Aufgaben Teil A
(ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1
Bestimme x:

a) $2^x = 16$

b) $x^3 = -27$

c) $5^x = 1$

d) $5^x = \frac{1}{25}$

e) $\log_2(8) = x$

d) $\log_x(49) = 2$

e) $\log_2(x) = 5$

f) $3^{\log_3(7)} = x$

g) $\log_a(a^3) = x$

h) $\log_x(121) = 2$

i) $\log_7(x) = 0$

j) $\ln(1) = x$

k) $\ln(x) = 5$

Aufgabe 2
Bestimme x:

a) $\log_2(x+7) = 4$

b) $\log_2(2x+4) - 3 = 2$

Aufgabe 3

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (2x - 6) \cdot e^{3x}$

b) $f(x) = (4x + 8) \cdot e^{2x+4}$

c) $f(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot e^{2x+5}$

d) $f(x) = (x^3 + 5x^2) \cdot e^{2x-1}$

e) $f(x) = (x^3 - 4x) \cdot e^{2x+3}$

f) $f(x) = (x^4 - 10x^2 + 9) \cdot e^{2x}$

g) $f(x) = (x^5 - 8x^3 + 16x) \cdot e^{3x-5}$

h) $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 4$

i) $f(x) = 2e^x - \frac{4}{e^x}$

Aufgabe 4

Löse die folgenden Gleichungen:

a) $(2x^2 - 8) \cdot (e^{2x} - 6) = 0$

b) $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$

c) $4e^{2x} + 6e^x = 4$

d) $(x^3 - 8) \cdot (2 - \ln x) = 0$

Aufgabe 5

Bestimme jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=e^x$

b) $f(x)=(2x+1)\cdot e^x$

c) $f(x)=(5x+3)\cdot e^{2x+1}$

d) $f(x)=(x^2+4x+2)\cdot e^{x^2+3}$

e) $f(x)=(x^2+x-4)\cdot e^{2x^2+5x+1}$

f) $f(x)=x^2\cdot\sin(x)$

g) $f(x)=(\sin(x))^2$

h) - gestrichen -

i) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$

j) $f(x)=(3+\cos(x))^4$

Aufgabe 6

Bestimme die erste, zweite, dritte und allgemein die n-te Ableitung von $f(x)=(2x+3)\cdot e^x$

Aufgabe 7

Gib das Fernverhalten der folgenden Funktionen an:

a) $f(x)=(2x+9)\cdot e^{-3x+4}$

b) $f(x)=(-5x+2)\cdot e^{3x}$

c) $f(x)=(-2x+1)\cdot e^{x^2+1}$

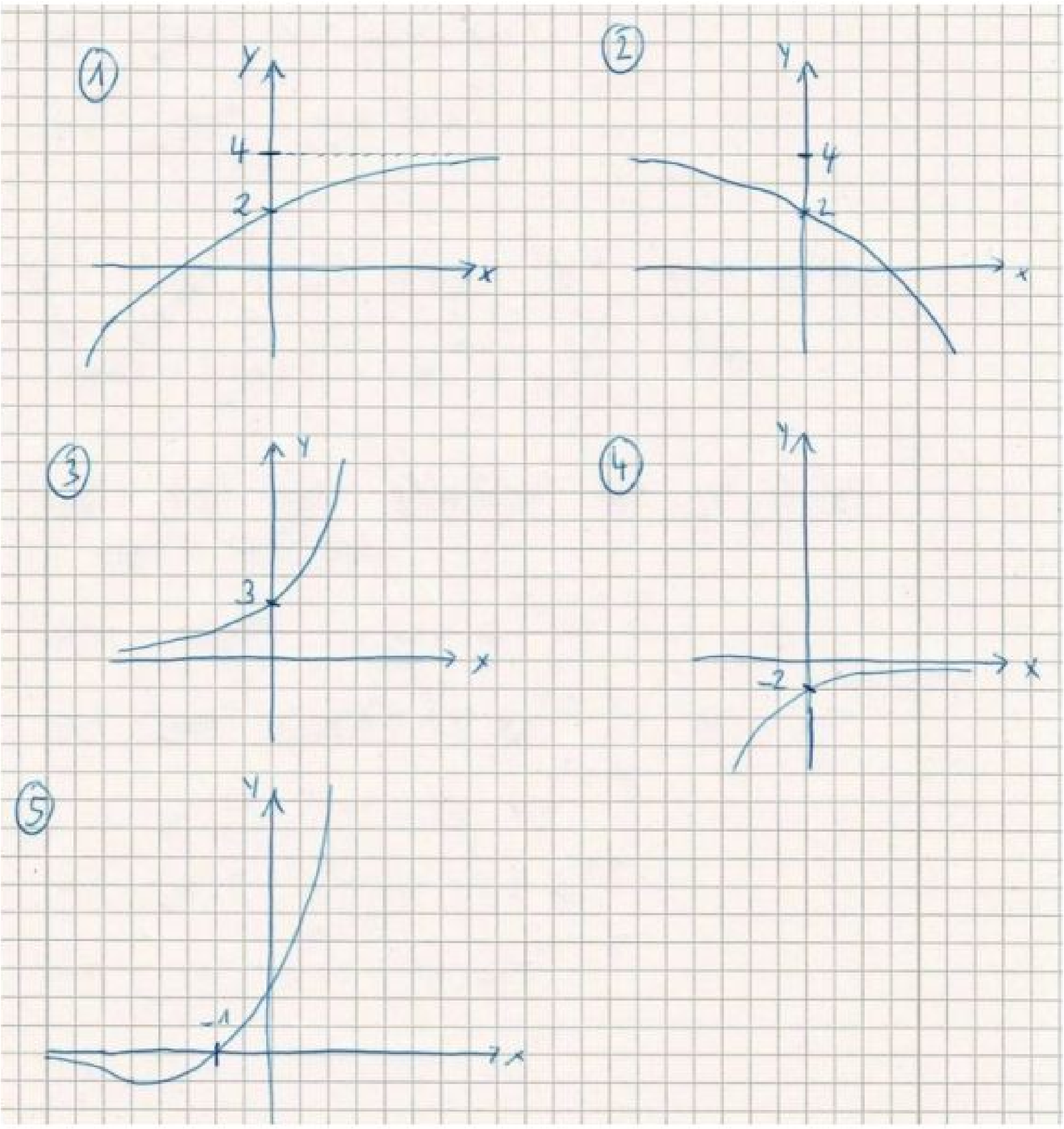
d) $f(x)=(x^2+2x+3)\cdot e^{2x}$

e) $f(x)=(5x+1)\cdot e^{5x+7}$

Aufgabe 8

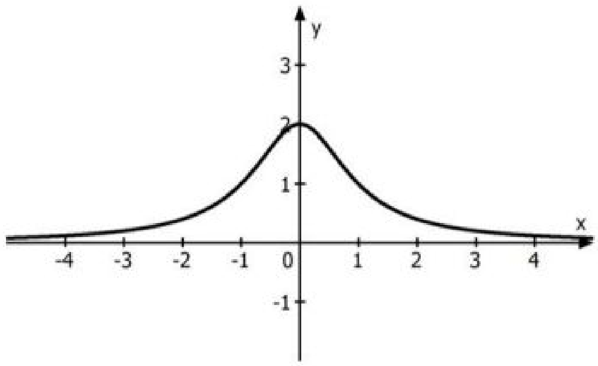
Ordne den Funktionsgleichungen den richtigen Graphen zu:

$$f(x) = 3e^{x}$$
$$g(x) = (x+1) \cdot e^{0{,}1x}$$
$$h(x) = -2 \cdot e^{-x}$$
$$i(x) = 4 - 2 \cdot e^{-0{,}1x}$$



Aufgabe 9 (Abitur Baden-Württemberg 2004)

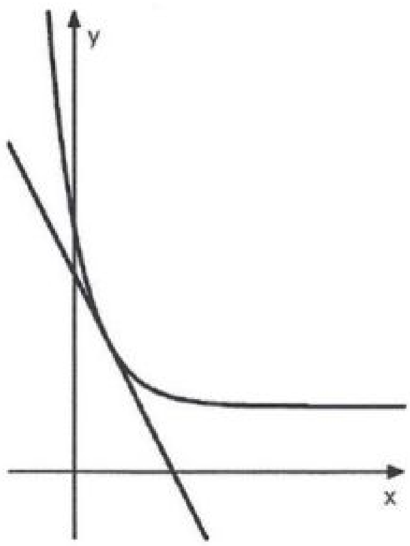
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Welcher der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar?
Begründen Sie Ihre Antworten.



1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3;3]$.

Aufgabe 10 (Abitur Baden-Württemberg 2021)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-2x+1} + 1$.
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.



a) Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Steigung -2 hat.

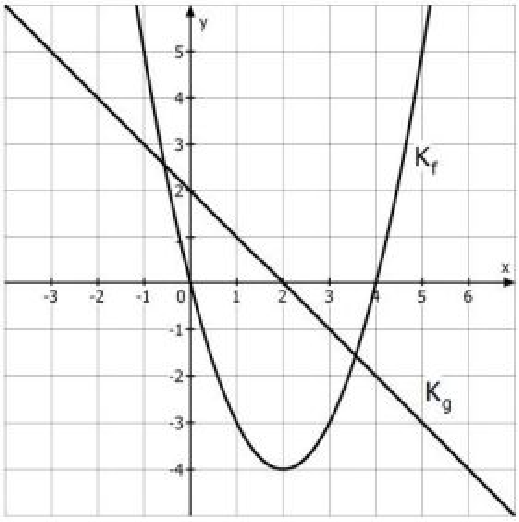
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

Aufgabe 11 (Abitur Baden-Württemberg 2014)

Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g.

a) Bestimmen Sie $f(g(3))$.
Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f(g(x)) = 0$ ist.

b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Bestimmen Sie $h'(2)$.



Aufgabe 12 – gestrichen -

Aufgabe 13 (Abitur Bayern 2017)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

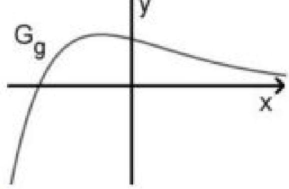
a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0\,|\,1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 14 (IQB 2019)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g.

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.



a Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat.

b Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.

LÖSUNGEN (Teil A)

1a) $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$

b) $x^3 = -27 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$x = -3$

c) $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

d) $5^x = \frac{1}{25}$

$5^x = \frac{1}{5^2}$

$5^x = 5^{-2}$

$\Rightarrow x = -2$

e) $\log_2(8) = x \Rightarrow x = 3$

denn $2^3 = 8$

d) $\log_x(49) = 2$

$\Rightarrow x = 7$

denn $7^2 = 49$

e) $\log_2(x) = 5$

$\Rightarrow x = 2^5 = 32$

f) $3^{\log_3(7)} = x$

$7 = x$

g) $\log_a(a^3) = x$

$\Rightarrow x = 3$

h) $\log_x(121) = 2$

$\Rightarrow x = 11$

denn $11^2 = 121$

i) $\log_7(x) = 0$

$\Rightarrow x = 7^0 = 1$

j) $\ln(1) = x$

$\Rightarrow x = 0$

denn $e^0 = 1$

k) $\ln(x) = 5$

$\Rightarrow x = e^5$

2a) $\log_2(x+7) = 4 \quad | 2^{()}$

$x+7 = 2^4$

$x+7 = 16$

$x = 9$

b) $\log_2(2x+4) - 3 = 2 \quad | +3$

$\log_2(2x+4) = 5 \quad | 2^{()}$

$2x+4 = 2^5$

$2x+4 = 32 \quad | -4$

$2x = 28 \quad | :2$

$x = 14$

3a) $(2x-6) \cdot e^{3x} = 0$

$2x-6 = 0$ oder $e^{3x} = 0$

$2x = 6$ ↯

$x = 3$

b) $(4x+8) \cdot e^{2x+4} = 0$

$4x+8 = 0$ oder $e^{2x+4} = 0$

↯

$4x = -8$

$x = -2$

c) $(x^2+2x-3) \cdot e^{2x+5} = 0$

$x^2+2x-3 = 0$ oder $e^{2x+5} = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1+3}$ ↯

$x = -1 \pm \sqrt{4}$

$x = -1 \pm 2$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

d) $(x^3+5x^2)\cdot e^{2x-1}=0$

$x^3+5x^2=0$ oder $e^{2x-1}=0$

$x^2\cdot(x+5)=0$ $\lightning$

$x^2=0$ oder $x+5=0$

$x_1=0$ $x_2=-5$

e) $(x^3-4x)\cdot e^{2x+3}=0$

$x^3-4x=0$ oder $e^{2x+3}=0$

$x\cdot(x^2-4)=0$ $\lightning$

$x=0$ oder $x^2-4=0$

$x_1=0$ $x^2=4 \mid \sqrt{\ }$

$x_2=-2$

$x_3=2$

f) $(x^4-10x^2+9)\cdot e^{2x}=0$

$x^4-10x^2+9=0$ oder $e^{2x}=0$

$x^4-10x^2+9=0 \mid$ Subst. $\lightning$

$z^2-10z+9=0$

$z=5\pm\sqrt{25-9}$

$z=5\pm\sqrt{16}$

$z=5\pm4$

$z_1=9$ $z_2=1$ | Resubst.

$x^2=9$ $x^2=1$ $\mid\sqrt{\ }$

$x_1=3$ $x_3=1$

$x_2=-3$ $x_4=-1$

g) $(x^5 - 8x^3 + 16x) \cdot e^{3x-5} = 0$

$x^5 - 8x^3 + 16x = 0$ oder $e^{3x-5} = 0$

$x \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) = 0$ $\quad$ $\lightning$

$x = 0$ oder $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ | Subst.

$x_1 = 0$ $\quad$ $z^2 - 8z + 16 = 0$

$z = 4 \pm \sqrt{16-16}$

$z = 4$ | Resubst.

$x^2 = 4$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

h) $e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$ | Subst.

Beachte: $e^{2x} = (e^x)^2$

$z^2 - 4z + 4 = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$z = 2$ | Resubst.

$e^x = 2$ | ln

$x = \ln(2)$

i) $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$ $\quad | \cdot e^x$

$2e^x \cdot e^x - 4 = 0$

$2e^{2x} - 4 = 0$

$2e^{2x} = 4$ $\quad | :2$

$e^{2x} = 2$ $\quad |$ ln

$2x = \ln(2)$

$x = \underline{\frac{\ln(2)}{2}}$

4a) $(2x^2-8)\cdot(e^{2x}-6)=0$

$2x^2-8=0$ oder $e^{2x}-6=0$

$2x^2=8$ $\qquad e^{2x}=6 \mid \ln$

$x^2=4$ $\qquad 2x=\ln(6)$

$x_1=2$ $\qquad x_3=\frac{\ln(6)}{2}$

$x_2=-2$

b) $e^{4x}-5=4e^{2x}$

$e^{4x}-4e^{2x}-5=0$

$e^{2x}\cdot e^{2x}-4e^{2x}-5=0$

$(e^{2x})^2-4e^{2x}-5=0 \mid$ Subst.

$z^2-4z-5=0$

$z=2\pm\sqrt{4+5}$

$z=2\pm\sqrt{9}$

$z=2\pm 3$

$z_1=5$ $\qquad z_2=-1 \mid$ Resubst.

$e^{2x}=5 \mid \ln$ $\qquad e^{2x}=-1$

$2x=\ln(5)$ $\qquad ↯$

$x=\frac{\ln(5)}{2}$

c) $4e^{2x}+6e^{x}=4$

$4e^{2x}+6e^{x}-4=0$

$e^{2x}+1{,}5e^{x}-1=0 \mid$ Subst.

Beachte: $e^{2x}=(e^{x})^2$

$z^2+1{,}5z-1=0$

$z=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+1}$

$z=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}}$

$z=-\frac{3}{4}\pm\frac{5}{4}$

$z_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ $\qquad z_2=-\frac{8}{4}=-2 \mid$ Resubst.

$e^x = \frac{1}{2} \quad | \ln \qquad e^x = -2$

$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad ↯$

d) $(x^3 - 8) \cdot (2 - \ln x) = 0$

$x^3 - 8 = 0$ oder $2 - \ln x = 0$

$x^3 = 8 \qquad 2 = \ln x \quad | e^{()}$

$x_1 = 2 \qquad e^2 = x_2$

5a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

b) $f(x) = (2x+1) \cdot e^x$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x+1) \cdot e^x$

$= (2x+3) \cdot e^x$

c) $f(x) = (5x+3) \cdot e^{2x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = 5 \cdot e^{2x+1} + (5x+3) \cdot 2 \cdot e^{2x+1}$

$= 5 \cdot e^{2x+1} + (10x+6) \cdot e^{2x+1}$

$= (10x+11) \cdot e^{2x+1}$

d) $f(x) = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^{x^2+3}$

$\Rightarrow f'(x) = (2x+4) \cdot e^{x^2+3} + (x^2+4x+2) \cdot 2x \cdot e^{x^2+3}$

$= (2x+4) \cdot e^{x^2+3} + (2x^3 + 8x^2 + 4x) \cdot e^{x^2+3}$

$= (2x^3 + 8x^2 + 6x + 4) \cdot e^{x^2+3}$

e) $f(x) = (x^2 + x - 4) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (x^2+x-4) \cdot (4x+5) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (4x^3 + 4x^2 - 16x + 5x^2 + 5x - 20) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (4x^3 + 9x^2 - 11x - 20) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (4x^3 + 9x^2 - 9x - 19) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

g) $f(x) = (\sin(x))^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{4x+5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot(4x+5) - (x^2+4x+2)\cdot 4}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{8x^2 + 10x + 16x + 20 - 4x^2 - 16x - 8}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 10x + 12}{(4x+5)^2}$$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} = (x^2 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+4)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x}} \cdot (2x+4)$$

$$= \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$$

j) $f(x) = (3 + \cos(x))^4$

$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot (3 + \cos(x))^3 \cdot (-\sin(x))$

$= -4 \cdot \sin(x) \cdot (3 + \cos(x))^3$

6) $f(x) = (2x+3) \cdot e^x$

$f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x+3) \cdot e^x$

$= (2x+5) \cdot e^x$

$$f''(x) = 2 \cdot e^x + (2x+5) \cdot e^x$$
$$= (2x+7) \cdot e^x$$

$$f'''(x) = 2 \cdot e^x + (2x+7) \cdot e^x$$
$$= (2x+9) \cdot e^x$$

$$f^{(n)}(x) = (2x+3+2n) \cdot e^x$$

7a) $\lim\limits_{x \to \infty} (2x+9) \cdot e^{-3x+4} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+9) \cdot e^{-3x+4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (-5x+2) \cdot e^{3x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x+2) \cdot e^{3x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} (-2x+1) \cdot e^{x^2+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x+1) \cdot e^{x^2+1} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2+2x+3) \cdot e^{2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+2x+3) \cdot e^{2x} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (5x+1) \cdot e^{5x+7} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5x+1) \cdot e^{5x+7} = 0$

8) ① $f(x) = 3e^x$

$f(0) = 3 \cdot e^0 = 3 \Rightarrow P(0|3)$ auf f

$\Rightarrow$ Graph 3

② $g(x) = (x+1) \cdot e^{0,1x}$

$g(0) = (0+1) \cdot e^{0,1 \cdot 0} = 1 \Rightarrow P(0|1)$ auf g

$\Rightarrow$ einzig passender Graph Nr. 5

außerdem:

$g(x) = 0 \Rightarrow (x+1) \cdot e^{0,1x} = 0$

$x+1 = 0$ oder $e^{0,1x} = 0$

$x = -1$ $\quad$ ↯

③ $h(x) = -2 \cdot e^{-x}$

$h(0) = -2 \cdot e^0 = -2 \Rightarrow P(0|-2)$ auf h

$\Rightarrow$ Graph 4

④ $i(x) = 4 - 2 \cdot e^{-0,1x}$

Funktion des begrenzten exp. Wachstums

$\lim\limits_{x \to \infty} i(x) = 4 \Rightarrow$ Graph 1

9) Aussage 1: wahr

f ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$ für alle x-Werte im betrachteten Bereich & dies ist der Fall

Aussage 2: wahr

f hat einen Wendepunkt in $x=0$.
f' hat dort einen Hochpunkt, also gilt $f''(0)=0$. f' wächst links von $x=0$ und fällt rechts davon

$\Rightarrow f''$ positiv links davon und negativ rechts davon

$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von f''

$f''(0)=0$ und Vorzeichenwechsel von f''
$\Rightarrow f$ hat Wendepunkt in $x=0$

Aussage 3: falsch

f' ist überall positiv $\Rightarrow f$ wächst ununterbrochen $\Rightarrow f$ kann keine Achsensymmetrie haben

Aussage 4: unentscheidbar

f wächst zwar ununterbrochen, aber von wo aus ist nicht bekannt

10a) $f(x)=e^{-2x+1}+1$

$f'(x)=-2\cdot e^{-2x+1}$

$f'(\frac{1}{2})=-2\cdot e^{-2\cdot\frac{1}{2}+1}=-2\cdot e^{-1+1}=-2\cdot e^{0}=-2$

$\Rightarrow$ Steigung -2

b) $t(x)=-2x+b$ $\qquad f(\frac{1}{2})=e^{-2\cdot\frac{1}{2}+1}+1=e^{0}+1=2$

$2=-2\cdot\frac{1}{2}+b$ $\qquad \Rightarrow P(\frac{1}{2}\mid 2)$

$2=-1+b$

$3=b$

$\Rightarrow t(x) = -2x + 3$

gesucht: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

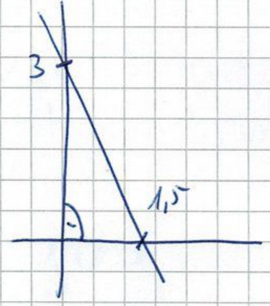
$t(0) = 3$

$t(x) = 0$

$-2x + 3 = 0$

$-2x = -3$

$x = 1{,}5$



$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ FE

11a) ① $g(3) = -1$

$f(g(3)) = f(-1) = 5$

② $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 4$

Wann wird $g(x)$ gleich 0 oder 4?

$g(-2) = 4$

$g(2) = 0$

$\Rightarrow f(g(-2)) = 0$

$f(g(2)) = 0$

b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

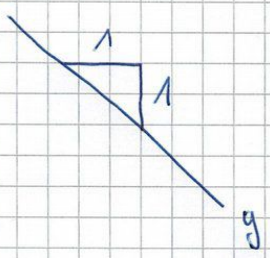
$\Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$

Es gilt: $g(2) = 0$

$f(2) = 4$

$g'(x) = -1$ (Steigung, an einem Steigungsdreieck ablesbar)



$\Rightarrow h'(2) = f'(2) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = -4$

Aufgabe 12: gestrichen

13a) $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$

$$2e^{\frac{1}{2}x} = 1$$

$$e^{\frac{1}{2}x} = \frac{1}{2} \quad | \ln$$

$$\frac{1}{2}x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 2 \cdot \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$

b) gesucht: Tangente an f durch S(0|1)

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$

$f'(0) = e^0 = 1$

$\Rightarrow t(x) = x + b$

S(0|1) auf t $\Rightarrow t(0) = 1$

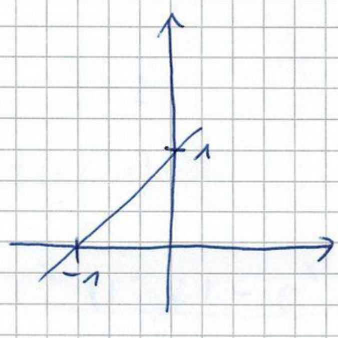
$0 + b = 1$

$\Rightarrow t(x) = x + 1$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$t(0) = 1$ $\qquad$ $x + 1 = 0$

$x = -1$



$\Rightarrow$ Wir haben ein gleichschenkliges Dreieck.
Die Strecke vom Ursprung zur Nullstelle ist wie die Strecke vom Ursprung zum Schnittpunkt mit der y-Achse jeweils 1 LE lang.

14a) $f'(x) = e^{g(x)}$

Extrempunkte:

① Notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$f'(x)=0$

$e^{g(x)}=0$

$\lightning$

$\Rightarrow$ kein Extrempunkt vorhanden

b) $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

Wendepunkte:

① Notwendige Bedingung: $f''(x)=0$

$f''(x)=0$

$g'(x) \cdot e^{g(x)} = 0$

$g'(x)=0$ oder $e^{g(x)}=0$

$\lightning$

$g'(x)=0$, wenn g bei x selbst einen Extrempunkt hat

$\Rightarrow$ g hat für einen Wert x_e links von der y-Achse einen Hochpunkt & daher gilt $g'(x_e)=0$

$\Rightarrow f''(x_e)=0$

② Hinreichende Bedingung:
Vorzeichenwechsel von f'' ?

g hat HP bei x_e

$\Rightarrow$ g' positiv links von x_e
g' negativ rechts von x_e

$\Rightarrow$ $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ positiv links von x_e
$f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ negativ rechts von x_e
(da $e^{g(x)}$ immer positiv ist)

$\Rightarrow$ Wendepunkt von f bei x_e