braune und grüne Graph sind beides Parabeln, aber der braune ist nach oben geöffnet, der grüne nach unten. Also gehört die Funktion h zum grauen Graphen, die Funktion i zum grünen Graphen.

Aufgabe 10

x	0	1	2	4	
f(x)	20	40	80		1280

Wenn man oben einen Wert weitergeht, so wird unten mit 2 multipliziert. Es handelt sich also um eine Exponentialfunktion mit Wachstumsfaktor 2. Der Funktionswert bei x=0 beträgt 20. Dies ist der Anfangswert. Die Gleichung lautet $f(x)=20\cdot 2^x$

Nun rechnen wir den Funktionswert bei x = 4 aus:

$f(4)=20\cdot 2^4=20\cdot 16=320$

Nun bestimmen wir den x-Wert von y=1280:

$20\cdot 2^x=1280 \quad |:20$

$2^x=64$

$x=6$

Aufgabe 11

a)

Nullstellen

$x^2-6x+8=0$

$x=3\pm\sqrt{9-8}$

$x=3\pm 1$

$x_1=4 \quad x_2=2$

b)

Gib die Koordinaten des Schnittpunktes von f mit der y-Achse an.

f(0) = 8. Also: S_y (0/8)

Teil B (mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x)=2x^2+6x-20$.

a)

$$\begin{aligned}
&2x^2+6x-20=0 \qquad |:2\\
&x^2+3x-10=0\\
&x=-1{,}5\pm\sqrt{2{,}25+10}\\
&x=-1{,}5\pm 3{,}5\\
&x_1=-5 \qquad x_2=2
\end{aligned}$$

b)

S (0 / – 20)

c)

$$\begin{aligned}
&f(x)=2x^2+6x-20\\
&f(x)=2\cdot[x^2-3x-10]\\
&f(x)=2\cdot[(x-1{,}5)^2-10-2{,}25]\\
&f(x)=2\cdot[(x-1{,}5)^2-12{,}25]\\
&f(x)=2\cdot(x-1{,}5)^2-24{,}5\\
&\Rightarrow S(1{,}5/-24{,}5)
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
&A(7/y)\,auf\, f\Rightarrow f(7)=y\\
&\qquad y=2\cdot 7^2+6\cdot 7-20=120
\end{aligned}$$

e)

$$B(x/10)\,auf\, f\Rightarrow f(x)=10$$

$$\begin{aligned}
&2x^2+6x-20=10 \qquad |-10\\
&2x^2+6x-30=0 \qquad |:2\\
&x^2+3x-15=0\\
&x=-1{,}5\pm\sqrt{2{,}25+15}\\
&x=-1{,}5\pm\sqrt{17}{,}25\\
&x_1=2{,}65 \qquad x_2=-5{,}65
\end{aligned}$$

$Antwort: Es\ gibt\ zwei\ Werte,\ x_1=2{,}65\ und\ x_2=-5{,}65$

f)

$Wenn\ C\ auf\ f\ liegt,\ so\ müsste\ f(1)=1\ gelten.$

$$\begin{aligned}
&2\cdot 1^2+6\cdot 1-20=1\\
&2+6-20=1\\
&Widerspruch \Rightarrow C\ nicht\ auf\ f
\end{aligned}$$

g)

$$2x^2+6x-20=14x-26 \qquad |-14x$$
$$2x^2-8x-20=-26 \qquad |+26$$
$$2x^2-8x+6=0 \qquad |:2$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$x=2\pm\sqrt{4-3}$$
$$x=2\pm 1$$
$$x_1=1 \qquad x_2=3$$

Bestimmung y − Werte:
$$y=14\cdot 1-26=-12$$
$$y=14\cdot 3-26=16$$

Schnittpunkte:
$$S_1(1/-12) \qquad S_2(3/16)$$

h)

$$2x^2+6x-20=x^2 \qquad |-x^2$$
$$x^2+6x-20=0$$
$$x=-3\pm\sqrt{9+20}$$
$$x=-3\pm\sqrt{29}$$
$$x_1=2{,}39 \qquad x_2=-8{,}39$$

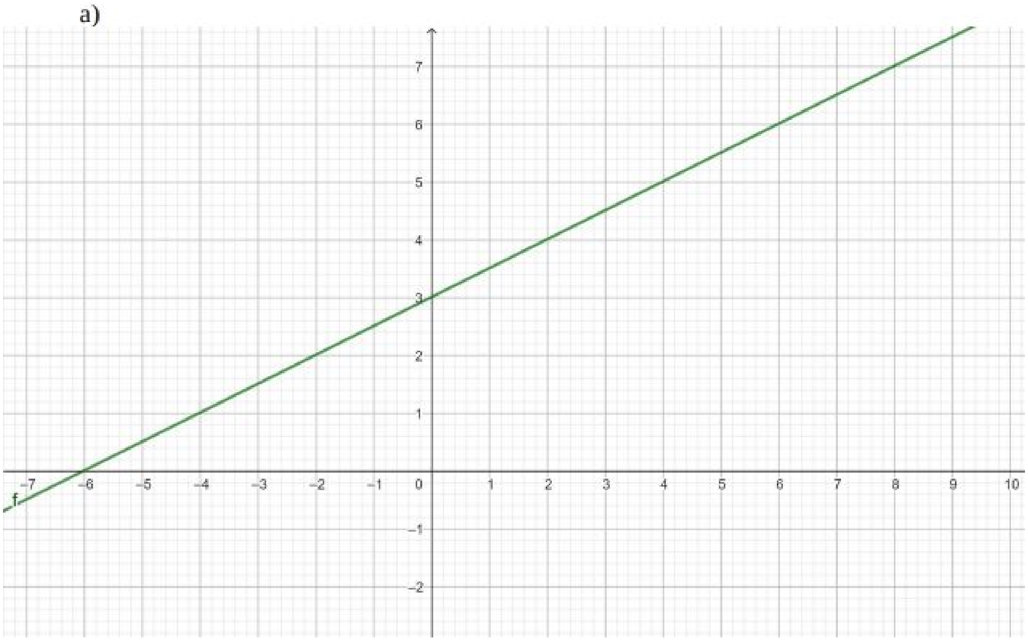
Bestimmung y − Wert:
$$y=2{,}39^2=5{,}71$$
$$y=(-8{,}39)^2=70{,}39$$

Schnittpunkte:
$$S_1(2{,}39/5{,}71) \qquad S_2(-8{,}39/70{,}39)$$

Aufgabe 2

Gegeben ist die lineare Funktion $f(x)=0{,}5x+3$.

a)



b)

$$0{,}5x+3=0 \qquad |-3$$
$$0{,}5x=-3 \qquad |:0{,}5$$
$$x=-6$$

c)

S (0 / 3)

d)

$$0{,}5x+3=2x-4 \qquad |-2x$$
$$-1{,}5x+3=-4 \qquad |-3$$
$$-1{,}5x=-7 \qquad |:-1{,}5$$
$$x=\frac{14}{3}$$

$$Bestimmung\ y-Wert:$$
$$y=\frac{1}{2}\cdot\frac{14}{3}+3=\frac{7}{3}+3=\frac{7}{3}+\frac{9}{3}=\frac{16}{3}$$

$$Schnittpunkt: S(\frac{14}{3}/\frac{16}{3})$$

e) Da h parallel zu f ist, muss es dieselbe Steigung haben.

$$h(x)=0{,}5x+b$$

$$A(1/1)\,auf\,h \Rightarrow h(1)=1$$
$$0{,}5\cdot 1+b=1$$
$$0{,}5+b=1$$
$$b=0{,}5$$

$$h(x)=0{,}5x+0{,}5$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x)=4\cdot 3^x$.

a)

$$f(0)=4\cdot 3^0=4\cdot 1=4$$
$$\Rightarrow S(0/4)$$

b)

$$f(2)=4\cdot 3^2=4\cdot 9=36 \quad \Rightarrow y=36$$

c)

$$4 \cdot 3^x = 18 \quad |:4$$
$$3^x = 4{,}5$$
$$x = \log_3(4{,}5)$$
$$x = 1{,}37$$

d)

$$4 \cdot 3^x = 10 \cdot 2^x \quad |:4$$
$$3^x = 2{,}5 \cdot 2^x \quad |:2^x$$
$$\frac{3^x}{2^x} = 2{,}5$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2{,}5$$
$$1{,}5^x = 2{,}5$$
$$x = \log_{1,5}(2{,}5) = 2{,}26$$

$$\textit{Bestimmung } y-\textit{Wert}:$$
$$f(2{,}26) = 4 \cdot 3^{2{,}26} = 47{,}9$$

$$\Rightarrow S(2{,}26/47{,}9)$$

Aufgabe 4

Gegeben: Größe einer Bakterienkultur $f(x)=12 \cdot 1{,}2^x$ beschrieben werden. Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 10 Uhr und f(x) gibt die Größe in cm² an.

a)

12 cm²

b)

20 %

c)

14:30 Uhr bedeutet x = 4,5

$$f(4{,}5) = 12 \cdot 1{,}2^{4{,}5} = 27{,}26$$

Antwort: etwa 27,26 cm²

d)

9 Uhr bedeutet: x = – 1

$$f(-1) = 12 \cdot 1{,}2^{-1} = 10$$

Antwort: 10 cm²

e)

$f(x)=20$
$12 \cdot 1{,}2^x=20 \qquad |:12$
$1{,}2^x=\frac{5}{3}$
$x=\log_{1,2}(\frac{5}{3})=2{,}8$

$2{,}8h=2h+0{,}8h=2h+48\,min$

Antwort: Die 20 cm² werden um 12:48 Uhr erreicht.

f)

$12 \cdot 1{,}2^x=24$
$1{,}2^x=2$
$x=\log_{1,2}(2)=3{,}8$

Antwort: Es sind 3,8 Stunden.

g) (i)
15 Uhr entspricht x = 5
$f(5)=12 \cdot 1{,}2^5=29{,}86$
$nach\,dem\,Unfall: 19{,}86\,cm^2$
$neue\,Funktion: g(x)=19{,}86 \cdot 1{,}2^x (x: Zeit\,ab\,15\,Uhr)$
$g(2)=19{,}86 \cdot 1{,}2^2=28{,}60$
Antwort: 28,6 cm²

(ii)
$g(x)=29{,}86$
$19{,}86 \cdot 1{,}2^x=29{,}86 \qquad |:19{,}86$
$1{,}2^x=1{,}5$
$x=\log_{1,2}(1{,}5)=2{,}22$

$2{,}22h=2h+0{,}22h=2h+13{,}2\,min$

Antwort: Die Größe wird um 17:13 Uhr wieder erreicht.

Aufgabe 5

Eine Bakterienkultur bedeckt im Moment 28 cm². Sie verdreifacht jede Stunde ihre Größe.

a)

$f(x)=28 \cdot 3^x$

b)

75 min = 1 Stunde + 15 min = 1,25 Stunden

$f(1{,}25)=28 \cdot 3^{1,25}=110{,}55$

Antwort: Es sind 110,55 cm².

c)

vor 2 Stunden = – 2 Stunden

$$f(-2)=28\cdot 3^{-2}=3{,}11$$

Antwort: Vor zwei Stunden waren es 3,11 cm².

d)

$$f(x)=100$$
$$28\cdot 3^{x}=100 \qquad |:28$$
$$3^{x}=\frac{25}{7}$$
$$x=\log_3\left(\frac{25}{7}\right)=1{,}16$$

Antwort: Eine Größe von 100 cm² wird nach 1,16 h erreicht.

e)

$$28\cdot 3^{x}=56 \qquad |:28$$
$$3^{x}=2$$
$$x=\log_3(2)=0{,}63$$

Antwort: Die Kultur braucht 0,63 h für eine Verdopplung.

f)

Der Anfangswert ist weiterhin 28 cm². Die Gleichung hat deshalb die Form
$g(x)=28\cdot a^{x}$

Nach zwei Stunden ist eine Verdreifachung erreicht (also von 28 auf 84 cm²). Es gilt daher:

$$f(2)=84$$
$$28\cdot a^{2}=84 \qquad |:28$$
$$a^{2}=3$$
$$a=\sqrt{3}\approx 1{,}73$$

Die gesuchte Gleichung lautet also $g(x)=28\cdot 1{,}73^{x}$

Aufgabe 6

x	0	1	2	3
f(x)	21	35,7	60,69	103,173

a)

Der Anfangswert (der Funktionswert bei x = 0) ist 21. Die Gleichung hat deshalb die folgende Gestalt: $f(x)=21\cdot a^{x}$.

Wenn man oben einen Wert weitergeht, so wird unten mit 1,7 multipliziert. Der Wachstumsfaktor ist also 1,7.

Die Funktionsgleichung ist die folgende: $f(x)=21\cdot 1{,}7^{x}$.

b)

Die Kultur hatte eine Größe von 21 cm².

c)

$$f(9)=21\cdot 1{,}7^9=2490{,}35$$

Größe nach 9 Stunden: 2490,45 cm²

d)

20 min = 1/3 Stunde

$$f\left(\frac{1}{3}\right)=21\cdot 1{,}7^{\frac{1}{3}}=25{,}06$$

Größe nach 20 min: 25,06 cm²

e)

$$\begin{aligned}
&f(x)=80 \\
&21\cdot 1{,}7^x=80 && |:21 \\
&1{,}7^x=\frac{80}{21} \\
&x=\log_{1,7}\left(\frac{80}{21}\right)=2{,}52
\end{aligned}$$

Zeitpunkt: nach 2,52 Stunden

f)

$$\begin{aligned}
&21\cdot 1{,}7^x=42 && |:21 \\
&1{,}7^x=2 \\
&x=\log_{1,7}(2)=1{,}31
\end{aligned}$$

Eine Verdopplung erfolgt jeweils nach 1,31 Stunden.

g)

$$\begin{aligned}
&21\cdot 1{,}7^x=40\cdot 1{,}1^x && |:21 \\
&1{,}7^x=\frac{40}{21}\cdot 1{,}1^x && |:1{,}1^x \\
&\frac{1{,}7^x}{1{,}1^x}=\frac{40}{21} \\
&\left(\frac{17}{11}\right)^x=\frac{40}{21} \\
&x=\log_{\frac{17}{11}}\left(\frac{40}{21}\right)=1{,}48
\end{aligned}$$

Die eine Kultur überholt die andere nach 1,48 h.

Aufgabe 7

Auf einem Konto befinden sich im Moment 9000 Euro. Es gibt pro Jahr 1,2 % Zinsen. Wir rechnen mit Zinseszins.

a)

$$f(x)=9000\cdot 1{,}012^{x}$$

b)

$$f(6)=9000\cdot 1{,}012^{6}=9667{,}75$$

nach 6 Jahren: 9667,75 Euro auf dem Konto

c)

$$9000\cdot 1{,}012^{x}=10.000 \qquad |:9000$$

$$1{,}012^{x}=\frac{10}{9}$$

$$x=\log_{1{,}012}\left(\frac{10}{9}\right)=8{,}83$$

10.000 Euro werden nach 8,83 Jahren erreicht.

d)

Kontostand jetzt: 9000 Euro

Kontostand in 100 Jahren: $9000\cdot 1{,}012^{100}=1.363.813.588{,}35$

$$\frac{1363813588{,}35}{9000}=151.534{,}84$$

$$151.534{,}84-1=151.533{,}84$$

$$151.533{,}84\cdot 100=15.153.384$$

Der Kontostand wächst um 15.153.384 % an.

Aufgabe 8

Gegeben: $f(x)=12\cdot 1{,}3^{x}$ und $g(x)=10\cdot 1{,}5^{x}$. Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 11 Uhr und f(x) für die Größe in cm².

a)

Kultur 1 (die von f beschrieben wird): 12 cm²
Kultur 2 (die von g beschrieben wird): 10 cm²

b)

Kultur 1: 30 %
Kultur 2: 50 %

d)

$$12 \cdot 1{,}3^x = 20$$
$$1{,}3^x = \frac{5}{3}$$
$$x = \log_{1,3}\left(\frac{5}{3}\right) = 1{,}95$$

$$10 \cdot 1{,}5^x = 20$$
$$1{,}5^x = 2$$
$$x = \log_{1,5}(2) = 1{,}71$$

Kultur 1: 1,95 Stunden (12:57 Uhr)
Kultur 2: 1,71 Stunden (12:43 Uhr)

e) (i)

$$12 \cdot 1{,}3^x = 10 \cdot 1{,}5^x \quad |:10$$
$$1{,}2 \cdot 1{,}3^x = 1{,}5^x \quad |:1{,}3^x$$
$$1{,}2 = \frac{1{,}5^x}{1{,}3^x}$$
$$1{,}2 = \left(\frac{15}{13}\right)^x$$
$$x = \log_{\frac{15}{13}}(1{,}2) = 1{,}27$$

1,27 Stunden = 1 Stunde + 0,27 mal 60 min = 1 Stunde + 16,2 min

Das Überholen findet um 12:16 Uhr statt.

(ii)
Vor dem Überholen war Kultur 1 größer.

Aufgabe 9

In Tiexland leben im Moment 20 Millionen Menschen. Die Bevölkerung schrumpft jedes Jahr um 1 Prozent.

a)

$$f(20) = 20 \cdot 0{,}99^x$$

b)

$$20 \cdot 0{,}99^x = 10 \quad |:20$$
$$0{,}99^x = 0{,}5$$
$$x = \log_{0,99}(0{,}5) = 68{,}97$$

Dies wird nach 68,97 Jahren der Fall sein.

c)

$$20 \cdot 0{,}99^x = 10 \cdot 1{,}02^x \qquad |:10$$
$$2 \cdot 0{,}99^x = 1{,}02^x \qquad |:0{,}99^x$$
$$2 = \frac{1{,}02^x}{0{,}99^x}$$
$$2 = \left(\frac{102}{99}\right)^x$$
$$x = \log_{\frac{102}{99}}(2) = 23{,}22$$

Dies ist nach 23,22 Jahren der Fall.

Aufgabe 10

Die Größe eines Baums beträgt im Moment 3 Meter. Er wächst pro Jahr um 20 cm.

a)

$f(x) = 0{,}2x + 3$

b)

$8 = 0{,}2x + 3$
$5 = 0{,}2x$
$25 = x$

Dies ist nach 25 Jahren der Fall.

c) $g(x) = 0{,}4x + 2$

(i)

40 cm

(ii)

$0{,}2x + 3 = 0{,}4x + 2$
$0{,}2x + 1 = 0{,}4x$
$1 = 0{,}2x$
$5 = x$

Die Bäume sind nach 5 Jahren gleich groß.

Aufgabe 11

a)

$$\frac{-3}{400}x^2 + \frac{3}{10}x = 0$$
$$x \cdot \left(\frac{-3}{400}x + \frac{3}{10}\right) = 0$$
$$x = 0 \quad oder \quad -0{,}0075x + 0{,}3 = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad -0{,}0075x = -0{,}3$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 40$$

Die beiden Nullstellen (wo die Fliege auf dem Boden war) sind 40 m voneinander entfernt. Sie hat daher 40 m Luftlinie zurückgelegt.

b)

$$f(x)=\frac{-3}{400}x^2+\frac{3}{10}x$$
$$f(x)=-0{,}0075x^2+0{,}3x$$
$$f(x)=-0{,}0075\cdot(x^2-40x)$$
$$f(x)=-0{,}0075\cdot((x-20)^2-400)$$
$$f(x)=-0{,}0075\cdot(x-20)^2+3$$

Der Scheitelpunkt liegt bei S (20 / 3). Die größte Höhe ist daher 3 m.

c)

$$f(10)=-0{,}0075\cdot10^2+0{,}3\cdot10=2{,}25$$

2,25 m – 1,75 m = 0,5 m

Es sind 50 cm Abstand.

Aufgabe 12

Gegeben ist eine quadratische Funktion der Gestalt $f(x)=ax^2+c$. Auf ihrem Graphen liegen die Punkte A (0 / 8) und B (3 / 24).

$$A(0/8)\,auf\,f\Rightarrow f(0)=8$$
$$a\cdot0^2+c=8$$
$$c=8$$
$$\Rightarrow f(x)=ax^2+8$$

$$B(3/24)\,auf\,f\Rightarrow f(3)=24$$
$$a\cdot3^2+8=24$$
$$9a+8=24 \quad |-8$$
$$9a=16 \quad |:9$$
$$a=\frac{16}{9}$$
$$\Rightarrow f(x)=\frac{16}{9}x^2+8$$

Aufgabe 13

a) $5^{14} \cdot 5^{12} = 5^{14+12} = 5^{26}$

b) $7^4 \cdot 7^{-8} = 7^{4-8} = 7^{-4}$

c) $3^2 \cdot 3^{-15} \cdot 3^{10} = 3^{2-15} \cdot 3^{10} = 3^{-13} \cdot 3^{10} = 3^{-13+10} = 3^{-3}$

d) $(4^6)^7 = 4^{6\cdot 7} = 4^{42}$

e) $(5^{20})^{\frac{1}{2}} = 5^{20\cdot\frac{1}{2}} = 5^{10}$

f) $((7^3)^5)^2 = (7^{3\cdot 5})^2 = (7^{15})^2 = 7^{15\cdot 2} = 7^{30}$

g) $(5^6)^3 \cdot 5^7 = 5^{6\cdot 3} \cdot 5^7 = 5^{18} \cdot 5^7 = 5^{18+7} = 5^{25}$

h) $\dfrac{7^2 \cdot 7^5}{7^4 \cdot 7^3} = \dfrac{7^{2+5}}{7^{4+3}} = \dfrac{7^7}{7^7} = 1$

i) $x^4 \cdot x^7 = x^{4+7} = x^{11}$

j) $x^4 \cdot x^3 \cdot x^{-5} = x^{4+3} \cdot x^{-5} = x^7 \cdot x^{-5} = x^{7-5} = x^2$

k) $(x^{13})^3 = x^{13\cdot 3} = x^{39}$

l) $(x^5 \cdot x^{10})^2 = (x^{5+10})^2 = (x^{15})^2 = x^{15\cdot 2} = x^{30}$

m) $((x^3)^3)^4 = (x^{3\cdot 3})^4 = (x^9)^4 = x^{9\cdot 4} = x^{36}$

n) $\dfrac{x^2 \cdot x^4}{x^3 \cdot x^2} = \dfrac{x^{2+4}}{x^{3+2}} = \dfrac{x^6}{x^5} = x^{6-5} = x^1 = x$

Aufgabe 14

a) $5 \cdot x^3 \cdot x^2 = 5 \cdot x^{3+2} = 5 \cdot x^5$

b) $13x^5 \cdot 21x^9 = 13 \cdot 21 \cdot x^5 \cdot x^9 = 273 \cdot x^{5+9} = 273x^{14}$

c) $6x^3 \cdot 7x^5 \cdot 2x^2 = 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot x^2 = 84 \cdot x^{3+5} \cdot x^2 = 84 \cdot x^8 \cdot x^2 = 84 \cdot x^{8+2} = 84 \cdot x^{10}$

d) $(4x)^3 = 4^3 \cdot x^3 = 64x^3$

e) $((5x)^2)^3 = (5^2 \cdot x^2)^3 = (25x^2)^3 = 25^3 \cdot (x^2)^3 = 15625 \cdot x^{2\cdot 3} = 15625x^6$

f) $(4x)^3 \cdot (3x)^4 = 4^3 \cdot x^3 \cdot 3^4 \cdot x^4 = 64 \cdot x^3 \cdot 81 \cdot x^4 = 64 \cdot 81 \cdot x^3 \cdot x^4 = 5184 \cdot x^{3+4} = 5184x^7$

g) $\dfrac{26x^9}{2x^7} = \dfrac{26}{2} \cdot \dfrac{x^9}{x^7} = 13 \cdot x^{9-7} = 13x^2$

h) $\dfrac{5x^3 \cdot 6x^3}{2x^4} = \dfrac{5 \cdot 6x^3 \cdot x^3}{2x^4} = \dfrac{30 \cdot x^{3+3}}{2x^4} = \dfrac{30x^6}{2x^4} = \dfrac{30}{2} \cdot \dfrac{x^6}{x^4} = 15 \cdot x^{6-4} = 15x^2$

i) $x^n \cdot x^{m-n} = x^{n+m-n} = x^m$

Aufgabe 15

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $\frac{4^3 \cdot 4^{-2} \cdot 4^4}{(4^2 \cdot 4^3)^2} = \frac{4^{3-2+4}}{(4^{2+3})^2} = \frac{4^5}{(4^5)^2} = \frac{4^5}{4^{5\cdot 2}} = \frac{4^5}{4^{10}} = 4^{5-10} = 4^{-5}$

b) $\frac{(x^3 \cdot x^9 \cdot x^7)^2}{(x^2)^3} = \frac{(x^{3+9+7})^2}{x^{2\cdot 3}} = \frac{(x^{19})^2}{x^6} = \frac{x^{19\cdot 2}}{x^6} = \frac{x^{38}}{x^6} = x^{38-6} = x^{32}$

c) $x^3 \cdot y^7 \cdot x^6 = x^{3+6} \cdot y^7 = x^9 y^7$

d) $\frac{x^4 \cdot y^5}{y^2} = x^4 \cdot y^{5-2} = x^4 y^3$

e) $\frac{4x^5 \cdot 8y^7}{2y^6 \cdot x^3} = \frac{4 \cdot 8 \cdot x^5 y^7}{2x^3 y^6} = \frac{32}{2} \cdot x^{5-3} \cdot y^{7-6} = 16x^2 y$

f) $\frac{x^4 \cdot y^5 - x^3 \cdot y^4 + x^5 \cdot y^3}{(xy)^2} = \frac{x^4 y^5 - x^3 y^4 + x^5 y^3}{x^2 y^2} = \frac{x^4 y^5}{x^2 y^2} - \frac{x^3 y^4}{x^2 y^2} + \frac{x^5 y^3}{x^2 y^2} = x^2 y^3 - x y^2 + x^3 y$

g) $\frac{2x^4 \cdot 5x^6}{4y^9} : \frac{5x^2 \cdot 4x^3}{8y^8} = \frac{2 \cdot 5 \cdot x^{4+6}}{4y^9} \cdot \frac{8y^8}{5 \cdot 4 \cdot x^{2+3}} = \frac{10x^{10} \cdot 8y^8}{4y^9 \cdot 20x^5} = \frac{80x^{10} y^8}{80x^5 y^9} = \frac{80}{80} \cdot x^{10-5} \cdot y^{8-9} = x^5 y^{-1}$