

# AUFGABEN

## Teil A (hilfsmittelfrei)

### Aufgabe 1

Bestimme rechnerisch die Wendepunkte der folgenden Funktionen:

a)  $f(x) = x^3 + 15x^2$

b)  $f(x) = -x^3 + 6x^2$

c)  $f(x) = 5x^2 + 10x + 2$

### Aufgabe 2

Bestimme rechnerisch das Krümmungsverhalten der folgenden Funktionen:

a)  $f(x) = x^3 + 12x^2$

b)  $f(x) = 5x^2$

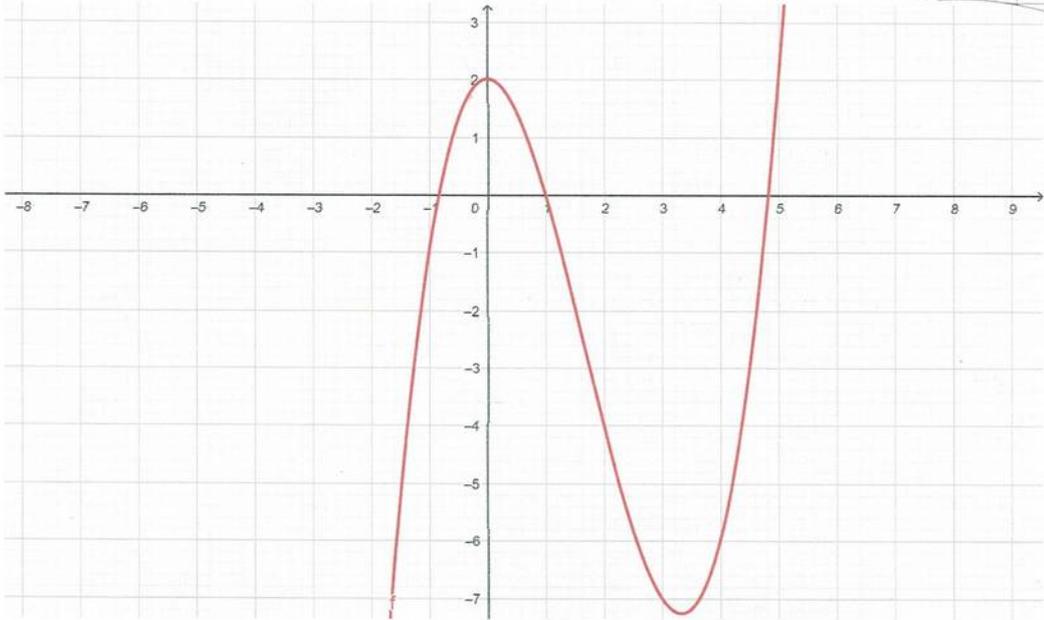
### Aufgabe 3

Bestimme rechnerisch die Nullstellen, die Extremstellen und Wendestellen der folgenden Funktion:  $f(x) = x^3 - 3x$

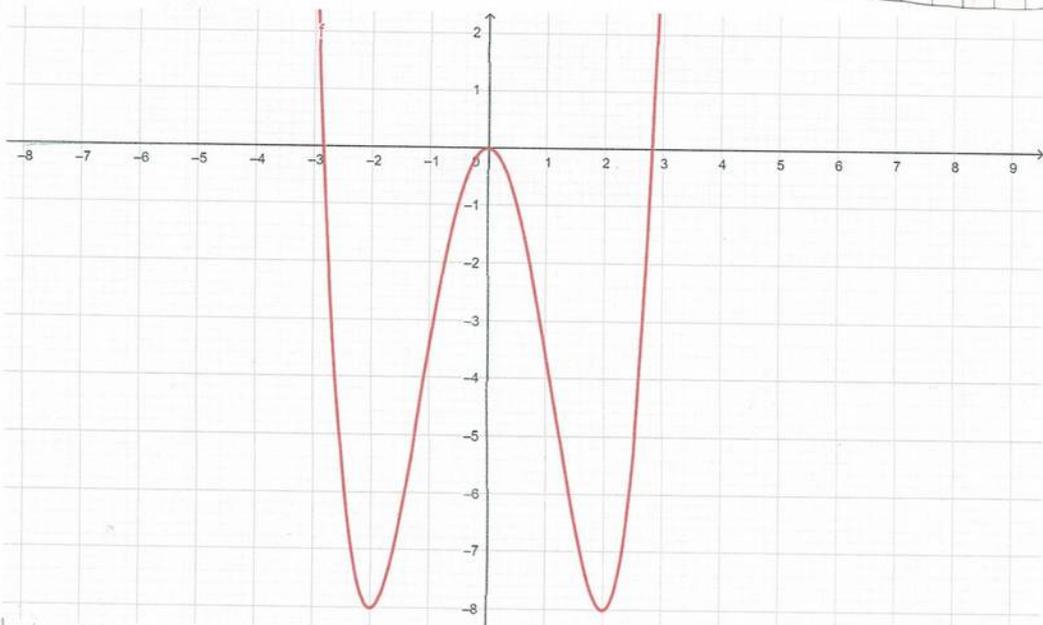
### Aufgabe 4

Gegeben ist der Graph einer Funktion  $f$ .  
Skizziere den Graphen von  $f'$  und  $f''$ .

a)



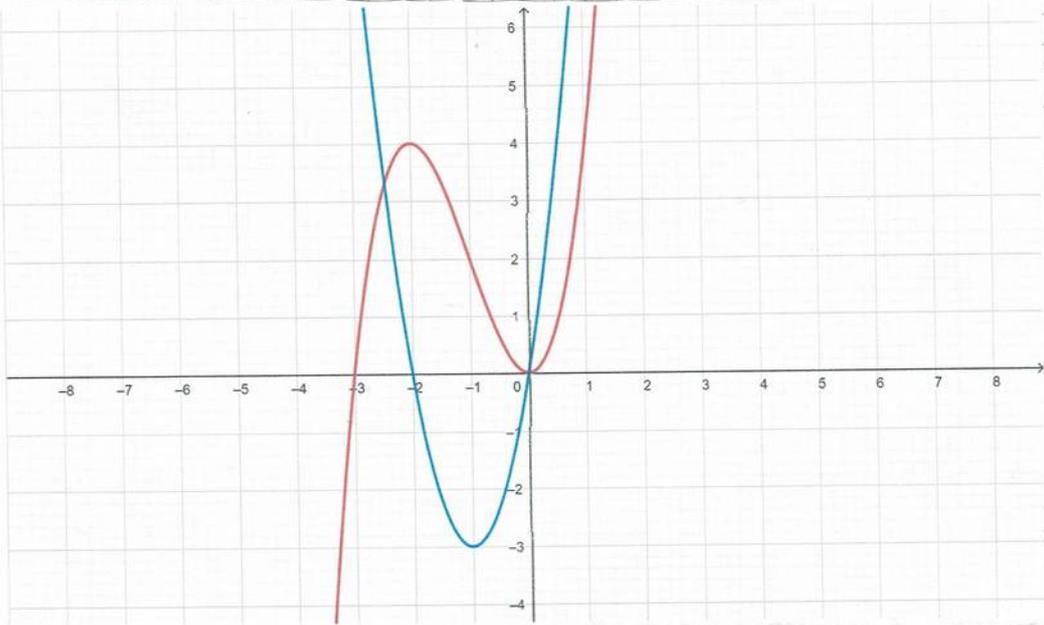
b)



## Aufgabe 5

Gegeben sind die Graphen einer Funktion  $f$  und ihrer Ableitung  $f'$ .

Gib an, welcher Graph zu  $f$  gehört und welcher zu  $f'$ .



## Teil B (mit Hilfsmitteln)

### Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x$

- a) Bestimme rechnerisch die Nullstellen von  $f$
- b) Bestimme rechnerisch die Extrempunkte von  $f$
- c) Bestimme rechnerisch die Wendepunkte von  $f$ .
- d) gib das Monotonieverhalten von  $f$  an
- e) gib das Krümmungsverhalten von  $f$  an
- f) gib den Schnittpunkt von  $f$  mit der  $y$ -Achse an

# LÖSUNGEN

## Teil A

### Aufgabe 1

$$\begin{aligned} \text{a) } f(x) &= x^3 + 15x^2 \\ f'(x) &= 3x^2 + 30x \\ f''(x) &= 6x + 30 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Notw. Bed.: } f''(x) &= 0 \\ 6x + 30 &= 0 \\ 6x &= -30 \\ x &= -5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Hinr. Bed.: } f''(x) &= 0 \text{ und VZW von } f'' \\ f'(-6) &= 6 \cdot (-6) + 30 = -6 \\ f''(0) &= 30 \\ \Rightarrow \text{VZW von } - \text{ nach } + \\ \Rightarrow \text{RL-Wendepunkt bei } x &= -5 \end{aligned}$$

y-Wert

$$\begin{aligned} f(-5) &= (-5)^3 + 15 \cdot (-5)^2 \\ &= -125 + 375 \\ &= 250 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{WP } (-5/250)$$

$$\begin{aligned} \text{b) } f(x) &= -x^3 + 6x^2 \\ f'(x) &= -3x^2 + 12x \\ f''(x) &= -6x + 12 \end{aligned}$$

$$\text{Notw. Bed.: } f''(x) = 0$$

$$\begin{aligned} -6x + 12 &= 0 \\ 12 &= 6x \\ 2 &= x \end{aligned}$$

Hinr. Bed.:  $f''(x) = 0$  und VZW von  $f''$

$$f''(0) = 12$$

$$f''(3) = -6 \cdot 3 + 12 = -6$$

$\Rightarrow$  VZW von  $+$  nach  $-$

$\Rightarrow$  LR-Wendepunkt bei  $x=2$

Y-Wert

$$f(2) = -2^3 + 6 \cdot 2^2 = -8 + 24 = 16$$

$\Rightarrow$  WP(2|16)

c)  $f(x) = 5x^2 + 10x + 2$   
 $f'(x) = 10x + 10$   
 $f''(x) = 10$

Notw. Bed.:  $f''(x) = 0$   
 $10 = 0$   $\Downarrow$

$\Rightarrow$  Kein Wendepunkt vorhanden

## Aufgabe 2

a)  $f(x) = x^3 + 12x^2$   
 $f'(x) = 3x^2 + 24x$   
 $f''(x) = 6x + 24$

$$6x + 24 = 0$$

$$6x = -24$$

$$x = -4$$

$$f''(-5) = 6 \cdot (-5) + 24 = -6$$

$$f''(0) = 24$$

$$\Rightarrow -\infty < x < -4 \quad \text{nach rechts gekrümmt}$$

$$-4 < x < \infty \quad \text{nach links "}$$

$$b) f(x) = 5x^2$$

$$f'(x) = 10x$$

$$f''(x) = 10$$

$\Rightarrow$  ununterbrochen nach links gekrümmt

### Aufgabe 3

Nullstellen:

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 3x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 3) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$x^2 = 3 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$x_1 = \sqrt{3}$$

$$x_2 = -\sqrt{3}$$

Extremstellen:

Notw. Bed.:  $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$3x^2 - 3 = 0$$

$$3x^2 = 3$$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = -1$$

Hinr. Bed.:  $f'(x) = 0$  und VZW von  $f'$

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 - 3 = 3 \cdot 4 - 3 = 9$$

$$f'(0) = -3$$

$$f'(2) = 3 \cdot 2^2 - 3 = 9$$

⇒ Hochpunkt bei  $x = -1$   
Tiefpunkt bei  $x = 1$

Extremstellen → y-Werte nicht verlangt

Wendestellen:

Notw. Bed.:  $f''(x) = 0$

$$f''(x) = 6x$$

$$6x = 0$$

$$x = 0$$

Hinr. Bed.:  $f''(x) = 0$  und VZW von  $f''$

$$f''(-1) = -6$$

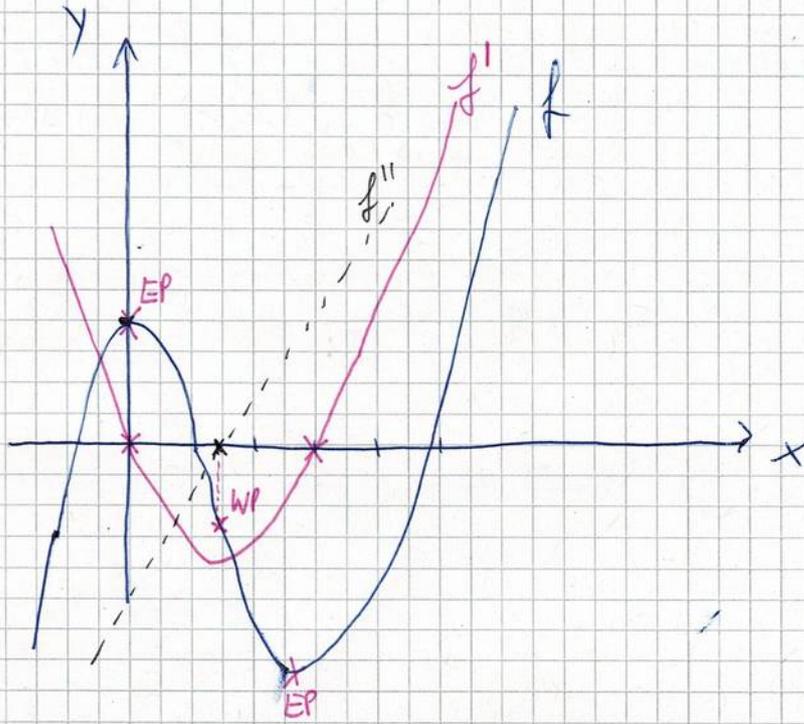
$$f''(1) = 6$$

⇒ RL-Wendepunkt bei  $x = 0$

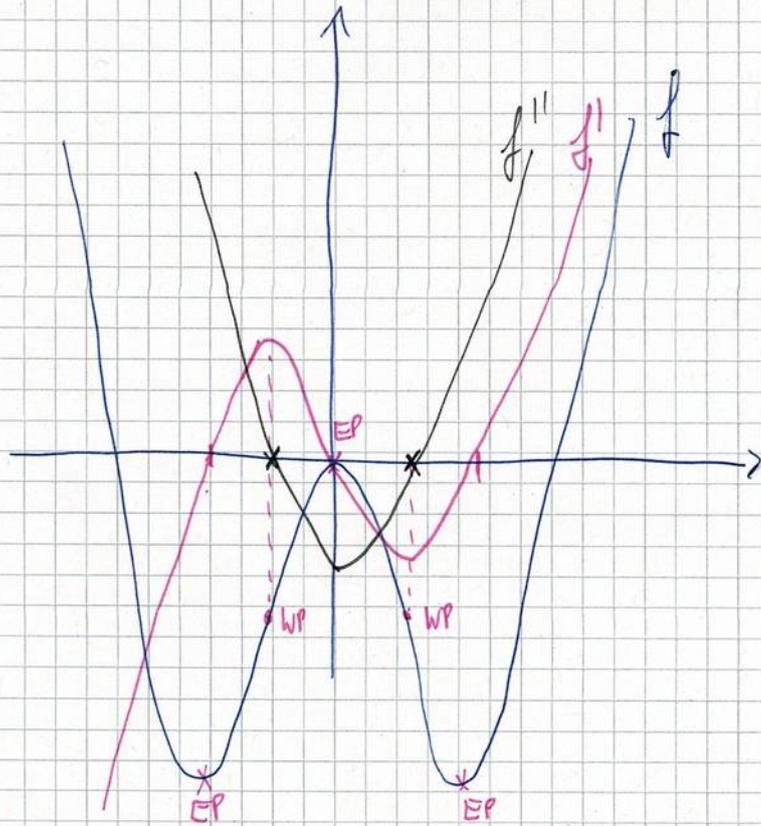
Wendestellen → y-Werte nicht verlangt

# Aufgabe 4)

a)



b)



## Aufgabe 5

rot: Graph von  $f$

blau: Graph von  $f'$

## Teil B

### Aufgabe 1

a)  $f(x) = 0$

$$x^3 + 4x^2 + 5x = 0$$

$$x \cdot (x^2 + 4x + 5) = 0$$

$$x = 0$$

$$x^2 + 4x + 5 = 0$$

$$x = -2 \pm \sqrt{4-5}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{-1}$$



eine Nullstelle:  $x = 0$

b)  $f(x) = x^3 + 4x^2 + 5x$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x + 5$$

Nötw. Bed.:  $f'(x) = 0$

$$3x^2 + 8x + 5 = 0$$

$$x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{5}{3} = 0$$

$$x = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{5}{3}}$$

$$x = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{16}{9} - \frac{15}{9}}$$

$$x = -\frac{4}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9}}$$

$$x = -\frac{4}{3} \pm \frac{1}{3}$$

$$x_1 = -\frac{5}{3} \quad x_2 = -1$$

Hinr. Bed.:  $f'(x) = 0$  und V&W von  $f'$

$$f'(-2) = 3 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 5 = 1$$

$$f'(-\frac{4}{3}) = 3 \cdot (-\frac{4}{3})^2 + 8 \cdot (-\frac{4}{3}) + 5 = -\frac{1}{3}$$

$$f'(0) = 5$$

$\Rightarrow$  Hochpunkt bei  $x = -\frac{5}{3}$

Tiefpunkt bei  $x = -1$

y-Werte:

$$f(-\frac{5}{3}) = (-\frac{5}{3})^3 + 4 \cdot (-\frac{5}{3})^2 + 5 \cdot (-\frac{5}{3}) = -\frac{50}{27}$$

$$f(-1) = -1 + 4 - 5 = -2$$

$\Rightarrow$  HP  $P(-\frac{5}{3} / -\frac{50}{27})$   
TP  $P(-1 / -2)$

c)  $f''(x) = 6x + 8$

Notw. Bed.:  $f''(x) = 0$

$$6x + 8 = 0$$

$$6x = -8$$

$$x = -\frac{4}{3}$$

Hinr. Bed.:  $f''(x) = 0$  und VZW von  $f''$

$$f''(-2) = 6 \cdot (-2) + 8 = -4$$

$$f''(0) = 8$$

$\Rightarrow$  RL-Wendepunkt

y-Wert

$$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{52}{27}$$

$$\Rightarrow \text{WP}\left(-\frac{4}{3} \mid -\frac{52}{27}\right)$$

d)  $-\infty < x < -\frac{5}{3}$  streng mo. wachsend

$-\frac{5}{3} < x < -1$  " " fallend

$-1 < x < \infty$  " " wachsend

e)  $-\infty < x < -\frac{4}{3}$  nach rechts gekrümmt

$-\frac{4}{3} < x < \infty$  " links "

f) S(0/0)