

# Aufgaben (Teil B)

## Aufgabe 1 (Abitur Bremen 2009)

### Hochwasser

Auf der Höhe von Bremerhaven erzeugt der Tidenverlauf (Zyklus von Ebbe und Flut) in Verbindung mit den vorherrschenden Winden unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten der Weser. Vom Wasser- und Schifffahrtsamt Bremerhaven wurden zu unterschiedlichen Zeitpunkten die

Fließgeschwindigkeiten der Weser in  $\frac{m^3}{s}$  [Kubikmeter pro Sekunde] gemessen.



Wasserstandsanzeiger Bremerhaven

...3

a) --- Aufgabenteil a gestrichen ----

Messungen an einem anderen Tag bei gleichen Tidenverhältnissen aber unterschiedlichen Winden ergaben für die Fließgeschwindigkeit der Weser die Funktion  $g$  mit

$$g(x) = 600x^3 - 3500x^2 + 5400x + 6600, \quad 0 \leq x \leq 3.$$

Wie oben gibt  $x$  die Zeit in Stunden nach Beginn der Messung und  $g(x)$  die Fließgeschwindigkeit in  $\frac{m^3}{s}$  zum Zeitpunkt  $x$  an.

Verwenden Sie die Funktion  $g$  in den folgenden Aufgabenteilen.

- b) Berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit der Weser drei Stunden nach Beginn dieser Messung. Begründen Sie, dass die Funktion  $g$  für einen weit über vier Stunden hinausgehenden Zeitabschnitt keine realistische Beschreibung der Fließgeschwindigkeit der Weser liefern kann.
- c) Zeigen Sie, dass der Wendepunkt von  $g$  zum Zeitpunkt  $x_w = \frac{35}{18}$  liegt. Berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit zu dieser Zeit. Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Fließgeschwindigkeit.

d) --- Aufgabenteil d gestrichen ----

## Aufgabe 2 (Abitur Bremen 2009)

Eine kleine Gruppe von SchülerInnen hat sich entschlossen, für den Wettbewerb „Jugend forscht“ den Verkehrsfluss an einer Straße ihres Wohnortes zu untersuchen. Zu diesem Zweck zählen sie an einer bestimmten Stelle dieser Straße zu verschiedenen Zeitpunkten  $x$ , wie viele Autos in der jeweils folgenden Minute vorbeifahren. Für ihre Untersuchungen wollen sie zunächst eine ganzrationale Funktion  $f$  dritten Grades aufstellen, die vom Mittag bis zum Abend zu jedem Zeitpunkt  $x$  (in Stunden seit Zählungsbeginn gemessen) näherungsweise die Verkehrsdichte in Anzahl der Autos pro Minute beschreibt.

a) --- Aufgabenteil a gestrichen ---

An einem anderen Tag zählt die Gruppe der SchülerInnen den Verkehrsfluss an der gleichen Stelle, dieses Mal über sieben Stunden. Die Verkehrsdichte der Autos lässt sich näherungsweise durch die Funktion  $g$  mit der Gleichung

$$g(x) = -2x^3 + 18x^2 - 30x + 14, 0 \leq x \leq 7$$

beschreiben,  $x$  in Stunden seit Zählungsbeginn,  $g(x)$  in Anzahl der Autos pro Minute zum Zeitpunkt  $x$ .

Verwenden Sie für die weiteren Aufgabenteile diese Funktion  $g$ .

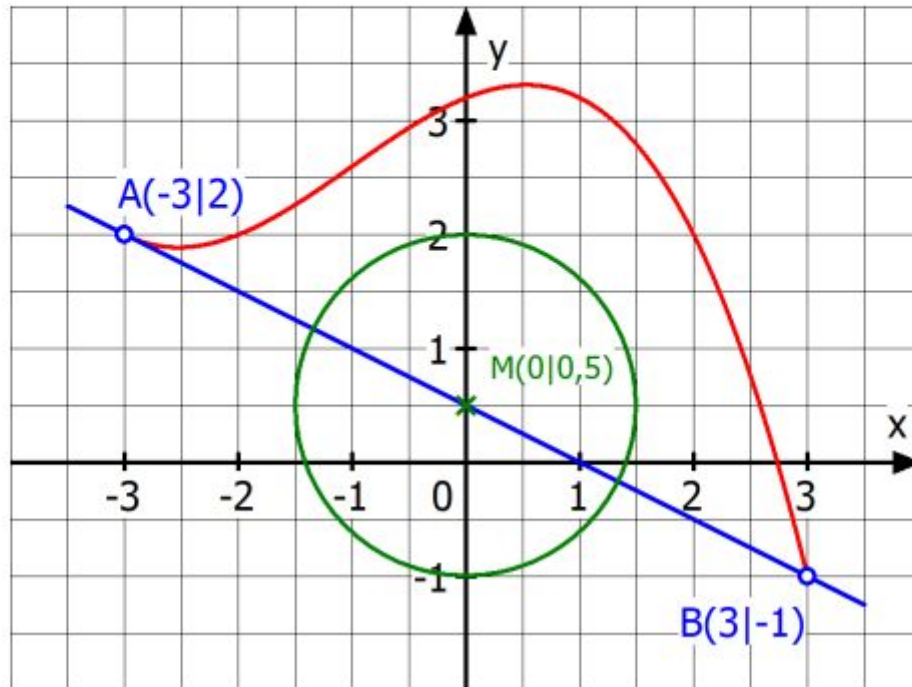
- b) Berechnen Sie die Verkehrsdichte vier Stunden nach Beginn der Zählung und am Ende der Beobachtung.  
Begründen Sie, dass die Funktion  $g$  für einen über 7 Stunden hinausgehenden Zeitabschnitt keine sinnvolle Beschreibung der Verkehrsdichte liefern kann.
- c) Zeigen Sie rechnerisch, dass die größte Verkehrsdichte zum Zeitpunkt  $x_{E1} = 5$  eingetreten ist und bestimmen Sie diese größte Verkehrsdichte in Anzahl der Autos pro Minute.  
Zeigen Sie rechnerisch, dass die geringste Verkehrsdichte mit 0 Autos pro Minute eine Stunde nach Beobachtungsbeginn eintritt.

d) --- Aufgabenteil d gestrichen ---

### Aufgabe 3 (Abitur Baden-Württemberg 2012)

Die Abbildung zeigt den Verlauf einer Umgehungsstraße zur Entlastung der Ortsdurchfahrt AB einer Gemeinde. Das Gemeindegebiet ist kreisförmig mit dem Mittelpunkt M und dem Radius 1,5 km. Die Umgehungsstraße verläuft durch die Punkte A und B und wird beschrieben durch die Funktion f mit

$$f(x) = -0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2. \quad 1 \text{ LE entspricht } 1 \text{ km.}$$



- a) Welche Koordinaten hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße?  
Wie weit ist dieser Punkt vom Ortsmittelpunkt M entfernt?  
Die Umgehungsstraße beschreibt eine Linkskurve und eine Rechtskurve.  
Bestimme den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen.

(Teilaufgabe a gekürzt)

b) --- Aufgabenteil b gestrichen ---

- c) Im Punkt P(1,5|3) befindet sich eine Windkraftanlage.  
Ein Fahrzeug fährt von B aus auf der Umgehungsstraße.  
Zeige, dass der Fahrer die Windkraftanlage im Punkt Z(2|2) genau in Fahrtrichtung vor sich sieht.
- d) In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt AB?

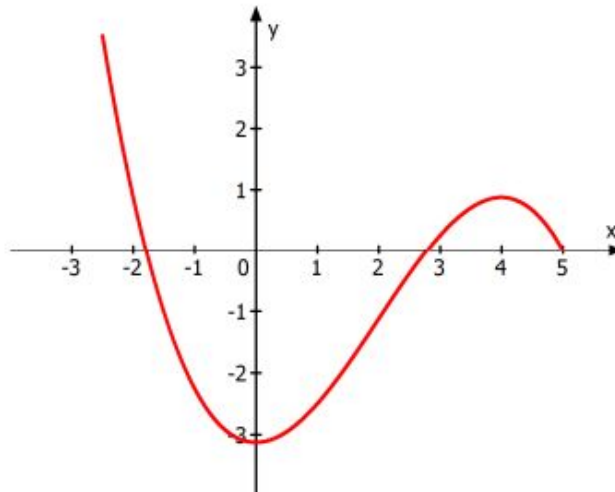
## Aufgabe 4 (Abitur Baden-Württemberg 2008)

Ein Tal in den Bergen wird nach Westen von einer steilen Felswand, nach Osten von einem flachen Höhenzug begrenzt.

Der Querschnitt des Geländes wird beschrieben durch das Schaubild der Funktion  $f$  mit

$$f(x) = -0,125x^3 + 0,75x^2 - 3,125 \quad \text{im Bereich } -2,5 \leq x \leq 5,$$

dabei weist die positive  $x$ -Achse nach Osten (1 LE entspricht 100 m).



- a) Berechne die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist.  
Quer zum Tal befindet sich in West-Ost-Richtung eine Staumauer. Vom tiefsten Punkt des Tals aus gemessen ist sie 312,5 m hoch.  
Gib die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante an.

(Teilaufgabe a gekürzt)

- b) In der Talsohle befindet sich ein Dorf, das bereits nachmittags im Schatten liegt. Nach dem Vorbild des italienischen Ortes Viganella soll auf dem höchsten Punkt des Höhenzugs östlich des Dorfes ein Gerüst mit einem drehbaren Spiegel zur Reflexion von Sonnenlicht aufgestellt werden. Auch hier wird der Querschnitt des Geländes durch das Schaubild der Funktion  $f$  beschrieben.  
Bestimme die Mindesthöhe dieses Gerüsts, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.

(Teilaufgabe b gekürzt)

# Lösungen

## Aufgabe 1

2b	<p><math>g(3) = 7500</math>, also beträgt die Fließgeschwindigkeit der Weser drei Stunden nach Beginn der Messung <math>7500 \frac{m^3}{s}</math>.</p> <p>Für Zeitpunkte weit über vier Stunden ergeben sich sehr große und immer größer werdende Funktionswerte, z.B. <math>g(5) = 21100</math>. Für Fließgeschwindigkeiten der Weser sind zyklische Verlaufsformen realistischer.</p>
2c	<p><math>x_W = \frac{35}{18}</math> ist Wendestelle, da <math>g''\left(\frac{35}{18}\right) = 3600 \cdot \frac{35}{18} - 7000 = 0</math> und jede Funktion dritten Grades genau eine Wendestelle besitzt.</p> <p>Die Fließgeschwindigkeit beträgt ca. <math>8278 \frac{m^3}{s}</math>, da <math>g\left(\frac{35}{18}\right) = \frac{2011550}{243} \approx 8277,98</math>.</p> <p>Der Wendepunkt ist der Punkt mit extremaler Fließgeschwindigkeitsänderung.</p> <p>Oder: Wegen <math>g'''(x_W) = 3600 &gt; 0</math> hat <math>g'</math> an der Stelle <math>x_W</math> ein rel. Minimum, die Abnahme der Fließgeschwindigkeit ist folglich an der Stelle <math>x_W</math> am größten.</p>

## Aufgabe 2

b)	<p><math>g(4) = 54</math>, also beträgt die Verkehrsdichte 4 Stunden nach Beginn der Zählung 54 Autos pro Minute.</p> <p>Aus <math>g(7) = 0</math> folgt am Ende der Beobachtung eine Verkehrsdichte von 0 Autos pro Minute.</p> <p>Nach einem Zeitraum von 7 Stunden ergeben sich negative Verkehrsdichten. Eine Modellierung mit <math>g</math> ist somit nicht mehr sinnvoll.</p>
c)	<p>Für die Extremstelle muss gelten: <math>g'(x_{E1}) = -6x_{E1}^2 + 36x_{E1} - 30 = 0</math>, dies wird durch Einsetzen bestätigt <math>g'(5) = -6 \cdot 5^2 + 36 \cdot 5 - 30 = 0</math>. Über die zweite Ableitung <math>g''(5) = -12 \cdot 5 + 36 &lt; 0</math> lässt sich nachweisen, dass an dieser Stelle ein Hochpunkt existiert. Die Verkehrsdichte berechnet sich mit <math>g(5) = 64</math>.</p> <p>Für die Stelle <math>x_{E2} = 1</math> bestätigt <math>g'(1) = -6 \cdot 1^2 + 36 \cdot 1 - 30 = 0</math> und <math>g''(1) = -12 \cdot 1 + 36 &gt; 0</math> den Tiefpunkt mit <math>g(1) = 0</math>.</p>

## Aufgabe 3

a) Welche Koordinaten hat der nördlichste Punkt der Umgehungsstraße?

$$f(x) = -0,1x^3 - 0,3x^2 + 0,4x + 3,2$$

$$f'(x) = -0,3x^2 - 0,6x + 0,4$$

$$f''(x) = -0,6x - 0,6$$

$$f'''(x) = -0,6$$

Hinreichende Bedingung für Hochpunkt:  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) < 0$

$$-0,3x^2 - 0,6x + 0,4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{0,6 \pm \sqrt{0,36 + 0,48}}{-0,6} = \frac{0,6 \pm 0,917}{-0,6}$$

$$x_1 \approx -2,53 \text{ und } x_2 \approx 0,53$$

Laut dem Schaubild kommt nur  $x \approx 0,53$  in Frage.

$$f''(0,53) = -0,918 < 0$$

Mit  $f(0,53) = 3,31$  ergibt sich als Hochpunkt  $H(0,53|3,31)$ .

Wie weit ist dieser Punkt vom Ortsmittelpunkt  $M$  entfernt?

Entfernung des Hochpunktes vom Punkt  $M(0|0,5)$ :

$$\overline{MH} = \sqrt{(0,53 - 0)^2 + (3,31 - 0,5)^2} \approx 2,86 \text{ km}$$

Bestimme den Punkt, in dem diese beiden Abschnitte ineinander übergehen.

Der Punkt, in dem der Übergangspunkt von der Links- in die Rechtskurve übergeht, ist der Wendepunkt des Schaubildes von  $f$ .

Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt:  $f''(x) = 0$  und  $f'''(x) \neq 0$ .

$$-0,6x - 0,6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

$$f'''(-1) = -0,6 \neq 0$$

Mit  $f(-1) = 2,6$  existiert ein Wendepunkt  $W(-1|2,6)$ .

- c) *Zeige, dass der Fahrer die Windkraftanlage im Punkt Z(2|2) genau in Fahrtrichtung vor sich sieht.*

Der Fahrer sieht die Windkraftanlage genau vor sich, falls der Punkt P auf der Tangente liegt, die das Schaubild von  $f$  im Punkt Q berührt.

Steigung der Tangente in Z:  $f'(2) = -2$

Steigung der Gerade, die durch P und Z verläuft:  $m_{PZ} = \frac{y_P - y_Z}{x_P - x_Z} = \frac{3 - 2}{1,5 - 2} = -2$

Da die beiden Steigungen übereinstimmen, liegt P auf der Tangente.

Hinweis: Man hätte auch die Gleichung der Tangente in Z aufstellen können und mit einer Punktprobe kontrollieren können, dass der Punkt P auf der Tangente liegt.

- d) *In welchem Punkt der Umgehungsstraße fährt ein Fahrzeug parallel zur Ortsdurchfahrt AB?*

Die Steigung der Ortsdurchfahrt beträgt  $m_{AB} = -0,5$  (siehe a))

Bedingung:  $f'(x) = -0,5$

$$-0,3x^2 - 0,6x + 0,4 = -0,5 \Rightarrow -0,3x^2 - 0,6x + 0,9 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \text{ und damit } x = -3 \text{ und } x = 1.$$

$x = -3$  ist der x-Wert von A (Endpunkt der Umgehungsstraße).

Daher hat der gesuchte Punkt den x-Wert  $x = 1$ .

Wegen  $f(1) = 3,2$  ist der gesuchte Punkt C(1|3,2).

## Aufgabe 4

- a) *Berechne die Stelle, an der die östliche Talseite am steilsten ist, und dann die Stelle, an der die westliche Talseite gleich steil ist.*

Die östliche Talseite ist an der Wendestelle am steilsten.

Berechnung der Wendestelle von f:

$$f(x) = -0,125x^3 + 0,75x^2 - 3,125$$

$$f'(x) = -0,375x^2 + 1,5x$$

$$f''(x) = -0,75x + 1,5$$

$$f'''(x) = -0,75$$

Hinreichende Bedingung:  $f''(x) = 0$  und  $f'''(x) \neq 0$

$$-0,75x + 1,5 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'''(2) = -0,75 \neq 0$$

An der Stelle  $x = 2$  ist die östliche Talseite am steilsten.

Die Steigung beträgt  $f'(2) = 1,5$

Nun ist die Stelle an der westlichen Talseite gesucht, die „gleich steil“ ist.

Damit ist gemeint, dass die Steigung entweder  $m = 1,5$  oder  $m = -1,5$  sein muss.

Man erkennt anhand des Schaubildes, dass die Tangentensteigungen an der westlichen Talseite negativ sind.

Daher gilt die Bedingung:  $f'(x) = -1,5$

$$-0,375x^2 + 1,5x = -1,5$$

$$-0,375x^2 + 1,5x + 1,5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{2,25 + 2,25}}{-0,75} = \frac{-1,5 \pm \sqrt{4,5}}{-0,75}$$

Daraus folgt  $x_1 \approx -0,828$  und  $x_2 \approx 4,828$ .

Da  $x_2$  sich nicht auf der westlichen Seite befindet, ist die gesuchte Stelle

$x_1 \approx -0,828$ .

*Gib die Breite der Staumauer an ihrer Oberkante an.*

Zunächst benötigt man den tiefsten Punkt des Tals.

Hinreichende Bedingung des Tiefpunktes:  $f'(x) = 0$  und  $f''(x) > 0$

$$-0,375x^2 + 1,5x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (-0,375x + 1,5) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{I) } x = 0$$

$$\text{II) } -0,375x + 1,5 = 0 \Leftrightarrow x = 4$$

$$f''(0) = 1,5 > 0 \Rightarrow T(0 | f(0)) \text{ also Tiefpunkt } T(0 | -3,125)$$

- b) Bestimme die Mindesthöhe dieses Gerüstes, bei der das Sonnenlicht den tiefsten Punkt des Geländequerschnitts erreichen kann.

Das Gerüst befindet sich an der höchsten Stelle östlich des Dorfes, also im Punkt Hochpunkt  $H(4|0,875)$  (siehe Teilaufgabe a)).

Um die Höhe des Gerüstes zu ermitteln, wird vom Tiefpunkt  $T(0|-3,125)$  eine Tangente an das Schaubild von  $f$  gelegt.

Allgemeine Tangentengleichung:  $y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

$$y = (-0,375u^2 + 1,5u) \cdot (x - u) - 0,125u^3 + 0,75u^2 - 3,125$$

Einsetzen des bekannten Tangentenpunkt  $T(0|-3,125)$ :

$$-3,125 = (-0,375u^2 + 1,5u) \cdot (-u) - 0,125u^3 + 0,75u^2 - 3,125$$

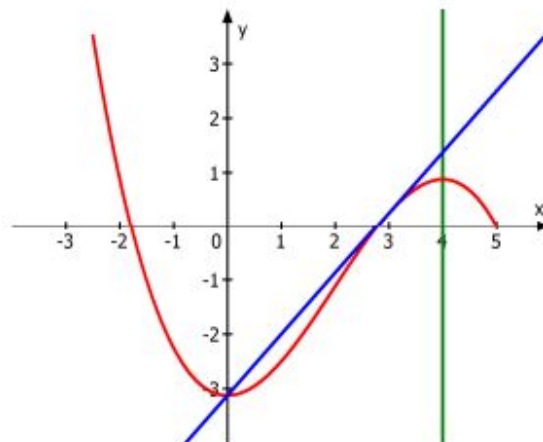
$$\Leftrightarrow -0,25u^3 + 0,75u^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 0,25u^2(-u + 3) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

I)  $u = 0$

II)  $u = 3$

Der gesuchte Berührungspunkt ist  $B(3|f(3))$ , also  $B(3|0,25)$



Die Tangentengleichung lautet  $y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$   
 $y = 1,125 \cdot (x - 3) + 0,25 \Rightarrow y = 1,125x - 3,125$

Einsetzen von  $x = 4$  in die Tangente ergibt  $y = 1,375$ .

Höhe des Gerüstes:  $h = 1,375 - (y\text{-Wert von } H) = 1,375 - 0,875 = 0,5$ .

Die Mindesthöhe des Gerüstes beträgt 50 Meter.

