Aufgaben Teil B
(mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(4x+8)\cdot e^{2x+1}$

a) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte von f mit den Koordinatenachsen.

b) Bestimme rechnerisch die erste und die zweite Ableitung von f.

c) Gib das Fernverhalten von f an.

d) Überprüfe rechnerisch die Funktion auf das Vorliegen einer Standardsymmetrie.

e) Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt von f mit $g(x)=(3x-1)\cdot e^{2x+1}$

f) Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt von f mit $h(x)=e^{2x}$

g) Bestimme rechnerisch die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von f.

h) Bestimme rechnerisch die Gleichung der Tangente an f durch den Punkt P (1/ f(1)).

i) Bestimme rechnerisch die Gleichung der Normalen an f durch den Punkt P (1 / f(1)).

Aufgabe 2 (Abitur Berlin 2018)

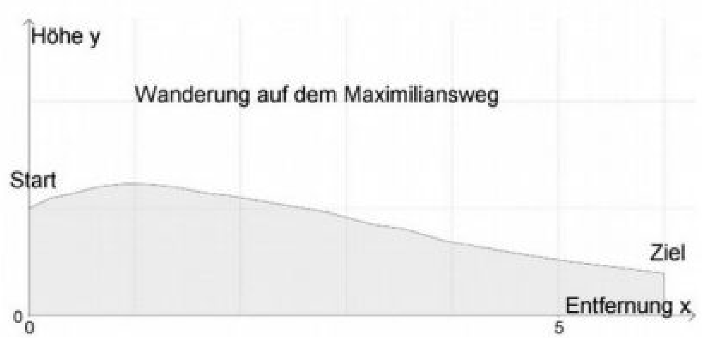
Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* durch ihre Gleichungen
$f(x)=(x+1)\cdot e^{-0,5\cdot x}$ sowie $g(x)=x+1$.
Die Graphen der Funktionen sind in der Anlage dargestellt.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von *f* für $x \to +\infty$.

b) Die Graphen der Funktionen *f* und *g* schneiden die *y*-Achse im Punkt $S(0\,|\,1)$.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Tangente an den Graphen der Funktion *f* und die Gerade *g* im Punkt *S* schneiden.
[zur Kontrolle: $f'(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-0,5\cdot x}$]

c) (gestrichen)

Die Abbildung zeigt das Höhenprofil für einen Wanderweg im Mittelgebirge. Vereinfacht soll das Höhenprofil durch die Funktion *f* mit $f(x)=(x+1)\cdot e^{-0,5\cdot x}, 0 \le x \le 6$, beschrieben werden.
(1 LE = 1 km)



d) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes des Höhenprofils.
(Die Untersuchung einer hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.)

e) Im Intervall $[2;6]$ kann das Höhenprofil näherungsweise durch eine Gerade ersetzt werden. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $(2|f(2))$ und $(6|f(6))$.

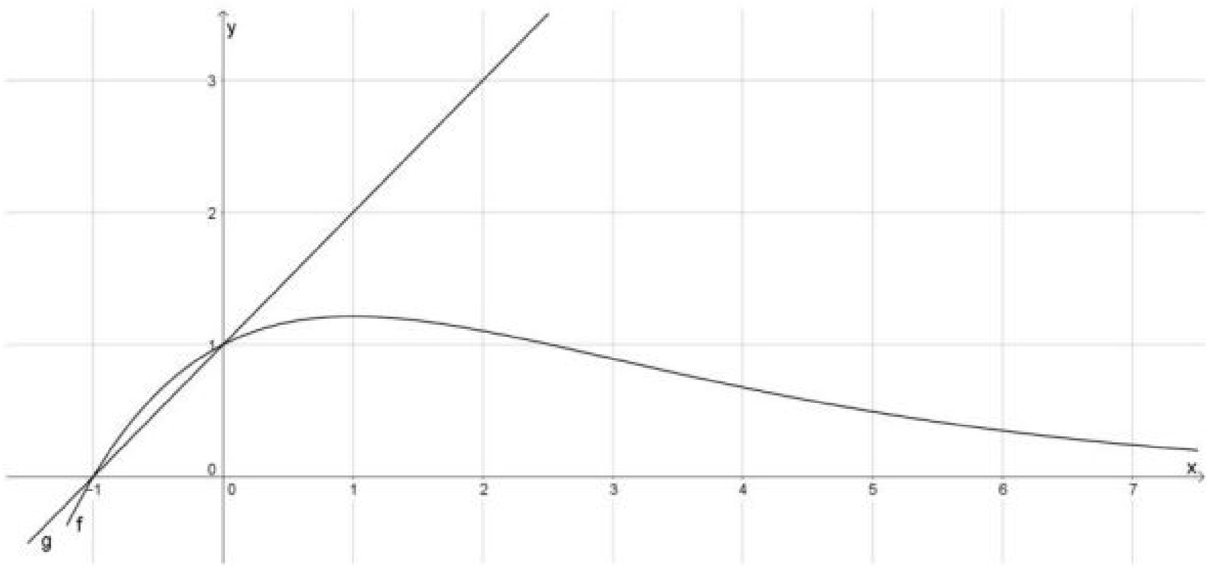
f) Weisen Sie nach, dass es im Intervall $[2;6]$ eine Stelle gibt, an der die Steigung des durch f beschriebenen Höhenprofils kleiner als -0,222 ist.

g) Ähnlich verlaufende Höhenprofile können allgemein durch Gleichungen der Form $h(x)=(x+a)\cdot e^{b\cdot x}, (a>0, b<0)$, beschrieben werden. Von einem bestimmten solchen Höhenprofil h_W sind die folgenden Angaben bekannt:

x in km	0	6
Höhe $h_W(x)$ in km	1,2	0,3

Untersuchen Sie, bei welchem der beiden Höhenprofile f und h_W der Betrag der mittleren Steigung im Intervall $[0;6]$ größer ist.
Ermitteln Sie für den vorliegenden Fall a und b.

Darstellung der Graphen der Funktionen f und g



Aufgabe 3 und Aufgabe 4: - gestrichen -

Aufgabe 5 (Abitur Baden-Württemberg 2017)
In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

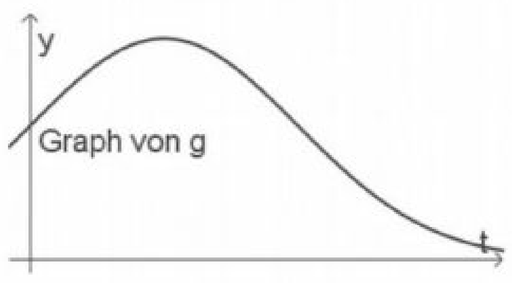
Versuchsreihe 1
Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit $f(x)=20\cdot e^{0,1x}$. Dabei gibt x die Anzahl an Stunden seit dem Beobachtungsbeginn an und f(x) die Fläche in mm².

a) Bestimme den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

b) Berechne den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.

c) Berechne die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach dem Beobachtungsbeginn.

Versuchsreihe 2
Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit $g(x)=20\cdot e^{0,1x-0,005x^2}$ (x in Stunden nach Beobachtungsbeginn, g(x) in mm²). Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion .



d) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an. Berechne diesen Wert.

e) Berechne den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

f) Betrachtet wird die Funktion h mit h(x) = g(x+10). Für jede reelle Zahl x gilt:
h(x) = h(-x).
Erläutere, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann.

Aufgabe 6 (IQB 2019)

a bis c) (gestrichen)

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.

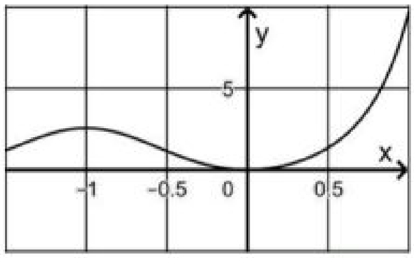


Abb. 1

d Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to -\infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

e Zeigen Sie, dass $h'(x) = 10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h ist.

f Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h.

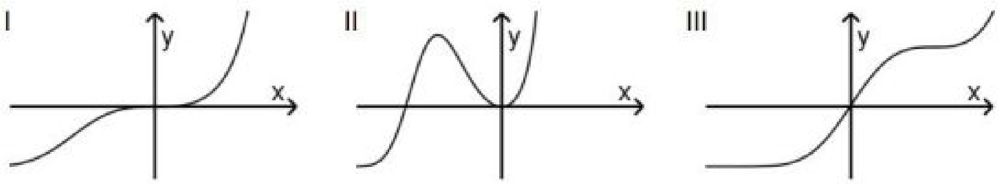
Einschub: Gegeben ist zusätzlich die Funktion $g(x) = \frac{5}{2}x^2 \cdot (2x + 3))$

g Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1 \leq x \leq 0$.

h Es gilt $(h(1) - g(1)) \cdot (h(2) - g(2)) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1 < x < 2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Einschub: Die Funktion h ist die Ableitung einer Funktion i.

i) Entscheide, welcher der nachfolgenden Graphen die Funktion i darstellt. Begründe deine Entscheidung.



Aufgabe 7 (Abitur Baden-Württemberg 2025)

In einem Tierpark soll ein Tier mit Hilfe einer Diät abnehmen. Die Masse dieses Tieres wird für $t \geq 0$ durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(t) = 36 \cdot e^{-0{,}05t} + 80$ beschrieben (t in Wochen nach Beginn der Diät, f(t) in Kilogramm).

a) Bestimmen Sie die Masse des Tieres sechs Wochen nach Beginn der Diät. (1 BE)

b) Geben Sie die Masse an, die das Tier auf lange Sicht erreicht. (1 BE)

c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Tier 25% seiner Masse seit Beginn der Diät verloren hat. (4 BE)

d) Bestimmen Sie die momentane Abnahme der Masse des Tieres zum Zeitpunkt $t_1 = 8$. (3 BE)

e) Für alle $t \geq 0$ gilt $f'(t) < 0$ und $f''(t) > 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an. (2 BE)

Für die Funktion h gilt $h(f(t)) = t$ für $t \in \mathbb{R}$.

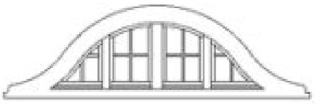
f) Bestimmen Sie einen Term der Funktion h. (3 BE)

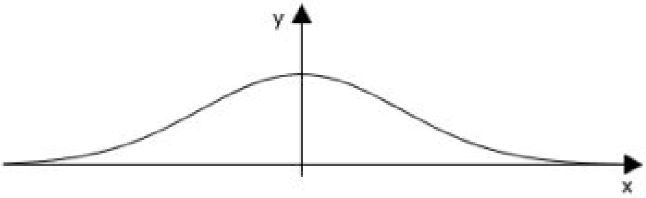
g) Für zwei reelle Zahlen v und w gilt h(v) = w. Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang. (2 BE)

Aufgabe 8 (Abitur Hessen 2013)

Material 1 zeigt beispielhaft eine sogenannte Fledermausgaube und die äußere Profillinie des Gaubenfensters. Eine solche Profillinie kann durch eine Exponentialfunktion f mit $f(x) = k \cdot e^{a \cdot x^2}$ beschrieben werden (alle Angaben in Metern).
Aufgrund der Dachkonstruktion ist vorgegeben, dass die äußere Profillinie durch die Punkte $P_1(-2,53|0,835)$ und $P_2(3,57|0,39)$ verlaufen muss.

Material 1





Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Bestimmen Sie die Funktion f, die diese Profillinie beschreibt.
[zur Kontrolle: $k = 1,8$, $a = -0,12$]

Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Ermitteln Sie eine allgemeingültige Formel zur Berechnung des Parameters a der Funktion f aus den Koordinaten zweier vorgegebener Punkte P_1 $(x_1|y_1)$ und P_2 $(x_2|y_2)$, die auf dem Graphen von f liegen.

Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

Augenscheinlich ist das Maximum der Funktion aus Aufgabe 1.1 an der Stelle $x = 0$ (siehe Material 1, Profillinie). Begründen Sie, dass diese Vermutung richtig ist.

LÖSUNGEN (TEIL B)

1a) y-Achse: $f(0) = (4 \cdot 0 + 8) \cdot e^{2 \cdot 0 + 1}$

$= 8 \cdot e$

$\Rightarrow S_y(0|8e)$

x-Achse: $f(x) = 0$

$(4x+8) \cdot e^{2x+1} = 0$

$4x+8 = 0$ oder $e^{2x+1} = 0$ $\lightning$

$4x = -8$

$x = -2$

$\Rightarrow N(-2|0)$

b) $f(x) = (4x+8) \cdot e^{2x+1}$

$f'(x) = 4 \cdot e^{2x+1} + (4x+8) \cdot 2 \cdot e^{2x+1}$

$= 4e^{2x+1} + (8x+16) \cdot e^{2x+1}$

$= (8x+20) \cdot e^{2x+1}$

$f''(x) = 8 \cdot e^{2x+1} + (8x+20) \cdot 2 \cdot e^{2x+1}$

$= 8 \cdot e^{2x+1} + (16x+40) \cdot e^{2x+1}$

$= (16x+48) \cdot e^{2x+1}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} (4x+8) \cdot e^{2x+1} = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (4x+8) \cdot e^{2x+1} = 0$

d) Symmetrie zur y-Achse: $f(x) = f(-x)$

Gegenbeispiel $f(1) = f(-1)$

$$(4+8)\cdot e^{2+1} = (-4+8)\cdot e^{-2+1}$$
$$12\cdot e^3 = 4\cdot e \quad |:4$$
$$3e^3 = e \quad |:e$$
$$3e^2 = 1$$
$$\lightning$$

Symmetrie zum Ursprung: $f(x) = -f(-x)$

Gegenbeispiel: $f(1) = -f(-1)$

$$12e^3 = -4e \quad |:4$$
$$3e^3 = -e \quad |:e$$
$$3e^2 = -1$$
$$\lightning$$

e) $f(x) = g(x)$

$$(4x+8)\cdot e^{2x+1} = (3x-1)\cdot e^{2x+1} \quad |:e^{2x+1}$$
$$4x+8 = 3x-1 \quad |-3x$$
$$x+8 = -1 \quad |-8$$
$$x = -9$$

y-Wert: $f(-9) = (4\cdot(-9)+8)\cdot e^{2\cdot(-9)+1}$
$$= (-36+8)\cdot e^{-18+1}$$
$$= -28\cdot e^{-17}$$

$\Rightarrow S(-9 / -28e^{-17})$

f) $f(x) = h(x)$

$$(4x+8)\cdot e^{2x+1} = e^{2x}$$
$$(4x+8)\cdot e^{2x}\cdot e = e^{2x} \quad | : e^{2x}$$
$$(4x+8)\cdot e = 1$$
$$4ex + 8e = 1$$
$$4ex = 1-8e$$
$$x = \frac{1-8e}{4e}$$
$$x \approx -1{,}91$$

y-Wert: $f(-1{,}91) = (4\cdot(-1{,}91)+8)\cdot e^{2\cdot(-1{,}91)+1}$
$$= 0{,}36\cdot e^{2{,}82}$$

$\Rightarrow S(-1{,}91 / 0{,}36\cdot e^{-2{,}82})$

g) Extrempunkt:

Notw. Bed.: $f'(x)=0$

$$f'(x) = (8x+20)\cdot e^{2x+1} = 0$$
$$8x+20=0 \text{ oder } e^{2x+1}=0$$
$$8x=-20 \qquad ↯$$
$$x=-2{,}5$$

Hinr. Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$$f''(-2{,}5) = (16\cdot(-2{,}5)+48)\cdot e^{2\cdot(-2{,}5)+1}$$
$$= (-40+48)\cdot e^{-5+1}$$
$$= 8\cdot e^{-4} > 0$$

$\Rightarrow$ TP bei $x=-2{,}5$

y-Wert: $f(-2{,}5) = (4\cdot(-2{,}5)+8)\cdot e^{2\cdot(-2{,}5)+1}$
$$= (-10+8)\cdot e^{-4}$$
$$= -2\cdot e^{-4}$$

$\Rightarrow TP(-2{,}5 / -2\cdot e^{-4})$

h) $f(1) = (4+8) \cdot e^{2+1} = 12e^3$
$\Rightarrow P(1 | 12e^3)$

$f'(1) = (8+20) \cdot e^{2+1} = 28e^3$

$\Rightarrow t(x) = 28e^3 x + b$

$P(1 | 12e^3)$ auf $t \Rightarrow t(1) = 12e^3$

$28e^3 + b = 12e^3 \quad | -28e^3$

$b = -16e^3$

$\Rightarrow t(x) = 28e^3 x - 16e^3$

i) $m_t \cdot m_n = -1$

$28e^3 \cdot m_n = -1$

$m_n = \frac{-1}{28e^3}$

$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{28e^3} x + b$

$P(1 | 12e^3)$ auf $n \Rightarrow n(1) = 12e^3$

$-\frac{1}{28e^3} + b = 12e^3$

$b = 12e^3 + \frac{1}{28e^3}$

$\Rightarrow n(x) = -\frac{1}{28e^3} x + \left(12e^3 + \frac{1}{28e^3}\right)$

2a) $\lim\limits_{x \to \infty} (x+1) \cdot e^{-0{,}5x} = 0$

b) gesucht: Tangente an f durch $S(0|1)$

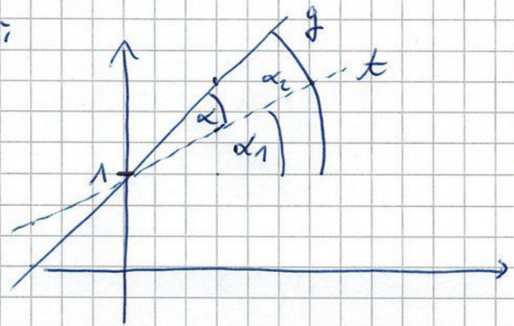
$f'(x) = 1 \cdot e^{-0{,}5x} + (x+1) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$
$= 1e^{-0{,}5x} + (-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}) \cdot e^{-0{,}5x}$
$= (-\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'(0) = (0 + \frac{1}{2}) \cdot e^0 = \frac{1}{2}$
$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{2}x + b$

$S(0|1)$ liegt auf $t \Rightarrow t(0) = 1$
$\frac{1}{2} \cdot 0 + b = 1$
$\Rightarrow b = 1$

$\Rightarrow t(x) = \frac{1}{2}x + 1$

Situation:



$g'(0) = 1$
$t'(0) = \frac{1}{2}$

$\alpha = \alpha_2 - \alpha_1$
$\alpha_2 = \tan^{-1}(1) \approx 45°$

$\alpha_1 = \tan^{-1}(\frac{1}{2}) \approx 26{,}57°$

$\Rightarrow \alpha = 45° - 26{,}57° = 18{,}43°$

d) Notw. Bed.: $f'(x)=0$

$$\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-0,5x}=0$$

$$-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0 \quad \text{oder} \quad e^{-0,5x}=0$$

$$-\frac{1}{2}x=-\frac{1}{2} \qquad \text{↯}$$

$$x=1$$

Hinr. Bed.: (laut Aufgabenstellung nicht erforderlich)

Ränder & y-Werte:

$f(0)=1$

$f(1)=2\cdot e^{-0,5}\approx 1,21$

$f(6)=7\cdot e^{-3}\approx 0,35$

$\Rightarrow HP(1|1,21)$

e) $f(2)=3\cdot e^{-1,5}$ $\qquad P_1(2|3e^{-1,5})$

$f(6)=7\cdot e^{-3}$ $\qquad P_2(6|7e^{-3})$

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{7e^{-3}-3e^{-1,5}}{6-2}=\frac{7e^{-3}-3e^{-1,5}}{4}$$

$$\approx\frac{0,35-0,67}{4}=-\frac{0,32}{4}=-0,08$$

$\Rightarrow g(x)=-0,08x+b$

$P_1(2|3e^{-1,5})$ auf $g \Rightarrow g(2)=3e^{-1,5}\approx 0,67$

$$-0,08\cdot 2+b=0,67$$
$$-0,16+b=0,67$$
$$b=0,83$$

$\Rightarrow g(x)=-0,08x+0,83$

f) Beispiel:

$$f'(3) = \left(-\frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}\right)\cdot e^{-1,5}$$
$$= (-1,5 + 0,5)\cdot e^{-1,5}$$
$$= -1\cdot e^{-1,5}$$
$$= -0,223$$

oder (mit mehr Arbeit):
Wendestelle suchen

g) $h(x) = (x+a)\cdot e^{bx}$ $\quad a>0$, $b<0$

$h(0) = 1,2$
$h(0) = (0+a)\cdot e^{0} = a$
$\Rightarrow a = 1,2$
$\Rightarrow h(x) = (x+1,2)\cdot e^{bx}$

$h(6) = 0,3$

$$h(6) = (6+1,2)\cdot e^{6b} = 0,3$$
$$7,2\cdot e^{6b} = 0,3$$
$$e^{6b} = \frac{1}{24} \quad |\ln$$
$$6b = \ln\left(\frac{1}{24}\right)$$
$$b = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{1}{24}\right)$$
$$b \approx -0,5297$$

$\Rightarrow h(x) = (x+1,2)\cdot e^{-0,5297x}$

mittlere Steigung:

① für f: $f(0) = 1$
$f(6) = 0,35$

$$m = \frac{0{,}35 - 1}{6-0} = \frac{-0{,}65}{6} = -0{,}108\overline{3}$$

$$|m| = 0{,}1083$$

② für h:

$$h(0) = 1{,}2$$

$$h(6) = 0{,}3$$

$$m = \frac{0{,}3 - 1{,}2}{6-0} = \frac{-0{,}9}{6} = -0{,}15$$

$$|m| = 0{,}15$$

$\Rightarrow$ Der Betrag ist bei h größer

Aufgabe 3 und Aufgabe 4: gestrichen

2f)

$$g(x) = f(2x)$$

$$\frac{2e^{4x}}{e^{4x}+9} = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+9}$$

$\Rightarrow k = 2$

5a) $f(3) = 20 \cdot e^{0{,}1 \cdot 3} = 20 \cdot e^{0{,}3} = 26{,}997...$
$\approx 27\ mm^2$

b) $60 = 20 \cdot e^{0{,}1x}$
$3 = e^{0{,}1x} \quad | \ln$
$\ln(3) = 0{,}1x$
$10 \cdot \ln(3) = x$
$10{,}99\ h \approx x$

c) $f'(x) = 20 \cdot 0{,}1 \cdot e^{0{,}1x} = 2 \cdot e^{0{,}1x}$
$f'(2) = 2 \cdot e^{0{,}2} = 2{,}44\ mm^2/h$

d) $g(x) = 20 \cdot e^{0{,}1x - 0{,}005x^2}$
$g'(x) = 20 \cdot (0{,}1 - 0{,}01x) \cdot e^{0{,}1x - 0{,}005x^2}$
$= (2 - 0{,}2x) \cdot e^{0{,}1x - 0{,}005x^2}$

Notw. Bed.: $g'(x) = 0$
$(2 - 0{,}2x) \cdot e^{0{,}1x - 0{,}005x^2} = 0$
$2 - 0{,}2x = 0$ oder $e^{0{,}1x - 0{,}005x^2} = 0$
$2 = 0{,}2x$ $\quad$ ↯
$10 = x$

Hinr. Bed.: $g'(x)=0$ und VZW von g'

$g'(9) = (2-0{,}2\cdot 9)\cdot e^{0{,}1\cdot 9-0{,}005\cdot 9^2}$
$= (2-1{,}8)\cdot e^{0{,}9-0{,}005\cdot 81}$
$= 0{,}2\cdot e^{0{,}9-0{,}005\cdot 81} > 0$

$g'(11) = (2-0{,}2\cdot 11)\cdot e^{0{,}1\cdot 11-0{,}005\cdot 11^2}$
$= (2-2{,}2)\cdot e^{1{,}1-0{,}005\cdot 121}$
$= -0{,}2\cdot e^{1{,}1-0{,}005\cdot 121} < 0$

$\Rightarrow$ HP bei $x=10$

$\Rightarrow$ Nach 10 h

e) $g(0)=20$

$20 = 20\cdot e^{0{,}1x-0{,}005x^2}$

$1 = e^{0{,}1x-0{,}005x^2} \quad | \ln$

$0 = 0{,}1x-0{,}005x^2$

$0 = x\cdot(0{,}1-0{,}005x)$

$x_1=0 \qquad 0{,}1-0{,}005x=0$

$-0{,}005x=-0{,}1$

$x=20$

$\Rightarrow$ nach 20 h

f) g ist achsensymmetrisch zu $x=10$

6 d) $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} = 0$

Der Graph nähert sich immer weiter von oben kommend der x-Achse an

e) $h'(x) = 10x \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} + 5x^2 \cdot (2x^2) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$
$= 10x\, e^{\frac{2}{3}x^3} + 10x^4\, e^{\frac{2}{3}x^3}$
$= (10x + 10x^4) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$
$= 10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$

f) Notw. Bed.: $h'(x) = 0$

$10x \cdot (1 + x^3) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3} = 0$

$10x = 0$ oder $1 + x^3 = 0$ oder $e^{\frac{2}{3}x^3} = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x^3 = -1$ $\quad$ ↯

$x_2 = -1$

Hinr. Bed.: $h'(x) = 0$ und Vorzeichenwechsel von h'

$h'(-2) = (10 \cdot (-2) + 10 \cdot (-2)^4) \cdot e^{\frac{2}{3} \cdot (-2)^3}$
$= (-20 + 160) \cdot e^{-\frac{2}{3} \cdot 8}$
$= 140 \cdot e^{-\frac{16}{3}} > 0$

$h'(-\frac{1}{2}) = (10 \cdot (-\frac{1}{2}) + 10 \cdot (-\frac{1}{2})^4) \cdot e^{\frac{2}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^3}$
$= (-5 + 10 \cdot \frac{1}{16}) \cdot e^{-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8}}$
$= (-5 + \frac{10}{16}) \cdot e^{-\frac{2}{24}} < 0$

$h'(1) = (10 + 10) \cdot e^{2/3}$
$= 20 \cdot e^{2/3} > 0$

$\Rightarrow$ HP bei $x = -1$
TP bei $x = 0$

y-Werte:

$h(-1) = 5 \cdot (-1)^2 \cdot e^{\frac{2}{3} \cdot (-1)^3}$
$= 5 \cdot e^{-2/3}$

$h(0) = 5 \cdot 0^2 \cdot e^0 = 0$

$\Rightarrow$ HP$(-1 / 5 \cdot e^{-2/3})$
TP$(0/0)$

g) mittl. Steigung g_2

$g(-1) = \frac{5}{2} \cdot (-1)^2 \cdot (2 \cdot (-1) + 3)$
$= \frac{5}{2} \cdot (-2 + 3)$
$= \frac{5}{2}$

$g(0) = 0$

$\Rightarrow m_g = 5/2$

mittl. Steigung h
$h(-1) = 5 \cdot e^{-2/3}$
$h(0) = 0$

$\Rightarrow m_h = 5e^{-2/3} = 2{,}57$

$\frac{2{,}5}{2{,}57} = 0{,}9728$ $\qquad 1 - 0{,}9728 = 0{,}0272$

$\Rightarrow 2{,}72\,\%$

h) $(h(1)-g(1)) \cdot (h(2)-g(2)) < 0$

$\Rightarrow$ entweder $h(1)-g(1) < 0$
oder $h(2)-g(2) < 0$

$\Rightarrow$ Es gibt einen Schnittpunkt der beiden Funktionen.
Auf der einen Seite dieses Punktes liegt g über h (die Differenz wird negativ), auf der anderen h über g (Differenz positiv)

i) $h(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$
Es gibt nur eine NS: $x = 0$
Es gibt aber keinen Vorzeichenwechsel von h

$\Rightarrow$ i muss einen Sattelpunkt bei $x=0$ haben & ansonsten permanent wachsen
$\Rightarrow$ Graph I

Aufgabe 7

a) Bestimmen Sie die Masse des Tieres sechs Wochen nach Beginn der Diät.

$f(6) \approx 106{,}7$

Die Masse des Tieres beträgt ca. 106,7 kg.

b) Geben Sie die Masse an, die das Tier auf lange Sicht erreicht.

Für $t \to +\infty$ gilt $f(t) \to 80$, das heißt die waagrechte Asymptote lautet y = 80.

Auf lange Sicht beträgt die Masse 80 kg.

c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt, zu dem das Tier 25% seiner Masse seit Beginn der Diät verloren hat.

Die Anfangsmasse beträgt $f(0) = 116$ kg.
Reduzierung der Anfangsmasse um 25%: $0{,}75 \cdot 116 = 87$ kg

$$87 = 36 \cdot e^{-0{,}05t} + 80 \Leftrightarrow e^{-0{,}05t} = \frac{7}{36} \Leftrightarrow t = \frac{1}{-0{,}05} \ln\left(\frac{7}{36}\right) \approx 32{,}8$$

Etwa 33 Wochen nach Beginn der Diät hat das Tier 25% seiner Anfangsmasse verloren.

d) Bestimmen Sie die momentane Abnahme der Masse des Tieres zum Zeitpunkt $t_1 = 8$.

Es gilt $f'(t) = 36 \cdot (-0{,}05) \cdot e^{-0{,}05t} = -1{,}8 \cdot e^{-0{,}05t}$
Daraus folgt $f'(8) \approx -1{,}2$.

Die momentane Änderungsrate beträgt etwa -1,2 kg pro Woche.

e) Geben Sie die Bedeutung dieser Aussage im Sachzusammenhang an.

$f'(t) < 0$: Die Funktion f ist streng monoton fallend, das heißt das Tier verliert ständig an Masse.

$f''(t) > 0$: Das Schaubild von f ist linkgekrümmt, das heißt, dass das Tier immer langsamer abnimmt.

f) Bestimmen Sie einen Term der Funktion h.

Wegen $h(f(t)) = t$ ist die Funktion h die Umkehrfunktion von f.

Berechnung der Umkehrfunktion von f:

$$y = 36 \cdot e^{-0{,}05t} + 80 \Leftrightarrow \frac{y-80}{36} = e^{-0{,}05t} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{y-80}{36}\right) = -0{,}05t \Leftrightarrow t = -20 \cdot \ln\left(\frac{y-80}{36}\right)$$

Daraus folgt: $h(x) = -20 \cdot \ln\left(\frac{x-80}{36}\right)$

g) Interpretieren Sie diese Gleichung im Sachzusammenhang.

Die Funktion f ordnet der Zeit in Wochen die Masse in kg zu.
Die Umkehrfunktion h ordnet der Masse in kg die Zeit in Wochen zu.

h(v) = w: Wenn das Tier eine Masse von v kg besitzt, sind w Wochen seit Beginn der Diät vergangen.

Aufgabe 8

Lösung zu Teilaufgabe 1.1 (8 BE)

Die Parameter in $f(x) = k \cdot e^{a \cdot x^2}$ sollen so bestimmt werden, dass die Kurve durch die Punkte $P_1(-2{,}53 \mid 0{,}835)$ und $P_2(3{,}57 \mid 0{,}39)$ geht. Da die Anzahl der Parameter und die Anzahl der Bedingungen übereinstimmen, gibt es eine eindeutige Lösung:

$$\begin{array}{llll} P_1(-2{,}53 \mid 0{,}835): & f(-2{,}53) = 0{,}835 & \Leftrightarrow \quad 0{,}835 = k \cdot e^{a \cdot (-2{,}53)^2} & \mathrm{I} \\ P_2(3{,}57 \mid 0{,}39): & f(3{,}57) = 0{,}39 & \Leftrightarrow \quad 0{,}39 = k \cdot e^{a \cdot (3{,}57)^2} & \mathrm{II} \end{array}$$

Durch Division der beiden Gleichungen lässt sich der Parameter k eliminieren und a berechnen:

$$\begin{aligned} \frac{0{,}835}{0{,}39} &= e^{a \cdot \left((-2{,}53)^2 - (3{,}57)^2\right)} \\ 2{,}14 &= e^{-6{,}344 \cdot a} && \mid \ln \\ -6{,}344 \cdot a &= \ln(2{,}14) && \mid :(-6{,}344) \\ a &\approx -0{,}12 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich durch Einsetzen in Gleichung I oder II $k \approx 1{,}8$.

Lösung zu Teilaufgabe 1.2 (6 BE)

Für zwei beliebige Punkte $P_1(x_1 \mid y_1)$ und $P_2(x_2 \mid y_2)$ ergibt sich analog zu Teilaufgabe 1.1:

$$a = \frac{\ln\left(\frac{y_1}{y_2}\right)}{x_1^2 - x_2^2}$$

Lösung zu Teilaufgabe 1.3 (4 BE)

In dieser Teilaufgabe soll gezeigt werden, dass die betrachtete Funktion ein Maximum bei $x = 0$ besitzt. Hierfür gibt es verschiedene Möglichkeiten:

1. rechnerisch über eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel von + nach - in der ersten Ableitung:

$$f(x) = 1{,}8 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2}$$
$$f'(x) = -0{,}432x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2}$$

$$0 = -0{,}432x \cdot \mathrm{e}^{-0{,}12x^2} \Leftrightarrow x = 0$$

$$f'(-1) > 0$$
$$f'(+1) < 0$$

Merke:

Um zu untersuchen, ob an einer Nullstelle ein Vorzeichenwechsel (VZW) stattfindet, wird ein Wert rechts und ein Wert links der Nullstelle in die Funktion eingesetzt und die Vorzeichen vergleichen. Liegen noch weitere Nullstellen vor, muss der ausgewählte Wert näher an der untersuchten Nullstelle liegen als die nächste Nullstelle.

2. Wegen $f(x) = f(-x)$ verläuft der Graph von f achsensymmetrisch zur y-Achse, die einzige Extremstelle der Funktion muss auf der Symmetrieachse, also bei $x = 0$ liegen. Wegen $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$ muss ein Maximum vorliegen.

3. Der Exponent der e-Funktion ist wegen $x^2 \geq 0$ entweder Null oder negativ. Da $\mathrm{e}^0 = 1$ und für $a > 0$ $\mathrm{e}^{-a} < 1$ gilt, muss bei $x = 0$ ein Maximum vorliegen.