

Aufgaben (Teil B)

Aufgabe 1

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von g in der Anlage.

Die Graphen von f und g begrenzen für $1 \leq x \leq 3$ einen See. Der Graph von f bildet modellhaft die nördliche und die zu g gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.

Die x -Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

- a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g .

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.]

- b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1|0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und g ist. Der Graph der Funktion f schneidet die x -Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

- c) Bestimmen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte. Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in der Anlage ein.

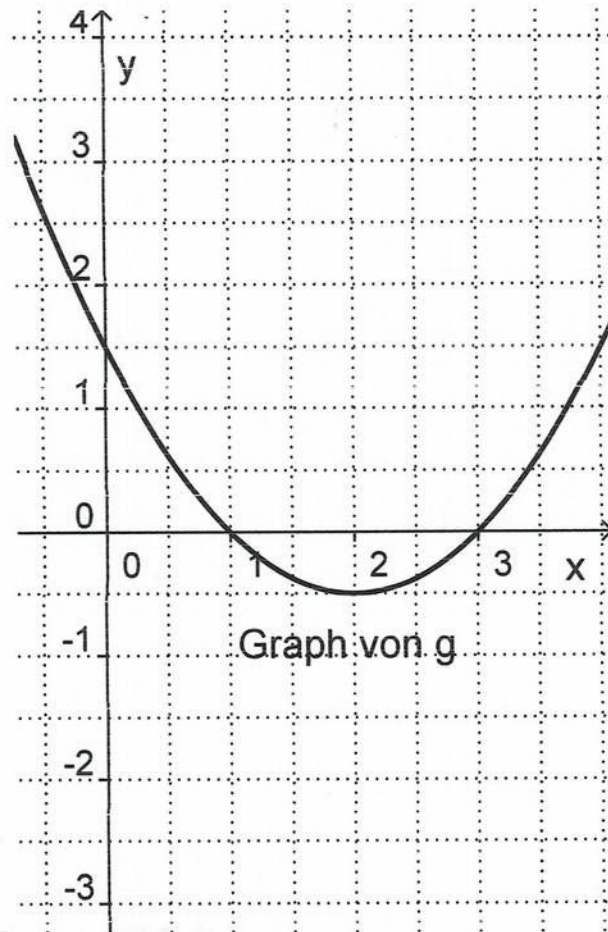
- d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern.

e) gestrichen

- f) Im Punkt $P(3|0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft.

Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.

Anlage zu Aufgabe 1



Aufgabe 2

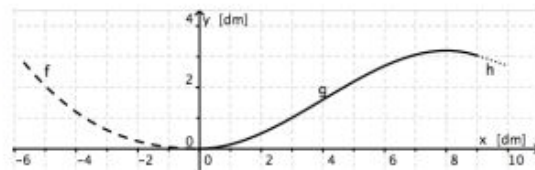
Balance

Stefan Heiliger ist ein bekannter Produktdesigner für Relax-Sessel, Sitzmöbel und Liegen. Er hat sowohl bei dem berühmten Designer Wilhelm Wagenfeld als auch im Automobil-Design bei Daimler-Benz gearbeitet. Formen, die er für seine Sessel benutzt, können an Sportwagen-Kurven oder an mathematische Kurven erinnern.



Einer seiner Sessel, den es in unterschiedlichen Ausführungen gibt, heißt „Balance“. Ein Modell sieht man im Bild oben.¹ Es besteht aus einem Metallgestell, einer Liegefläche und einem Kopfteil. Für die Aufgabenteile a) und b) wird davon ausgegangen, dass sich der Sessel im Gleichgewichtszustand wie oben abgebildet befindet.

Die untere Linie des Metallgestells kann näherungsweise mit Hilfe von drei Funktionen f , g und h beschrieben werden. Man legt den Ursprung des Koordinatensystems in den tiefsten Punkt des Gestells (siehe Skizze rechts). Die Achsen werden in Einheiten unterteilt, die einem Dezimeter entsprechen.



- a) Im Bereich $0 \leq x \leq 9$ kann das Gestells durch eine ganzrationale Funktion dritten Grades g beschrieben werden. Diese hat am linken Rand in $P(0|0)$ einen Punkt mit der Steigung 0 und für positive x -Werte ihren höchsten Punkt 8 dm weiter rechts mit der Höhe 3,2 dm. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung für die Funktion g .

Weisen Sie nach, dass mit Ihrer gefundenen Lösung tatsächlich an der gewünschten Stelle ein Hochpunkt liegt.

(Zur Kontrolle: $g(x) = -0,0125x^3 + 0,15x^2$)

(8 Punkte)

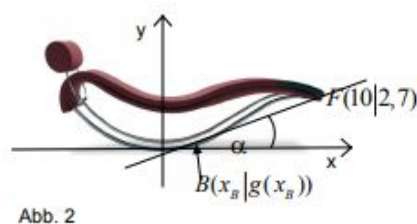
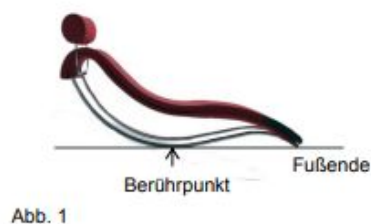
- b) Das rechte Ende des Gestells besteht im Bereich $9 \leq x \leq 10$ aus einem geraden Anschlussstück, das durch die Funktion h beschrieben werden kann. Es schließt knickfrei an den Gestellteil, der durch g beschrieben wird, an.

Berechnen Sie, in welcher Höhe und mit welcher Steigung dieses gerade Stück an den Graphen von g anschließt (Funktionsgleichung von g siehe Aufgabenteil a).

Ermitteln Sie, in welcher Höhe das Geradenstück endet.

Ermitteln Sie die Funktionsgleichung von h .

- c) Der Sessel kann höchstens so weit nach vorne schwingen, bis das Fußende des Sessels auf den Boden kommt – siehe Abbildung 1. In Abbildung 2, die den Sessel im Gleichgewichtszustand zeigt, befindet sich dieses Fußende in $F(10|2,7)$.



Wie weit der Sessel nach vorne kippen kann, lässt sich mit Hilfe der Tangente vom Fußpunkt F an den Graphen von g ermitteln. Der Berührungspunkt B der Tangente mit dem Graphen hat die Koordinaten

$$B(x_B | g(x_B)).$$

Jemand behauptet, x_B sei die Wendestelle des Graphen von g . Begründen Sie ohne Rechnung mit einem mathematischen Argument, warum das nicht stimmen kann.

Erläutern Sie, was die Gleichung $g'(x_B) = \frac{2,7 - g(x_B)}{10 - x_B}$ beschreibt.

Mit Hilfe dieser Gleichung wurde die Berührstelle $x_B = 1,1$ und die Funktionsgleichung der Tangente im Berührungspunkt B mit $t(x) = 0,2846x - 0,1486$ bestimmt.

Ermitteln Sie mit Hilfe dieser Gleichung und $\tan \alpha$ den Winkel α , um den der Sessel höchstens nach vorne kippen kann.

Aufgabe 3

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4}$ mit $x \in \mathbb{R}$.

- Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrempunkte, Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an! Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \leq x \leq 6,5$!
- Auf dem Graphen der Funktion f existiert ein Punkt $Q(q; f(q))$ mit $0 < q < 6$. Die Parallele zur y -Achse durch Q schneidet die x -Achse im Punkt P . O bezeichnet den Koordinatenursprung. Ermitteln Sie die Koordinaten von Q so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal ist!
- Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von f an! Ermitteln Sie, wie viele Tangenten es an den Graphen von f gibt, die die Wendetangente senkrecht schneiden?

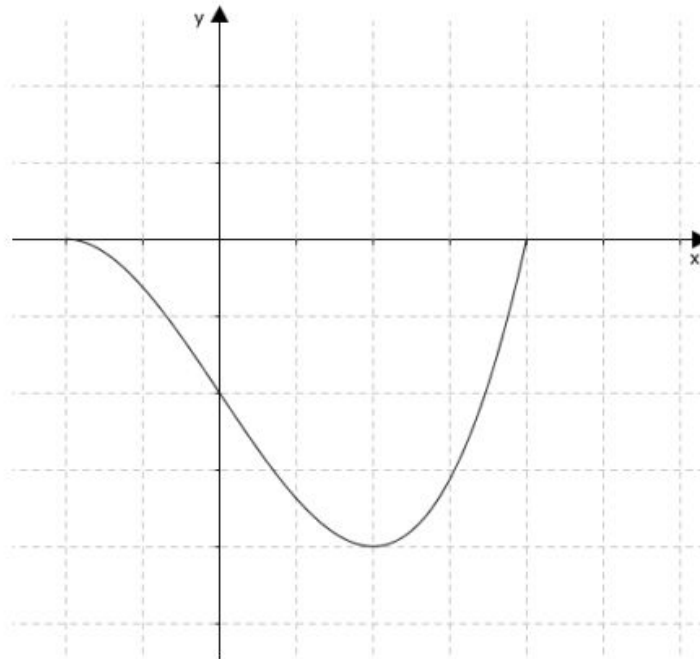
Aufgabe 4

Der Querschnitt eines gleichmäßig angelegten Wassergrabens kann durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = (x+2) \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1\right)$ in dem von den Nullstellen der Funktion begrenzten Intervall beschrieben werden. (Angaben in Metern)

Teilaufgabe 1. (9 BE)

Berechnen Sie die Tiefe und die Breite des Grabens und beschriften Sie die Achsen im Material mit einer geeigneten Skala.

Material



Links neben dem Graben liegt ein Feld, dessen Profil horizontal verläuft. Rechts neben dem Graben steigt das Gelände mit einer Steigung von 5% an.

Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Zeigen Sie, dass der Graph von f an der linken Seite „ohne Knick“ an das Feld anschließt.

Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Berechnen Sie den Winkel, unter dem der Graben an der rechten Seite an das Gelände angrenzt.

Teilaufgabe 3.1. und Teilaufgabe 3.2.
gestrichen

Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

Ein Mitarbeiter der Wasserbehörde misst regelmäßig den Wasserstand im Graben. Dabei stellt er fest, dass sich der Wasserstand periodisch verändert: Während der Graben im April immer vollständig gefüllt ist, erreicht er regelmäßig im Oktober seinen tiefsten Wasserstand.

Um anormale Wasserstände (z.B. Gefahr von Hochwasser) erkennen zu können, modelliert der Mitarbeiter die normalen Wasserstände. Seine Aufzeichnungen sind im nebenstehenden Kasten in den Zeilen (1) bis (5) dokumentiert.

- (1) 0 – Januar, 1 – Februar, 2 – März usw.
- (2) $g(x) = a \cdot \cos(b \cdot (x + c)) + d$
- (3) $a = 1, d = -1, c = -3$
- (4) Periodenlänge 12, also $12 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$
- (5) $g(6) = -1$

Erläutern Sie diese im Sachzusammenhang.

Aufgabe 5

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0.5t}$ die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t . Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear (siehe Anlage).

- a) Berechnen Sie die maximale Konzentration im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist. **20 P**
- b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird. **10 P**
- c) Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente k am Graphen von f im Punkt $(6 | f(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist. **15 P**

d) gestrichen

- e) Ein Patient nimmt das Medikament 4 Stunden nach der ersten Einnahme in gleicher Dosierung ein weiteres Mal ein. Nehmen Sie in einem vereinfachenden Modell an, dass sich die Konzentrationen im Blut dieses Patienten addieren und dass der Abbau (und damit auch der Übergang in die „lineare Zone“) für beide Medikationen unabhängig voneinander erfolgt.

Skizzieren Sie zur Grafik in der Anlage die Darstellung der Gesamtkonzentration bis zum vollständigen Abbau nach dem eben beschriebenen Modell.

15 P

- f) Ein Patient muss mit starken Nebenwirkungen rechnen, wenn die Konzentration des Medikamentes im Blut 10 Milligramm pro Liter übersteigt.

Entscheiden Sie, ob der Patient aus Aufgabenteil e) gefährdet ist.

10 P

Um das Medikament in seiner Wirksamkeit zu verbessern, verändert der Hersteller seine Zusammensetzung. Die Konzentration des Medikamentes im Blut wird wieder durch eine Funktion der Form $g(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. t ist wiederum die Zeit in Stunden nach der Einnahme und $g(t)$ wird in der Einheit $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ (Milligramm pro Liter) gemessen.

- g) Bestimmen Sie die Konstanten a und b , wenn die Konzentration genau vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert von $10 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreichen soll.

15 P



Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion $f(x) = (4x^2 + 10x + 11) \cdot e^{2x}$. Ihre Stammfunktion ist von der Gestalt $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{2x}$. Bestimme rechnerisch a , b und c .

Aufgabe 7

Skatebahn

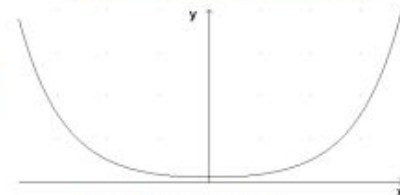
Hinweis: Runden Sie alle Ergebnisse auf zwei Dezimalstellen hinter dem Komma.

Skate-Parks stellen Bahnen zur Verfügung, die mit Skateboards, Inlinern oder BMX-Rädern befahren werden können.

Der Betreiber eines Skate-Parks schreibt einen Wettbewerb aus. Jugendliche sollen einen Vorschlag für die Konstruktion einer Bahn einreichen.

Eine Gruppe von Jugendlichen nimmt an dem Wettbewerb teil. Sie stellen Skatebahnen im Profil als Graphen von Funktionen dar (Siehe Grafik und Profil).

In dieser Aufgabe werden die Modellierungen einer Skatebahn durch unterschiedliche Funktionen untersucht. Das Koordinatensystem wird dabei so gewählt, dass der Tiefpunkt der Bahn auf der y -Achse und die x -Achse auf der Höhe des Erdbodens liegt.



Eine Bahn im Profil

- a) Der Betreiber des Skate-Parks gibt bestimmte Eckdaten für eine Bahn vor. An der tiefsten Stelle soll die Bahn 0,1 m über dem Erdboden liegen. In einem Abstand von 4 m zur tiefsten Stelle muss die Bahn eine Höhe von 5 m aufweisen.

Eine erste Modellierung, die sich nur auf den Bereich $0 \leq x \leq 4$ beschränkt, wird mit der Funktion f vom Typ $f(x) = a \cdot e^{kx}$ vorgenommen.

Ermitteln Sie aus den oben genannten Anforderungen an den *rechten* Teil der Bahn den Wert der Parameter a und k und die Funktionsgleichung.

(Kontrollergebnis: $f(x) = 0,1e^{0,98x}$ für $0 \leq x \leq 4$)

(3 Punkte)

- b) Skizzieren Sie den *linken* Teil der Bahn mit Hilfe der Funktion g mit der Gleichung $g(x) = 0,1e^{-0,98x}$ für $-4 \leq x \leq 0$ in das Koordinatensystem im Anhang.

Geben Sie die Ableitungen f' und g' an.

Begründen Sie unter Verwendung der Steigungen $f'(0)$ bzw. $g'(0)$, weshalb es nicht sinnvoll ist, die Bahn mit Hilfe der Funktionen f und g zu konstruieren.

(5 Punkte)

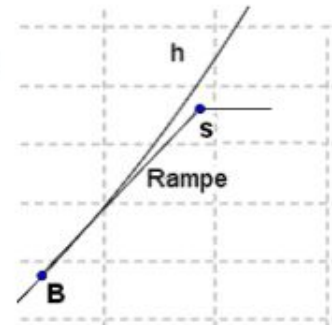
Eine weitere Modellierung verwendet die Funktion h mit $h(x) = 0,05 e^{1,15x} + 0,05 e^{-1,15x}$ und die Ableitung h' mit $h'(x) \approx 0,06 e^{1,15x} - 0,06 e^{-1,15x}$ für $-4 \leq x \leq 4$.

- c) Entscheiden Sie mit Hilfe einer Überprüfung der Funktionswerte, ob die Bahn unter Verwendung der Funktion h im gesamten Intervall die geforderten Kriterien näherungsweise erfüllt.

Ermitteln Sie rechnerisch den Tiefpunkt der Bahn.

(7 Punkte)

- d) Die Bahn mit der Funktion h für $x > 0$ hat im *rechten* Teil eine Rampe. Sie ermöglicht einen leichten Einstieg in die Bahn. Die Rampe, welche als Stück einer Geraden beschrieben werden kann, startet im Punkt $S(3,50 | 2,57)$ und soll bei $B(3,05 | 1,67)$ tangential in die Bahn geführt werden. Entscheiden Sie mittels Rechnung, ob diese Bedingung erfüllt werden kann.

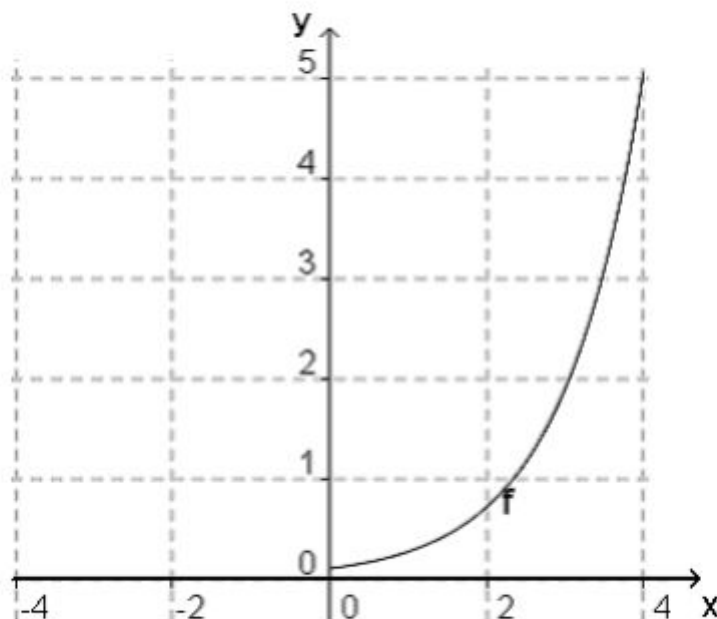


(4 Punkte)

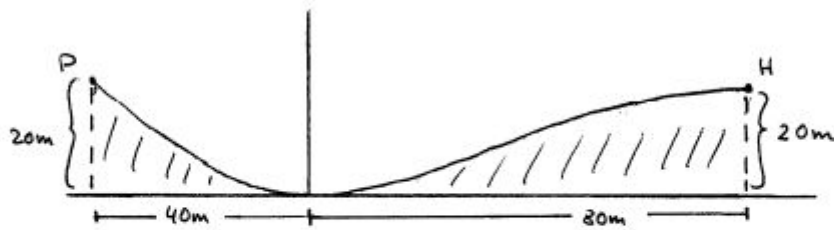
- e) Zeigen Sie, dass H mit der Gleichung $H(x) = \frac{1}{23} e^{1,15x} - \frac{1}{23} e^{-1,15x}$ eine Stammfunktion von h ist.

4

Anhang:



Aufgabe 8



Ein Kanalbett soll mithilfe einer Funktion beschrieben werden. Dazu ist ein erster Ansatz gemacht worden:

$$h(x) = \begin{cases} -2 \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) + 2; & -4 \leq x \leq 0 \\ -\cos\left(\frac{\pi}{8}x\right) + 1; & 0 < x \leq 8 \end{cases}$$

Eine Einheit entspricht hierbei 10 m in der Natur.

- Zeigen Sie, dass der Graph von h durch die Punkte P , den Koordinatenursprung und H geht, im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt und in H einen Hochpunkt hat.
- Zeichnen Sie den Graphen von h .
- $h(x)$ ist abschnittsweise definiert. Begründen Sie, warum **nur ein** trigonometrischer Funktionsterm vom Typ $(-a \cdot \cos(b \cdot x) + c)$ nicht ausreicht, um das ganze Kanalbett zu beschreiben.

Ein zweiter vereinfachender Ansatz sieht so aus:

$$f(x) = -\frac{1}{128}x^3 + \frac{3}{32}x^2$$

- Zeigen Sie, dass der Graph von f ebenso wie der von h durch die gegebenen Punkte geht, im Koordinatenursprung einen Tiefpunkt und in H einen Hochpunkt hat.
- Zeichnen Sie den Graphen von f in ein zweites Koordinatensystem.

f) gestrichen

- g*) Von H soll eine unterirdische, gerade Leitung ausgehen und im Punkt $B(u | f(u))$ mit $0 < u < 8$ ins Kanalbett münden. Bestimmen Sie B so, dass die Leitung möglichst steil verläuft.

LÖSUNGEN (Teil B)

Aufgabe 1

- a) Scheitelpunkt $S(2|-0,5)$
weiterer Punkt des Graphen $A(1|0)$

$$g(x) = a \cdot (x-2)^2 - 0,5$$

$$\begin{aligned} A(1|0) \text{ auf } g &\Rightarrow g(1) = 0 \\ a(1-2)^2 - 0,5 &= 0 \\ a - 1 - 0,5 &= 0 \\ a - 0,5 &= 0 \\ a &= 0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow g(x) &= 0,5 \cdot (x-2)^2 - 0,5 \\ &= 0,5 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 0,5 \\ &= 0,5x^2 - 2x + 2 - 0,5 \\ &= 0,5x^2 - 2x + 1,5 \end{aligned}$$

- b) ① zu zeigen: $S(1|0)$ gemeinsamer Punkt

$$f(1) = -1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1 + 4 - 3 = 0$$

$$g(1) = 0,5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1,5 = 0,5 - 2 + 1,5 = 0$$

$\Rightarrow$ Behauptung

② restliche gemeinsame Punkte:

$$f(x) = g(x) \\ -x^3 + 4x^2 - 3x = 0,5x^2 - 2x + 1,5$$

GTR...

$$x_1 = -0,5$$

$$x_2 = 1$$

$$x_3 = 3$$

$$y\text{-Werte: } f(-0,5) = -(-0,5)^3 + 4 \cdot (-0,5)^2 - 3 \cdot (-0,5) \\ = 2,625$$

$$f(1) = 0$$

$$f(3) = -3^3 + 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 \\ = 0$$

$$\Rightarrow S_1(-0,5/2,625)$$

$$S_2(1/0)$$

$$S_3(3/0)$$

c) ① lokale Extrempunkte

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$$

$$f'(x) = -3x^2 + 8x - 3$$

$$f''(x) = -6x + 8$$

$$\text{Notw. Bed.: } f'(x) = 0$$

$$-3x^2 + 8x - 3 = 0$$

$$| : (-3)$$

$$x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0$$

$$x = \frac{8}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{6}\right)^2 - 1}$$

$$x_1 = 2,22$$

$$x_2 = 0,45$$

Hinreichende Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f''(2,22) = -6 \cdot 2,22 + 8 = -5,32 \quad \text{HP}$$

$$f''(0,45) = -6 \cdot 0,45 + 8 = 5,3 \quad \text{TP}$$

y-Werte:

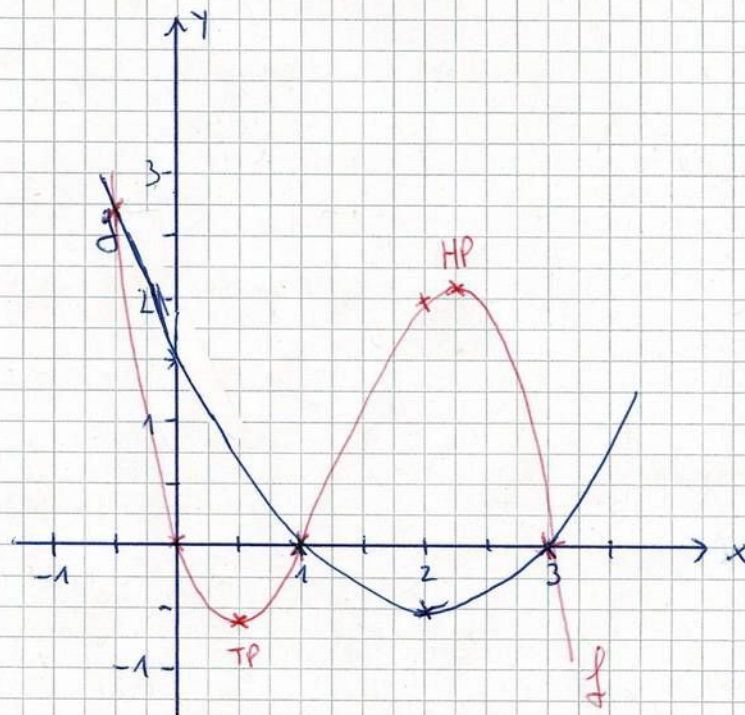
$$f(2,22) = 2,11$$

$$f(0,45) = -0,63$$

$$\Rightarrow \text{HP } (2,22 | 2,11)$$

$$\text{TP } (0,45 | -0,63)$$

② Zeichnung



$$f(0) = 0$$

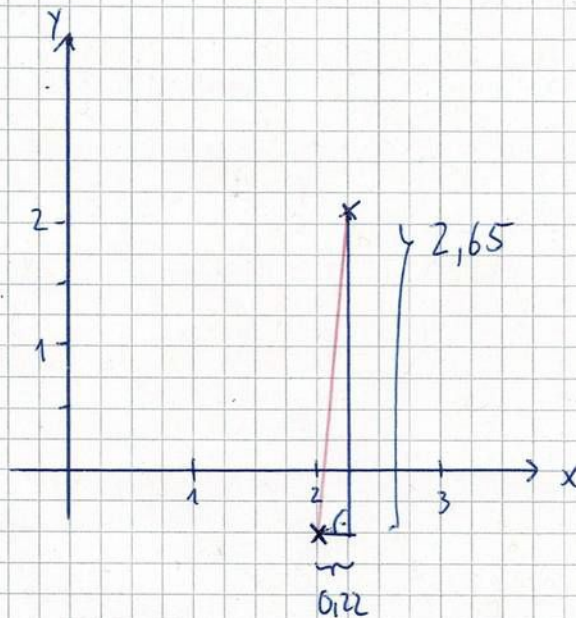
$$f(0,5) = -0,625$$

$$f(1) = 0$$

$$f(1,5) = 1,125$$

$$f(2) = 2$$

- d) nördlichster Punkt: HP von f $HP(2,22/2,11)$
 südlichster Punkt: Scheitelpunkt von g
 $S(2|-0,5)$



Satz des Pythagoras:

$$\text{Abstand}^2 = 2,65^2 + 0,22^2$$

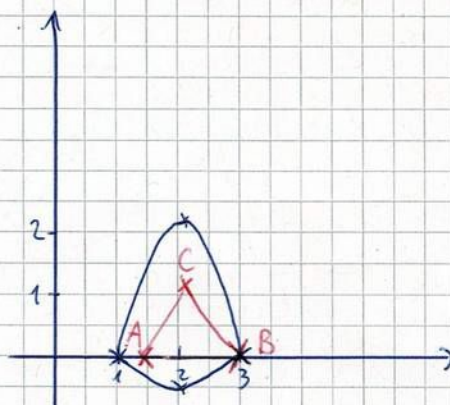
$$\text{Abstand}^2 = 7,0709 \quad | \sqrt{}$$

$$\text{Abstand} = 2,6591... \text{ km}$$

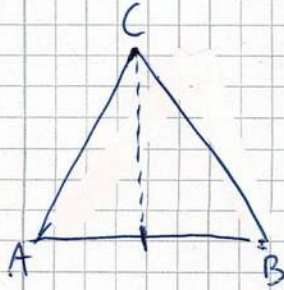
$$= 2659,1 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \text{Abstand } 2659,1 \text{ m}$$

f)



gleichseitiges Dreieck: alle Seiten gleich lang
 Umfang insgesamt 5 km
 $\Rightarrow$ eine Seite ist $\frac{5}{3}$ km lang



$$B(3|0)$$

$$\frac{5}{3} \text{ km nach Werten: } 3 - \frac{5}{3} = \frac{15}{3} - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$

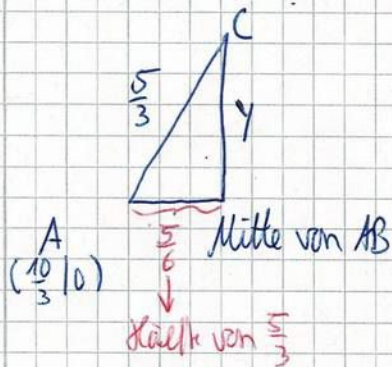
$$A\left(\frac{10}{3} | 0\right)$$

In einem gleichseitigen Dreieck muss C auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ liegen

$$\Rightarrow C\left(\frac{25}{6} | y\right)$$

Mitte zwischen $\frac{10}{3}$ und 3

$$\text{bzw. } \frac{10}{3} \text{ und } \frac{15}{3} : \frac{12,5}{3} = \frac{25}{6}$$



$$y^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$y^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$y^2 = 2,08\bar{3}$$

$$y = 1,44$$

$$\Rightarrow C\left(\frac{25}{6} | 1,44\right)$$

Aufgabe 2

a)	$g(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ $g'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ $g''(x) = 6ax + 2b$ $g(0) = 0 \Rightarrow d = 0$ $g'(0) = 0 \Rightarrow c = 0$ $g(8) = 3,2 \Rightarrow 3,2 = a \cdot 8^3 + b \cdot 8^2$ $g'(8) = 0 \Rightarrow 0 = 3 \cdot a \cdot 8^2 + 2 \cdot b \cdot 8$ Die Lösung des linearen Gleichungssystems $\begin{cases} 512a + 64b = 3,2 \\ 192a + 16b = 0 \end{cases} \text{ liefert } a = -0,0125 \text{ und } b = 0,15$ Damit ist $g(x) = -0,0125x^3 + 0,15x^2$ eine mögliche Lösung. Wegen $g''(8) < 0$ liegt an der in der Aufgabe geforderten Stelle ein Hochpunkt. Also ist $g(x) = -0,0125x^3 + 0,15x^2$ die geforderte Funktionsgleichung.	;
b)	Höhe am Ansatzpunkt des geraden Anschlussstücks: $g(9) = 3,0375$ Steigung am Ansatzpunkt des geraden Anschlussstücks: $g'(9) = -0,3375$ Höhe h am Ende des geraden Anschlussstücks: $h = g(9) - g'(9) = 2,7$ Geradengleichung: $h(x) = mx + b$; $m = g'(9) = -0,3375$ Mit zum Beispiel $h(10) = 2,7$ ist $b = 2,7 + 0,3375 \cdot 10 = 6,075$, damit ist $h(x) = -0,3375x + 6,075$	;
c)	Zum Beispiel: Eine Wendetangente müsste den Graphen von g schneiden, die betrachtete Tangente liegt in einer Umgebung von x_B ganz unterhalb des Graphen. $g'(x_B)$ gibt die Steigung des Graphen im Punkt B an. Da es sich bei der Geraden durch B und F um die Tangente an den Graphen im Punkt B handelt, kann man diese Steigung $g'(x_B)$ auch durch die Sekantensteigung m zwischen F und B ermitteln: $m = \frac{y_F - y_B}{x_F - x_B} = \frac{2,7 - g(x_B)}{10 - x_B}$. Tangentengleichung: $t(x) = 0,2846x - 0,1486$. $\tan \alpha = m \Rightarrow \alpha \approx 15,9^\circ$ Der Sessel kann höchstens um einen Winkel von ca. 16° gekippt werden.	

Aufgabe 3

$$a) f(x) = \frac{6}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 = 1,5x^2 - 0,25x^3$$

① Schnittpunkte mit den Achsen

$$S_y(0|0) \quad y\text{-Achse}$$

$$1,5x^2 - 0,25x^3 = 0$$

$$x^2 \cdot (1,5 - 0,25x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$1,5 = 0,25x$$

$$x_2 = 6$$

$$N_1(0|0)$$

$$N_2(6|0) \quad x\text{-Achse}$$

② Extrempunkte

$$f(x) = 1,5x^2 - 0,25x^3$$

$$f'(x) = 3x - 0,75x^2$$

$$f''(x) = 3 - 1,5x$$

$$f'''(x) = -1,5$$

$$\text{Notw. Bed.: } f'(x) = 0$$

$$3x - 0,75x^2 = 0$$

$$x \cdot (3 - 0,75x) = 0$$

$$x_1 = 0$$

$$3 = 0,75x$$

$$4 = x_2$$

$$\text{Hinr. Bed.: } f''(x) \neq 0 \quad f'''(x) \neq 0$$

Hinr. Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f'(0)=3 \quad \text{TP}$$

$$f'(4)=3-1,5 \cdot 4 = -3 \quad \text{HP}$$

y-Werte: $f(0)=0$ TP(0/0)

$f(4)=8$ HP(4/8)

③ Wendepunkt

Notw. Bed.: $f''(x)=0$

$$3-1,5x=0$$

$$3=1,5x$$

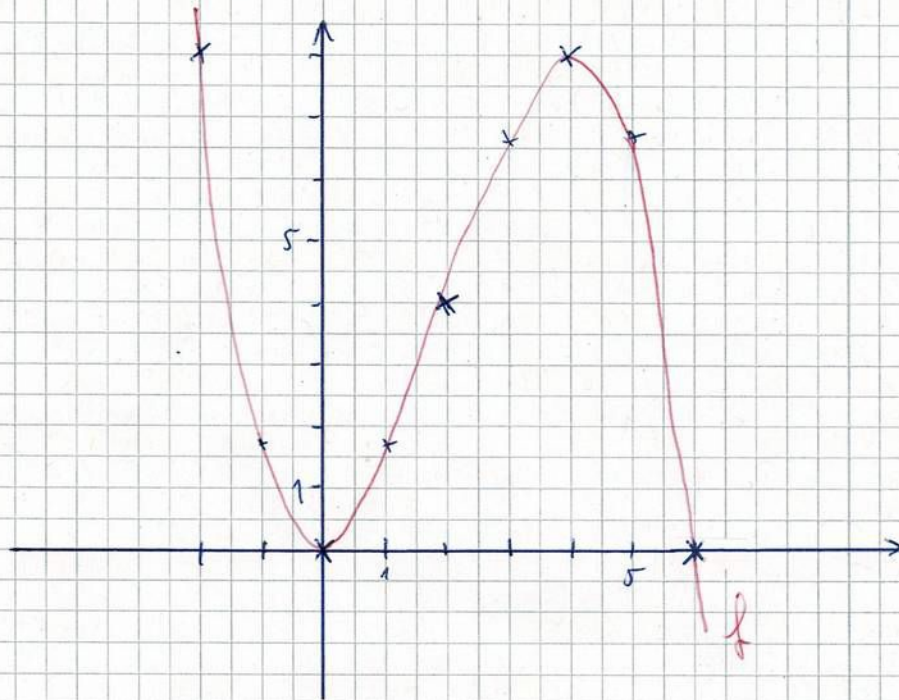
$$2=x$$

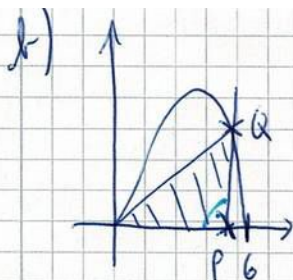
Hinr. Bed.: $f''(x)=0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f''(2)=-1,5 \neq 0$$

y-Wert: $f(2)=4$

$$\Rightarrow \text{WP}(2/4)$$





Extremwertaufgabe

$$\begin{aligned}
 A_{\text{Dreieck}} &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot f(q) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot q \cdot (1,5q^2 - 0,25q^3) \\
 &= 0,5q \cdot (1,5q^2 - 0,25q^3) \\
 &= 0,75q^3 - 0,125q^4
 \end{aligned}$$

$$A(q) = 0,75q^3 - 0,125q^4$$

$$A'(q) = 2,25q^2 - 0,5q^3$$

$$A''(q) = 4,5q - 1,5q^2$$

Notw. Bed.: $A'(q) = 0$

$$2,25q^2 - 0,5q^3 = 0$$

$$q^2 \cdot (2,25 - 0,5q) = 0$$

$$q_1 = 0$$

$$2,25 = 0,5q$$

$$4,5 = q_2$$

Hinr. Bed.: $A'(q) = 0$ und $A''(q) \neq 0$

$$A''(4,5) = 4,5 \cdot 4,5 - 1,5 \cdot 4,5^2 = -10,125 \text{ MP}$$

Ränder:

$$A(0) = 0$$

$$A(4,5) = 0,75 \cdot 4,5^3 - 0,125 \cdot 4,5^4 \approx 17,086$$

$$A(6) = 0,75 \cdot 6^3 - 0,125 \cdot 6^4 = 0$$

$$f(4,5) = 7,59375$$

$$\Rightarrow Q(4,5 | 7,59375)$$

c) Wendetangente = Tangente durch den Wendepunkt

① WP (2/4)

$$f'(2) = 3$$

$$\Rightarrow t(x) = 3x + b$$

$$\text{WP (2/4) auf } t \Rightarrow t(2) = 4$$

$$3 \cdot 2 + b = 4$$

$$6 + b = 4$$

$$b = -2$$

$$\Rightarrow t(x) = 3x - 2$$

② senkrecht schneiden

$g(x)$ schneide t senkrecht

$\Leftrightarrow$ Produkt der Steigungen von g und t ist -1

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{3}x + b$$

gibt es Punkte, die als Ableitung $-\frac{1}{3}$ haben?

$$f'(x) = -\frac{1}{3}$$

$$3x - 0,75x^2 = -\frac{1}{3}$$

GTR...

$$x_1 = -0,108$$

$$x_2 = 4,108$$

$$x_2 = 7,100$$

Fall 1: $x_1 = -0,108$

$$f(-0,108) = 0,018$$

$$g_1(x) = -\frac{1}{3}x + b$$

$$P_1(-0,108 | 0,018) \text{ auf } g_1$$

$$\Rightarrow g_1(-0,108) = 0,018$$

$$-\frac{1}{3} \cdot (-0,108) + b = 0,018$$

$$0,036 + b = 0,018$$

$$b = -0,018$$

$$\Rightarrow g_1(x) = -\frac{1}{3}x - 0,018$$

Fall 2: $x_2 = 4,108$

$$f(4,108) = 7,98$$

$$g_2(x) = -\frac{1}{3}x + b$$

$$P_2(4,108 | 7,98) \text{ auf } g_2$$

$$\Rightarrow g_2(4,108) = 7,98$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 4,108 + b = 7,98$$

$$-1,369\bar{3} + b = 7,98$$

$$b \approx 9,35$$

$$\Rightarrow g_2(x) = -\frac{1}{3}x + 9,35$$

Antwort: Es sind zwei, g_1 und g_2

Aufgabe 4

Durch die Funktion

$$f(x) = (x + 2) \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1 \right)$$

wird der Querschnitt eines Wassergrabens beschrieben. Der Verlauf des Graphen ist dem Material zu entnehmen.

Zunächst sollen Breite und Tiefe des Grabens bestimmt werden. Die Breite entspricht dabei gerade dem Abstand der beiden Nullstellen der Funktion, die Tiefe dem Betrag des y -Wertes des Tiefpunktes.

Nullstellen:

$$0 = (x + 2) \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1 \right)$$

$$0 = (x + 2) \Rightarrow x_1 = -2$$

$$0 = \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1 \right) \Rightarrow x_2 = -2; x_3 = 4$$

Extremstellen:

$$f(x) = (x + 2) \cdot \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{4}x - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{8}x^3 - \frac{3}{2}x - 2$$

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2}$$

$$f''(x) = \frac{3}{4}x$$

$$0 = \frac{3}{8}x^2 - \frac{3}{2} \Rightarrow x = \pm 2$$

$$f''(2) > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f(2) = -4$$

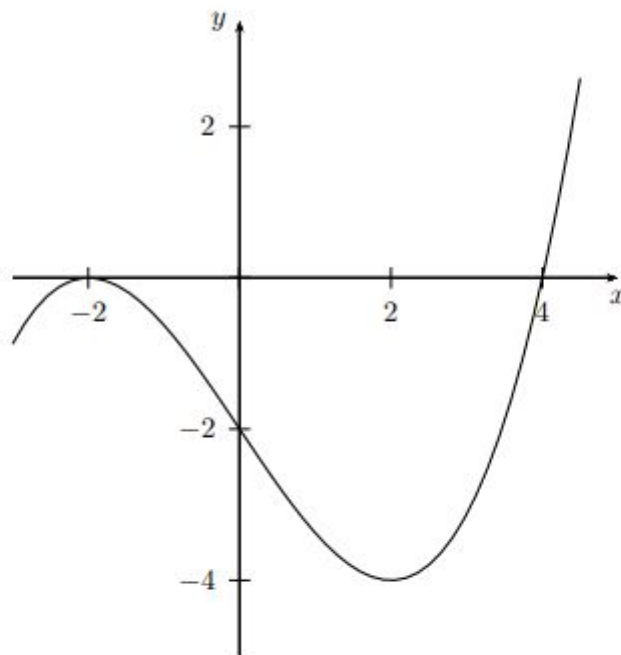
Der Wassergraben ist also 6m breit und 4m tief. Die Skala wird daher wie folgt sinnvoll beschriftet:

Merke:



„Ein Produkt ist Null, wenn einer der Faktoren Null ist“

$\Rightarrow$ Entspricht die Zuordnungsvorschrift einer Funktion einem Produkt, zum Berechnen der Nullstellen nie ausmultiplizieren, sondern faktorweise Null setzen!



Lösung zu Teilaufgabe 2.1 (5 BE)

Auf der linken Seite soll an den Wassergraben ein horizontales Feld angrenzen. Hier soll gezeigt werden, dass der Graben ohne Knick in das Feld übergeht.

Damit die Graphen von zwei Funktionen knickfrei ineinander über gehen, müssen sie an der Übergangsstelle gleiche Steigungen haben, die Funktionswerte der ersten Ableitung an dieser Stelle müssen also gleich sein. Der Sachverhalt lässt sich hier gut argumentieren. Die Wiese soll horizontal verlaufen, ihre Steigung beträgt also $m_{\text{Wiese}} = 0$. Die Funktion des Wassergrabens hat an der Übergangsstelle bei $x = -2$ einen Hochpunkt, also gilt auch $m_f = 0$, der Wassergraben schließt also knickfrei an das Feld an.

Lösung zu Teilaufgabe 2.2 (5 BE)

Der Graben grenzt an der rechten Seite bei $x = 4$ an die Umgebung an. Der Schnittwinkel lässt sich über die Steigung in diesem Punkt bestimmen:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \tan(\alpha) \\ 4,5 &= \tan(\alpha) \Rightarrow \alpha = 77,5^\circ \end{aligned}$$

Der Graben trifft also unter einem Winkel von $77,5^\circ$ auf das angrenzende Gelände.

Lösung zu Teilaufgabe 3.3 (7 BE)

In der abschließenden Teilaufgabe soll die Modellierung des Wasserstandes im Jahresverlauf beschrieben werden. Bekannt ist aus der Aufgabenstellung, dass der Wasserstand sich periodisch ändert und im April sein Maximum, im Oktober dagegen sein Minimum erreicht. Den maximalen Füllstand des Grabens markiert die x -Achse, den minimalen Tiefstand die Gerade mit der Zuordnungsvorschrift $y = -2$. Jetzt sollen die Überlegungen im abgebildeten Kästchen beschrieben werden:

- In Zeile (1) wird die Nomenklatur festgelegt: Eine Einheit auf der x -Achse entspricht jeweils einem Monat, die Achse startet im Ursprung mit dem Januar.
- Der Füllstand des Wassergrabens ändert sich periodisch, so dass sich als Modell eine trigonometrische Funktion anbietet. Hier wird eine Kosinus-Funktion verwendet.
- In (3) werden einige Parameter der Funktion bestimmt:
 - Der durchschnittliche Füllstand des Wassergrabens liegt bei $y = -1$, durch $d = -1$ wird daher die Nulllage der Schwingung um 1 nach unten verschoben.
 - Der maximale Füllstand liegt bei $y = 0$, der minimale bei $y = -2$, die Amplitude der Schwingung beträgt also $a = 1$.
 - Sein Maximum erreicht der Wasserstand im April. Da der April dem x -Wert 3 entspricht, muss die Funktion durch $c = -3$ um 3 nach rechts verschoben werden.
- In Zeile (3) wird schließlich mit b noch der letzte Parameter bestimmt. Das b beeinflusst die Periode der Kosinusschwingung zu $\frac{2\pi}{b}$. Da die Wasserstände sich jährlich wiederholen, beträgt die Periode hier gerade 12 Monate, damit ist $b = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$.
- Abschließend wird die Güte des Modells getestet: Ein maximaler Füllstand im April (3) und ein minimaler Füllstand im Oktober (9) lassen einen durchschnittlichen Füllstand im Juli (6) erwarten. Mit $g(6) = -1$ bestätigt das Modell diese Beobachtung.

Merke:

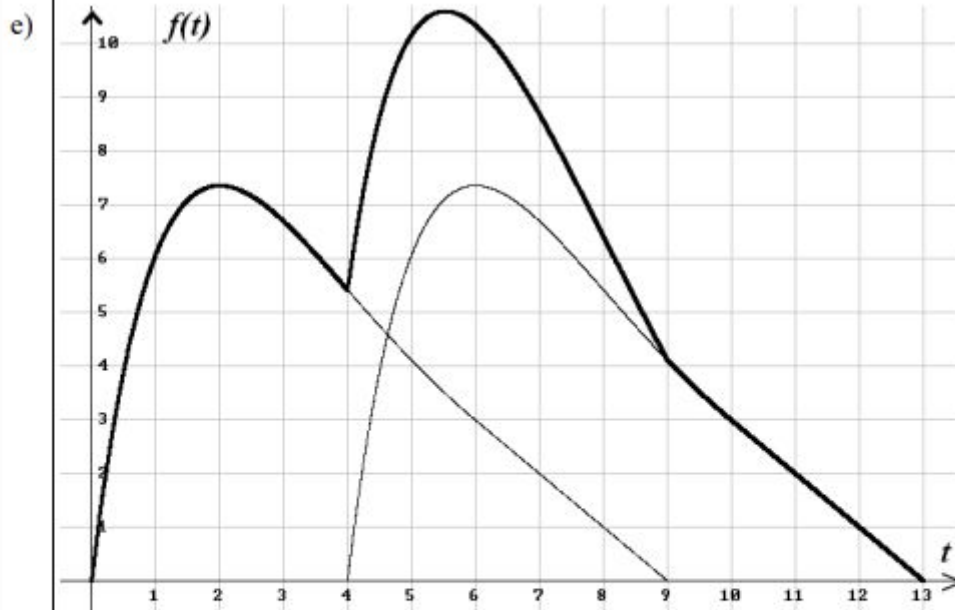


Während die Verschiebung eines Funktionsgraphen in y -Richtung intuitiv mit „+“ nach oben und mit „–“ nach unten realisiert wird, widerspricht die Verschiebung in x -Richtung der Intuition: Hier verschiebt das „–“ nach rechts, das „+“ nach links.

Aufgabe 5

	Lösungsskizze	Zuordnung Bewertung		
		I	II	III
a)	Die höchste Konzentration im Blut ist an der Stelle, an der der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ einen Hochpunkt hat. Es muss also gelten: $f'(t) = 0$ mit $f'(t) = 10e^{-0,5t} - 5t \cdot e^{-0,5t}$. Somit erhält man $t = 2$. Dem Verlauf des Graphen in der Anlage ist zu entnehmen, dass dies nur ein Maximum sein kann.			

	$f(2) = 10 \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \approx 7,36.$ Die höchste Konzentration ist also nach 2 Stunden vorhanden und beträgt 7,36 Milligramm pro Liter.	20	
b)	Der stärkste Abbau entspricht der betragsmäßig größten Steigung nach dem Maximum des Graphen der Funktion f . Sie wird im Wendepunkt von f angenommen. Also muss gelten: $f''(t) = 0$ mit $f''(t) = -10e^{-0,5t} + 2,5t \cdot e^{-0,5t}$. Damit ergibt sich $t = 4$. Das Medikament wird nach vier Stunden am stärksten abgebaut.		10
c)	Der lineare Verlauf wird durch die Geradengleichung $k(t) = f(6) + f'(6) \cdot (t - 6)$ beschrieben. Es gilt: $f'(t) = (10 - 5t) \cdot e^{-0,5t}$. Einsetzen ergibt: $\begin{aligned} k(t) &= 60 \cdot e^{-3} - 20 \cdot e^{-3} \cdot (t - 6) \\ &= 180 \cdot e^{-3} - 20t \cdot e^{-3} \\ &= -20 \cdot e^{-3} \cdot (t - 9). \end{aligned}$ Die Nullstelle von k liegt also bei 9, d. h. dass das Medikament nach 9 Stunden vollständig abgebaut ist.		15



Bemerkung zur grafischen Darstellung: Eine genaue Darstellung der „Überlagerungsfunktion“ ist etwas diffizil, da ja mehrere Definitionsintervalle in Fallunterscheidungen zu betrachten sind, je nachdem bei welcher Funktion der exponentielle oder der lineare Teil wirkt. Das wird nicht erwartet (wenn auch in der obigen Musterkizze geschehen). Wichtig ist die Struktur des Graphen und dass es einen relevanten Zeitraum gibt, in dem die 10-mg/l-Grenze überschritten wird.

- f) Da die Konzentration zeitweilig die Grenze von 10 Milligramm pro Liter übersteigt, muss der Patient mit starken Nebenwirkungen rechnen.

Zur Begründung könnte man

- entweder am Graphen argumentieren
- oder zeigen, dass z. B. bei $t = 6$ der Wert $f(t) + f(t-4) \approx 10,34$ über 10 liegt (die linearen Teile kommen hier noch nicht ins Spiel)
- oder argumentieren, dass das Maximum rechts von $t = 4$ liegen muss, dass also die Funktion $f(t) + f(t-4)$ betrachtet werden muss, die ihre Extremstelle bei $t = \frac{2(3e^2 + 1)}{e^2 + 1} \approx 5,52$ hat mit dem Maximalwert von ungefähr 10,60 (auch hier kommen die linearen Teile noch nicht ins Spiel).

g) $g(t) = a \cdot t \cdot e^{-bt}$

$$g'(t) = a \cdot e^{-bt} - abt \cdot e^{-bt}$$

Da die Konzentration bei $t = 4$ am größten sein soll, gilt: $g'(4) = 0$.

$$0 = a \cdot e^{-4b} - 4ab \cdot e^{-4b}$$

$$a = 4ab \quad | :a \ (a \neq 0)$$

$$b = \frac{1}{4}$$

Einsetzen in $g(4) = 4a \cdot e^{-4b}$ mit $g(4) = 10$ ergibt: $a = 2,5e = 6,7957\dots$

Also gilt: $a \approx 6,80$ und $b = 0,25$.

Aufgabe 6

Der Formansatz für die Stammfunktion lautet $F(x) = (ax^2 + bx + c) \cdot e^{2x}$. Die Ableitung dieses Formansatzes ist $F'(x) = (2ax + b) \cdot e^{2x} + (ax^2 + bx + c) \cdot 2 \cdot e^{2x} = (2ax^2 + (2b + 2a) \cdot x + (2c + b)) \cdot e^{2x}$. Da die Ableitung des Formansatzes der Funktion selbst entspricht, lassen sich folgende Beziehungen aufstellen.

$$2a = 4$$

$$2b + 2a = 10$$

$$2c + b = 11$$

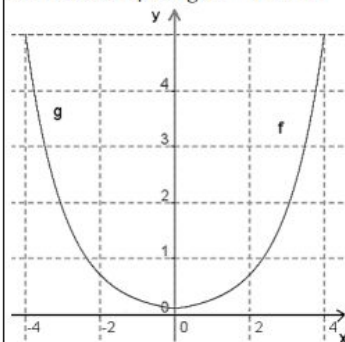
Aus der ersten Gleichung lässt sich schlussfolgern, dass $a = 2$ ist. Diesen Wert kann man dann in die zweite Gleichung einsetzen. Aus dieser wird dann der Ausdruck $2b + 4 = 10$. Damit ist $b = 3$. Diesen Wert wiederum setzen wir dann in die dritte Gleichung ein. Aus dieser wird dann der Ausdruck $2c + 3 = 11$. Mit anderen Worten: $c = 4$.

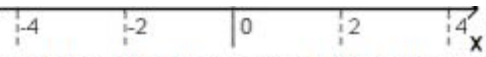
Endergebnis: $F(x) = (2x^2 + 3x + 4) \cdot e^{2x}$

Aufgabe 7

- a) Ermitteln der Parameter:
 $f(0) = 0,1 \Leftrightarrow a = 0,1$
 $f(4) = 5 \Leftrightarrow k = \ln\left(\frac{5}{0,1}\right) \frac{1}{4}$
 $k \approx 0,98$
 Die Werte der Parameter stimmen überein.

- b) Skizze des Graphen g für $-4 \leq x \leq 0$



	 Funktionsgleichungen der Ableitungen unter Berücksichtigung der Rundungen: $f'(x) = 0,1 \cdot 0,98 e^{0,98x}$ $f'(x) = 0,098 e^{0,98x} \approx 0,10 e^{0,98x}$ $g'(x) = 0,1 \cdot (-0,98) e^{-0,98x}$ $g'(x) = -0,098 e^{-0,98x} \approx -0,10 e^{-0,98x}$ Funktionswert der Ableitung an der Stelle $x = 0$: $f'(0) \approx 0,1$ $g'(0) \approx -0,1$ Die Bahn hätte einen Knick. Aus Gründen der Symmetrie müsste aber $m = 0$ gelten.	1	3
c)	$h(0) = 0,1$, $h(4) \approx 4,97$, $h(-4) \approx 4,97$ An der Stelle $x = 0$ wird der geforderte Wert eingehalten. An den Stellen $x = 4$ bzw. $x = -4$ liegt man sehr nahe am gewünschten Wert. Der Tiefpunkt der Bahn: $f'(x_E) = 0 \Leftrightarrow x_E = 0$ $h''(x) \approx 0,07 (e^{1,15x} + e^{-1,15x})$ $h''(x_E) = 0,14 > 0$. Es handelt sich um einen Tiefpunkt $T(0 0,1)$.	3	3

d)	Die Steigung der Rampe lässt sich unter Verwendung der Punkte $S(3,50 2,57)$ und $B(3,05 1,67)$ berechnen: $m = \frac{2,57 - 1,67}{3,50 - 3,05} = 2$ $h'(3,05) \approx 2,00$. Die Bedingung kann als erfüllt gelten.	3
e)	Eine Stammfunktion zu h wird mittels H angegeben: $H'(x) = \frac{1}{23} \cdot \frac{23}{20} e^{1,15x} - \frac{1}{23} \cdot \left(-\frac{23}{20}\right) e^{-1,15x} = 0,05 e^{1,15x} + 0,05 e^{-1,15x}$ $H'(x) = h(x)$	

Aufgabe 8

a)	Einsetzen der Koordinaten -4, 0 und 8 für x in die Gleichung von h ergibt: $h(-4) = 2$, $h(0) = 0$ und $h(8) = 2$. Für den Nachweis der Extrempunkte gibt es mehrere Möglichkeiten: Vergleicht man die Funktion h mit der Kosinusfunktion, so erkennt man: Der Graph der Kosinusfunktion wird an der x-Achse gespiegelt und in x-Richtung um den Faktor 8 gestreckt. Zudem gilt - für $x \leq 0$: Der Graph wird um den Faktor 2 in y-Richtung gestreckt und um 2 Einheiten nach oben verschoben. Der Wertebereich von h ist hier also das Intervall $[0;2]$. - für $x > 0$: Der Graph wird um eine Einheit nach oben verschoben. Der Wertebereich von h ist hier also das Intervall $]0,2]$. Damit ist der Koordinatenursprung der Tiefpunkt des Graphen von h, H ein Hochpunkt. <u>Oder:</u> Man betrachtet die Ableitungsfunktionen: Eine hinreichende Bedingung für Extremstellen ist: $h'(0) = 0$ und $h''(0) > 0$
----	---

bzw. $h'(8) = 0$ und $h''(8) < 0$. Die ersten zwei Ableitungen lauten:

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right), & -4 \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi}{8} \sin\left(\frac{\pi}{8}x\right), & 0 < x \leq 8 \end{cases} \quad \text{und} \quad h''(x) = \begin{cases} \frac{\pi^2}{32} \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right), & -4 \leq x \leq 0 \\ \frac{\pi^2}{64} \cos\left(\frac{\pi}{8}x\right), & 0 < x \leq 8 \end{cases}$$

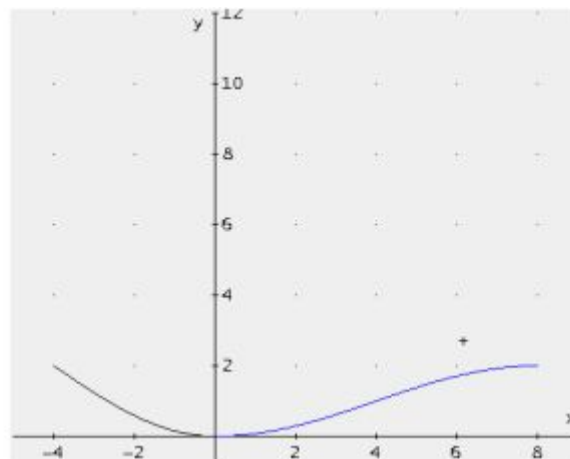
Es gilt: $h'(0) = \frac{\pi}{4} \sin(0) = 0$ bzw. $h'(8) = \frac{\pi}{8} \sin(\pi) = 0$ und

$$h''(0) = \frac{\pi^2}{32} \cos(0) = \frac{\pi^2}{32} > 0 \quad \text{bzw.} \quad h''(8) = \frac{\pi^2}{64} \cos(\pi) = -\frac{\pi^2}{64} < 0.$$

Auf die zweite Ableitungsfunktion kann verzichtet werden, wenn die Art der Nullstellen von h' betrachtet wird. Es handelt sich jeweils um einfache Nullstellen, also mit Vorzeichenwechsel.

5

b)

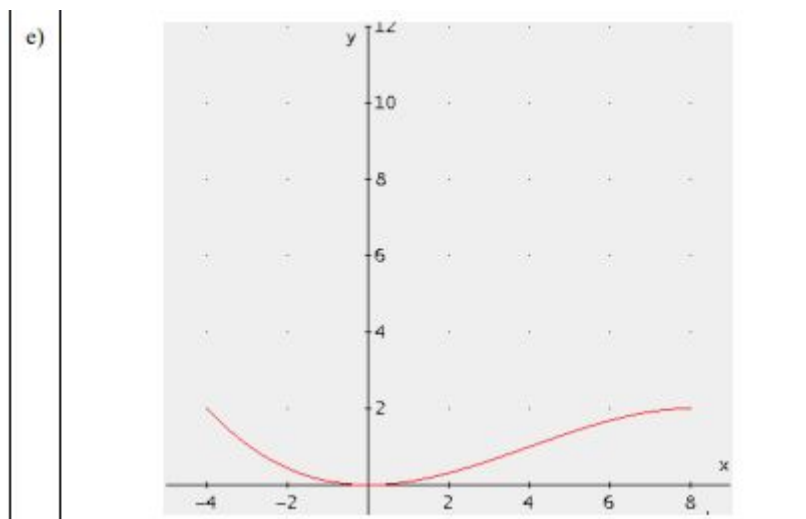


c)	Die Graphen der trigonometrischen Funktionen vom obigen Typ sind achsensymmetrisch zur y-Achse. Sie gehen aus dem Graphen der Kosinusfunktion durch Vergrößerung der Periode, z. T. Vergrößerung der Amplitude, Spiegelung an der x-Achse und Verschiebung in Richtung der y-Achse hervor. Durch keine dieser Veränderungen ändert sich etwas an der Eigenschaft, dass der Graph achsensymmetrisch zur y-Achse ist. Das Kanalbett ist aber offensichtlich nicht achsensymmetrisch, also kann eine Funktion alleine nicht das Kanalbett beschreiben.
d)	Einsetzen der Koordinaten $-4, 0$ und 8 für x in die Gleichung von f ergibt: $f(-4) = 2$, $f(0) = 0$ und $f(8) = 2$. $x = 0$ ist eine doppelte Nullstelle von f , also berührt der Graph von f die x-Achse im Koordinatenursprung. Da P und H oberhalb der x-Achse liegen, muss es sich um einen Tiefpunkt handeln. Es muss, da f eine Funktion 3. Grades ist, noch einen Hochpunkt geben. Dieser liegt an der zweiten Nullstelle von $f'(x) = -\frac{3}{128}x^2 + \frac{3}{16}x$, an der Stelle $x = 8$.

91

Lernaufgaben für die schriftliche Abiturprüfung im Fach Mathematik

	Lösungsskizze	I
	Oder: Mithilfe der beiden Ableitungsterme $f'(x) = -\frac{3}{128}x^2 + \frac{3}{16}x \quad \text{und} \quad f''(x) = -\frac{3}{64}x + \frac{3}{16} \quad \text{erhält man}$ $f'(0) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f'(8) = -\frac{3}{128} \cdot 64 + \frac{3}{16} \cdot 8 = 0 \quad \text{und}$ $f''(0) = \frac{3}{16} > 0 \quad \text{bzw.} \quad f''(8) = -\frac{3}{64} \cdot 8 + \frac{3}{16} = -\frac{3}{16} < 0.$ Oder man betrachtet wie in Teil a) lediglich die Art der Nullstellen von f und verzichtet auf die Untersuchung von f''.	15



g*) Zuerst wird die Steigung der Geraden durch B und H in Abhängigkeit von u bestimmt. Von dieser Funktion wird anschließend das Maximum gesucht.

$$m(u) = \frac{2 - f(u)}{8 - u} = \frac{2 - \left(-\frac{1}{128}u^3 + \frac{3}{32}u^2\right)}{8 - u}. \text{ Die Ableitungsfunktion hat den Term:}$$

$$m'(u) = \frac{\left(\frac{3}{128}u^2 - \frac{3}{16}u\right) \cdot (8 - u) - \left(2 + \frac{1}{128}u^3 - \frac{3}{32}u^2\right) \cdot (-1)}{(8 - u)^2} = \frac{-\frac{1}{64}u^3 + \frac{9}{32}u^2 - \frac{3}{2}u + 2}{(8 - u)^2}.$$

Die notwendige Bedingung für eine Maximumstelle $m'(u) = 0$ führt auf die Gleichung $-\frac{1}{64}u^3 + \frac{9}{32}u^2 - \frac{3}{2}u + 2 = 0$ wobei nur die Nullstellen in $\mathbb{R} \setminus \{8\}$ zu beachten sind. Durch Probieren findet man $u_{M1} = 2$ und kann mithilfe der Polynomdivision oder eines numerischen Verfahrens die anderen Nullstellen finden. Die weitere Rechnung zeigt, dass $u_{M2} = 8$ eine doppelte Nullstelle ist. Da $m(8)$ nicht definiert ist, ist $u_{M1} = 2$ genauer zu untersuchen. Lässt man den Punkt B auf dem Graphen von f zum Koordinatenursprung wandern, so erhält man zunächst Leitungen mit kleinen Steigungen. Die Leitungen verlaufen dann immer steiler, um dann wieder abzuflachen. Es muss zwischendurch genau ein Maximum geben, eben an der Stelle 2.

Oder: Eine hinreichende Bedingung ist z. B. ein Vergleich von Funktionswerten, die in der Nähe von u_{M1} liegen:

$$m(1) = \frac{35}{128}, \quad m(2) = \frac{9}{32} = \frac{36}{128}, \quad m(3) = \frac{35}{128}.$$

Also ist u_{M1} eine Maximumstelle. Die Koordinaten sind: $B\left(2 \mid \frac{5}{16}\right)$.

Alternativer Lösungsweg: Wenn man verschiedene Geraden durch H betrachtet, die mit dem Graphen von f den Punkt $B(u|f(u))$ gemeinsam haben, so ist die Gerade am steilsten, die den Graphen in B nur berührt, also Tangente an B ist. Dann lässt sich die Steigung dieser Geraden auf zwei Arten ausdrücken und es gilt: $\frac{f(u) - f(2)}{u - 8} = f'(u)$. Umgeformt ergibt sich folgende Gleichung:

$$-\frac{1}{128}u^3 + \frac{3}{32}u^2 - 2 = \left(-\frac{3}{128}u^2 + \frac{3}{16}u\right) \cdot (u - 8).$$

Nach u aufgelöst (durch Probieren und Polynomdivision bzw. ein numerisches Verfahren) ergeben sich die Lösungen $u = 2$ und $u = 8$. Da die Steigung der Geraden an der Stelle $u = 8$ nicht definiert ist, folgt: $u = 2$ ist die einzige Lösung

und die Koordinaten von B lauten: $B\left(2 \mid \frac{5}{16}\right)$.