LÖSUNGEN

1 a) $f(x) = 2\cdot(x+2)^2 + 3$
$= 2\cdot(x^2+4x+4)+3$
$= 2x^2+8x+8+3$
$= 2x^2+8x+11$

b) $f(x) = 3x^2+6x+12$
$= 3\cdot(x^2+2x+4)$
$= 3\cdot((x+1)^2+4-1)$
$= 3\cdot((x+1)^2+3)$
$= 3(x+1)^2+9$

c) $f(x) = x^2-8x+10$
$= (x-4)^2+10-16$
$= (x-4)^2-6$

d) $f(x) = x^2+9x$
$= (x+4{,}5)^2 - 20{,}25$

e) $f(x) = x^2+12$
$= (x+0)^2+12$

f) $f(x) = -2(x+5)^2+9$
$= -2\cdot(x^2+10x+25)+9$
$= -2x^2-20x-50+9$
$= -2x^2-20x-41$

g) $f(x) = -(x-7)^2+2$
$= -(x^2-14x+49)+2$
$= -x^2+14x-49+2$
$= -x^2+14x-47$

h) $f(x) = x^2 - 4x + 8$
$= (x-2)^2 + 8 - 4$
$= (x-2)^2 + 4$

i) $f(x) = 3x^2 + 12x + 15$
$= 3 \cdot (x^2 + 4x + 5)$
$= 3 \cdot ((x+2)^2 + 5 - 4)$
$= 3 \cdot ((x+2)^2 + 1)$
$= 3 \cdot (x+2)^2 + 3$

j) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$
$= -(x^2 - 3x + 4)$
$= -((x-1{,}5)^2 + 4 - 2{,}25)$
$= -((x-1{,}5)^2 + 1{,}75)$
$= -(x-1{,}5)^2 - 1{,}75$

k) $f(x) = 5 \cdot (x-2)^2$
$= 5 \cdot (x^2 - 4x + 4)$
$= 5x^2 - 20x + 20$

l) $f(x) = 2 \cdot (x+7)^2 - 7$
$= 2 \cdot (x^2 + 14x + 49) - 7$
$= 2x^2 + 28x + 98 - 7$
$= 2x^2 + 28x + 91$

m) $f(x) = -3x^2 + 6x + 18$
$= -3 \cdot (x^2 - 2x - 6)$
$= -3 \cdot ((x-1)^2 - 6 - 1)$
$= -3 \cdot ((x-1)^2 - 7)$
$= -3(x-1)^2 + 21$

n) $f(x) = x^2 + 9x + 2$
$= (x+4{,}5)^2 + 2 - 20{,}25$
$= (x+4{,}5)^2 - 18{,}25$

2 a) $S(7/4)$

b) $S(-2/-7)$

c) $f(x) = 2x^2 + 4x + 6$
$= 2 \cdot (x^2 + 2x + 3)$
$= 2 \cdot ((x+1)^2 + 3 - 1)$
$= 2 \cdot ((x+1)^2 + 2)$
$= 2(x+1)^2 + 4$

$\Rightarrow S(-1/4)$

d) $f(x) = 4x^2 + 12x - 12$
$= 4 \cdot (x^2 + 3x - 3)$
$= 4 \cdot ((x+1{,}5)^2 - 3 - 2{,}25)$
$= 4 \cdot ((x+1{,}5)^2 - 5{,}25)$
$= 4 \cdot (x+1{,}5)^2 - 21$

$\Rightarrow S(-1{,}5/-21)$

3) a) $f(x) = a(x+d)^2 + e$

$S(3/4)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x-3)^2 + 4$

$A(2|3)$ liegt auf f $\Rightarrow f(2) = 3$
$a \cdot (2-3)^2 + 4 = 3$
$a \cdot (-1)^2 + 4 = 3$

$$a + 4 = 3$$
$$a = -1$$

$$\Rightarrow f(x) = -1 \cdot (x-3)^2 + 4$$
$$= -1 \cdot (x^2 - 6x + 9) + 4$$
$$= -x^2 + 6x - 9 + 4$$
$$= -x^2 + 6x - 5$$

b) $f(x) = a(x+d)^2 + e$

$S(-1|4)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x+1)^2 + 4$

$A(2|3)$ liegt auf f $\Rightarrow f(2) = 3$

$$a \cdot (2+1)^2 + 4 = 3$$
$$a \cdot 3^2 + 4 = 3$$
$$9a + 4 = 3$$
$$9a = -1$$
$$a = -\frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{9}(x+1)^2 + 4$$
$$= -\frac{1}{9}(x^2 + 2x + 1) + 4$$
$$= -\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x - \frac{1}{9} + 4$$
$$= -\frac{1}{9}x^2 - \frac{2}{9}x + 3\frac{8}{9}$$

c) $f(x) = a(x+d)^2 + e$

$S(5|1)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a(x-5)^2 + 1$

$A(2|3)$ liegt auf f $\Rightarrow f(2) = 3$

$$a \cdot (2-5)^2 + 1 = 3$$
$$a \cdot (-3)^2 + 1 = 3$$
$$9a + 1 = 3$$
$$9a = 2$$
$$a = \frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{9}(x-5)^2 + 1$$
$$= \frac{2}{9}(x^2 - 10x + 25) + 1$$
$$= \frac{2}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{50}{9} + 1$$
$$= \frac{2}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{59}{9}$$

d) Es gibt keine quadratische Funktion, welche diese Bedingungen erfüllt.

$f(x) = a(x+d)^2 + e$

$S(2|5)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a \cdot (x-2)^2 + 5$

$A(2|3)$ liegt auf f $\Rightarrow f(2) = 3$

$a \cdot (2-2)^2 + 5 = 3$

$a \cdot 0 + 5 = 3$

$5 = 3$ ↯

4a) $f(x) = ax + b$

Achsenabschnitt: 4 $\Rightarrow f(x) = ax + 4$

$A(6/0)$ liegt auf f $\Rightarrow f(6) = 0$

$a \cdot 6 + 4 = 0$

$6a + 4 = 0$

$6a = -4$

$a = -\frac{2}{3}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}x + 4$

b) $f(x) = a(x+d)^2 + e$

$S(4/6)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a(x-4)^2 + 6$

$A(5|4)$ liegt auf f $\Rightarrow f(5) = 4$

$a \cdot (5-4)^2 + 6 = 4$

$a \cdot 1^2 + 6 = 4$

$$a + 6 = 4$$
$$a = -2$$

$$\Rightarrow f(x) = -2 \cdot (x-4)^2 + 6$$
$$= -2 \cdot (x^2 - 8x + 16) + 6$$
$$= -2x^2 + 16x - 32 + 6$$
$$= -2x^2 + 16x - 26$$

c) $f(x) = a(x+d)^2 + e$

Scheitelpunkt $S(1/4) \Rightarrow f(x) = a(x-1)^2 + 4$

$A(0/5)$ liegt auf $f \Rightarrow f(0) = 5$

$$a \cdot (0-1)^2 + 4 = 5$$
$$a \cdot (-1)^2 + 4 = 5$$
$$a + 4 = 5$$
$$a = 1$$

$$\Rightarrow f(x) = (x-1)^2 + 4$$
$$= x^2 - 2x + 1 + 4$$
$$= x^2 - 2x + 5$$

d) $f(x) = ax + b$

Achsenabschnitt: $1 \Rightarrow f(x) = ax + 1$

$A(4/2)$ liegt auf $f \Rightarrow f(4) = 2$

$$a \cdot 4 + 1 = 2$$
$$4a + 1 = 2$$
$$4a = 1$$
$$a = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x + 1$

5a) $S(-3/1)$

b) $f(x) = 2(x+3)^2 + 1$
$= 2 \cdot (x^2 + 6x + 9) + 1$
$= 2x^2 + 12x + 18 + 1$
$= 2x^2 + 12x + 19$

c) $A(2|y)$ liegt auf f $\Rightarrow$ $f(2) = y$
$2 \cdot 2^2 + 12 \cdot 2 + 19 = y$
$8 + 24 + 19 = y$
$51 = y$

$\Rightarrow A(2|51)$

d) $g(x) = 2(x+3)^2 + 2$
$= 2(x^2 + 6x + 9) + 2$
$= 2x^2 + 12x + 20$

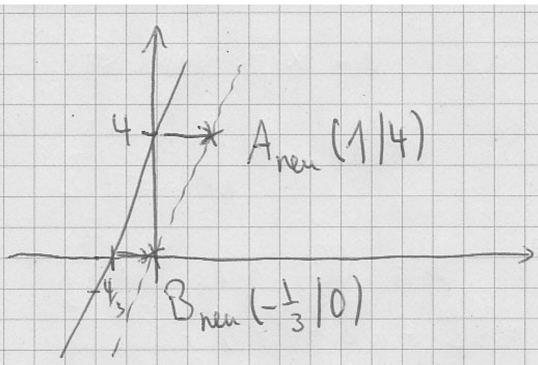
6a) Wir setzen $x = 0$ ein:

$f(0) = 3 \cdot 0 + 4 = 4$

$\Rightarrow A(0/4)$

b) $f(x) = 0$
$3x + 4 = 0$
$3x = -4$
$x = -\frac{4}{3}$
$\Rightarrow B(-\frac{4}{3}|0)$

c)



$g(x) = ax + b$

$a = \frac{0-4}{-\frac{1}{3}-1} = \frac{-4}{-\frac{4}{3}} = -4 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 3$

$\Rightarrow g(x) = 3x + b$

$A_{neu}(1|4)$ liegt auf $g \Rightarrow g(1) = 4$

$3 \cdot 1 + b = 4$

$b = 1$

$\Rightarrow g(x) = 3x + 1$

7a) $f(x) = x^2 - 6x + 2$

$= (x-3)^2 + 2 - 9$

$= (x-3)^2 - 7$

b) $S(3|-7)$

c) Wenn $A(1|-2)$ auf f liegt, dann müsste gelten: $f(1) = -2$

$1^2 - 6 \cdot 1 + 2 = -2$

$1 - 6 + 2 = -2$

$-3 = -2$ ↯

Der Punkt liegt nicht auf dem Graphen von f.

d) $g(x) = (x-2)^2 - 7$
$= (x^2 - 4x + 4) - 7$
$= x^2 - 4x - 3$

8a) $f(x) = a(x-d)^2 + e$

Scheitelpunkt $S(2/4) \Rightarrow f(x) = a(x-2)^2 + 4$

$A(5/9)$ liegt auf f $\Rightarrow f(5) = 9$

$$a \cdot (5-2)^2 + 4 = 9$$
$$a \cdot 3^2 + 4 = 9$$
$$9a + 4 = 9$$
$$9a = 5$$
$$a = \frac{5}{9}$$

$\Rightarrow f(x) = \frac{5}{9}(x-2)^2 + 4$
$= \frac{5}{9} \cdot (x^2 - 4x + 4) + 4$
$= \frac{5}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{20}{9} + 4$
$= \frac{5}{9}x^2 - \frac{20}{9}x + \frac{56}{9}$

b) Wir setzen $x = 0$:

$f(0) = \frac{5}{9} \cdot 0 - \frac{20}{9} \cdot 0 + \frac{56}{9}$

$\Rightarrow C(0|\frac{56}{9})$

c) Wenn B (3|8) auf f liegt, so muss gelten:

$f(3) = 8$

$$f(3) = \frac{5}{9} \cdot 9 - \frac{20}{9} \cdot 3 + \frac{56}{9} = 8$$

$$5 - \frac{20}{3} + \frac{56}{9} = 8$$

$$\frac{41}{9} = 8 \quad \lightning$$

B liegt nicht auf dem Graphen von f.

d)
$$g(x) = \frac{5}{9}(x-3)^2 + 6$$
$$= \frac{5}{9}(x^2 - 6x + 9)^2 + 6$$
$$= \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 5 + 6$$
$$= \frac{5}{9}x^2 - \frac{10}{3}x + 11$$

9a) $f(x) = a(x-d)^2 + e$

S(-2|-5) Scheitelpunkt $\Rightarrow f(x) = a(x+2)^2 - 5$

A(0|2) liegt auf f $\Rightarrow f(0) = 2$

$$a \cdot (0+2)^2 - 5 = 2$$
$$a \cdot 2^2 - 5 = 2$$
$$4a - 5 = 2$$
$$4a = 7$$
$$a = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{7}{4}(x+2)^2 - 5$$
$$= \frac{7}{4}(x^2 + 4x + 4) - 5$$
$$= \frac{7}{4}x^2 + 7x + 7 - 5$$
$$= \frac{7}{4}x^2 + 7x + 2$$

b) S_{neu} $(2|-5)$

A_{neu} $(0|2)$

$$g(x) = \frac{7}{4}(x-2)^2 - 5$$
$$= \frac{7}{4}(x^2 - 4x + 4) - 5$$
$$= \frac{7}{4}x^2 - 7x + 7 - 5$$
$$= \frac{7}{4}x^2 - 7x + 2$$

10a) $f(x) = a(x-d)^2 + e$

Scheitelpunkt $S(50|24) \Rightarrow f(x) = a(x-50)^2 + 24$

$A(0|0)$ liegt auf $f \Rightarrow f(0) = 0$

$$a \cdot (0-50)^2 + 24 = 0$$
$$a \cdot 50^2 + 24 = 0$$
$$2500a = -24$$
$$a = \frac{-6}{625}$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{6}{625}(x-50)^2 + 24$$
$$= -\frac{6}{625}(x^2 - 100x + 2500) + 24$$
$$= -\frac{6}{625}x^2 + \frac{24}{25}x - 24 + 24$$
$$= -\frac{6}{625}x^2 + \frac{24}{25}x$$

b) Der Punkt $E(40|y)$ liegt auf f.
Wir bestimmen y.
$E(40|y)$ liegt auf $f \Rightarrow f(40) = y$

$$-\frac{6}{625} \cdot (40)^2 + \frac{24}{25} \cdot 40 = y$$

$$23{,}04 = y$$

Der Bogen befindet sich an dieser Stelle 23,04 m über dem Boden.

$23{,}04\,m - 1{,}75\,m = 21{,}29\,m$

Er befindet sich 21,29 m über meinem Kopf.

c) $F(5/y)$ liegt auf f. Wir bestimmen y.

$F(5/y)$ liegt auf $f \Rightarrow f(5) = y$

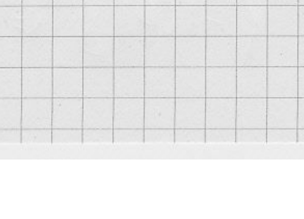
$$-\frac{6}{625} \cdot 5^2 + \frac{24}{25} \cdot 5 = y$$

$$4{,}56\,m = y$$

Ja, ich kann aufrecht stehen. Der Bogen befindet sich dort 4,56 m über dem Boden.

d) Parabeln sind symmetrisch. Das rechte Ende ist daher genauso weit von der 50m-Markierung entfernt wie das linke.

$\Rightarrow$ Das rechte untere Ende ist an der 100m-Markierung.



$\Rightarrow x = 100$

11a) $f(x) = -0{,}1\,x^2 + 2x + 0{,}5$

$= -0{,}1 \cdot (x^2 - 20x - 5)$

$= -0{,}1 \cdot ((x-10)^2 - 5 - 100)$

$= -0{,}1 \cdot ((x-10)^2 - 105)$

$= -0{,}1 \cdot (x-10)^2 + 10{,}5$

Die größte Höhe beträgt 10,5 m. Sie wird nach 10 m erreicht.

b) Beginn: $A(0/y_1)$
Ende: $B(18/y_2)$

A liegt auf f $\Rightarrow$ $f(0) = y_1$

$-0{,}1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0{,}5 = y_1$

$0{,}5 = y_1$

B liegt auf f $\Rightarrow$ $f(18) = y_2$

$-0{,}1 \cdot 18^2 + 2 \cdot 18 + 0{,}5 = y_2$

$4{,}1 = y_2$

Der Flug begann bei 0,5 m Höhe und endete bei 4,1 m Höhe.

c) $C(2/y)$ liegt auf f $\Rightarrow$ $f(2) = y$

$-0{,}1 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + 0{,}5 = y$

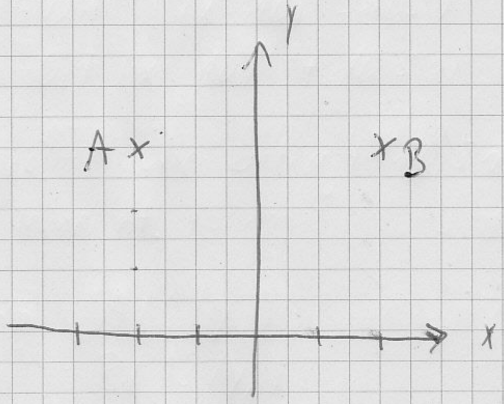
$4{,}1 = y$

$4{,}1 - 1{,}75 = 2{,}35$

Sie fliegt 2,35 m über meinen Kopf hinweg.

d) Für $x \geq 21$ hat $f(x)$ negative Werte.
Die Fliege kann nicht unter dem Boden fliegen.

12)



Der Scheitelpunkt muss in der Mitte zwischen A und B liegen.

Bsp.: $S_1(0|0)$
$S_2(0|1)$

<u>Funktion f_1</u>

$S(0|0)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f_1(x) = a(x-0)^2+0$

$B(2|3)$ liegt auf $f_1 \Rightarrow f_1(2) = 3$

$a \cdot 2^2 = 3$

$4a = 3$

$a = \frac{3}{4}$

$\Rightarrow f_1(x) = \frac{3}{4}x^2$

<u>Funktion f_2</u>

$S(0|1)$ Scheitelpunkt $\Rightarrow f_2(x) = a(x-0)^2+1$

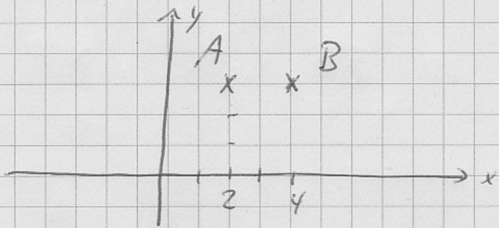
$B(2|3)$ liegt auf $f_2 \Rightarrow f_2(2) = 3$

$a \cdot 2^2 + 1 = 3$

$$4a + 1 = 3$$
$$4a = 2$$
$$a = 0{,}5$$

$$\Rightarrow f_2(x) = 0{,}5x^2$$

13)



Der Scheitelpunkt liegt wieder in der Mitte zwischen A und B.

Bsp.: $S_1(3|0)$
$S_2(3|1)$

Funktion f_1

$S(3|0)$ Scheitelp.

$\Rightarrow f_1(x) = a(x-3)^2 + 0$

$A(2|3)$ auf f_1

$\rightarrow f_1(2) = 3$

$a(2-3)^2 = 3$

$a \cdot (-1)^2 = 3$

$a = 3$

$\Rightarrow f_1(x) = 3(x-3)^2$

$= 3(x^2 - 6x + 9)$

$= 3x^2 - 18x + 27$

Funktion f_2

$S(3|1)$ Scheitelp.

$\Rightarrow f_2(x) = a(x-3)^2 + 1$

$A(2|3)$ auf f_2

$\rightarrow f_2(2) = 3$

$a(2-3)^2 + 1 = 3$

$a \cdot (-1)^2 + 1 = 3$

$a + 1 = 3$

$a = 2$

$\Rightarrow f_2(x) = 2(x-3)^2 + 1$

$= 2(x^2 - 6x + 9) + 1$

$= 2x^2 - 12x + 18 + 1$

$= 2x^2 - 12x + 19$

14) $f(x) = 2(x-2)^2 - 3$

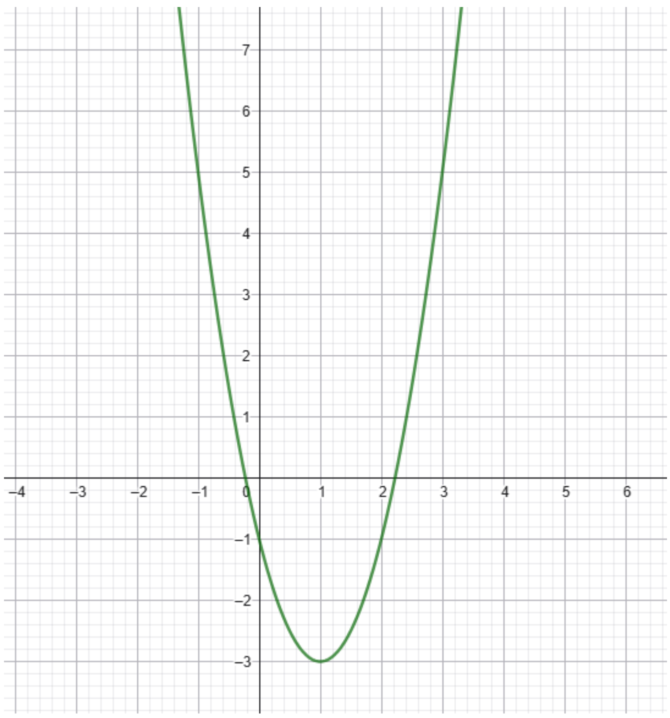
$= 2(x^2 - 4x + 4) - 3$

$= 2x^2 - 8x + 8 - 3$

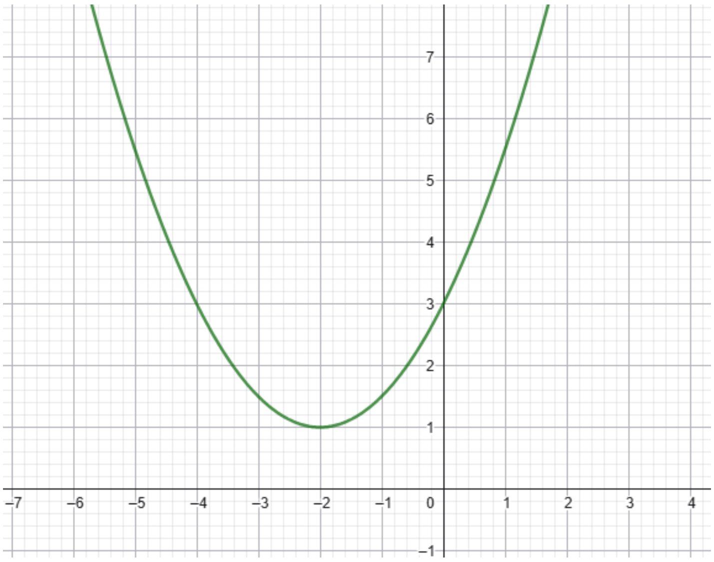
$= 2x^2 - 8x + 5$

Aufgabe 15

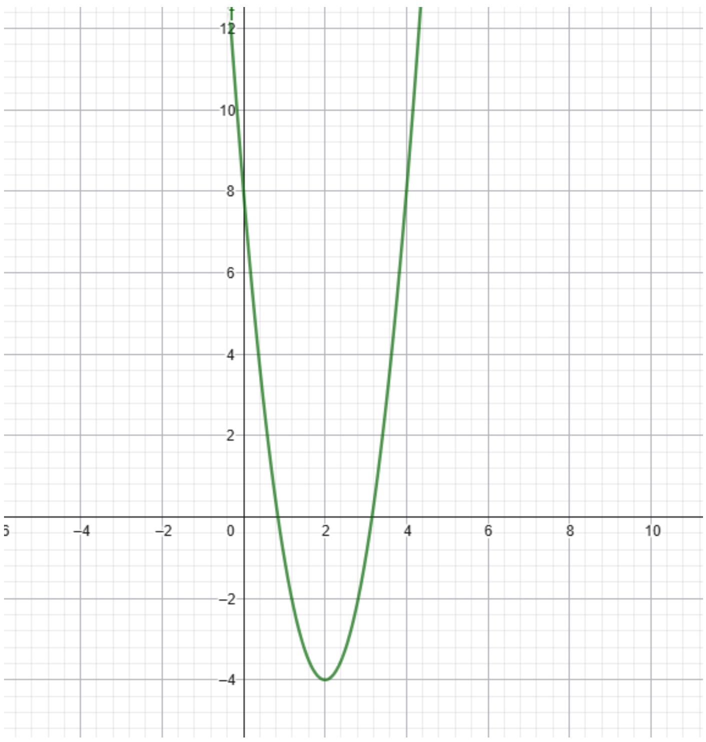
a) Wir tragen zuerst den Scheitelpunkt ein: S(1/-3). Der Punkt kann direkt der Funktionsgleichung entnommen werden. Anschließend tragen wir einige weitere Punkte ein mit Hilfe der Regel
1 nach rechts/links und a mal 1 nach oben/unten, 2 nach rechts/links und a mal 4 nach oben/unten, 3 nach rechts/links und a mal 9 nach oben/unten. Bei unserer Funktion bedeutet das: 1 nach rechts und links und 2 nach oben; 2 nach rechts und links und 8 nach oben; 3 nach rechts und links und 18 nach oben. Dann verbinden wir die Punkte mit einer geschwungenen Kurve.



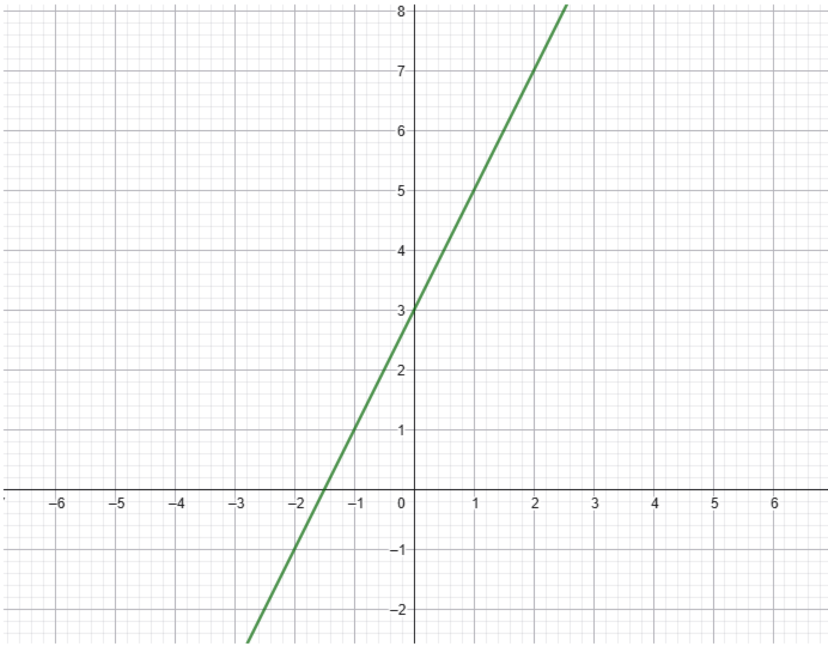
b) Wir tragen zuerst den Scheitelpunkt ein: S(-2/1). Der Punkt kann direkt der Funktionsgleichung entnommen werden. Anschließend tragen wir einige weitere Punkte ein mit Hilfe der Regel
1 nach rechts/links und a mal 1 nach oben/unten, 2 nach rechts/links und a mal 4 nach oben/unten, 3 nach rechts/links und a mal 9 nach oben/unten. Bei unserer Funktion bedeutet das: 1 nach rechts und links und 0,5 nach oben; 2 nach rechts und links und 2 nach oben; 3 nach rechts und links und 4,5 nach oben. Dann verbinden wir die Punkte mit einer geschwungenen Kurve.



c) Wir tragen zuerst den Scheitelpunkt ein: S(2/-4). Der Punkt kann direkt der Funktionsgleichung entnommen werden. Anschließend tragen wir einige weitere Punkte ein mit Hilfe der Regel
1 nach rechts/links und a mal 1 nach oben/unten, 2 nach rechts/links und a mal 4 nach oben/unten, 3 nach rechts/links und a mal 9 nach oben/unten. Bei unserer Funktion bedeutet das: 1 nach rechts und links und 3 nach oben; 2 nach rechts und links und 12 nach oben; 3 nach rechts und links und 27 nach oben. Dann verbinden wir die Punkte mit einer geschwungenen Kurve.

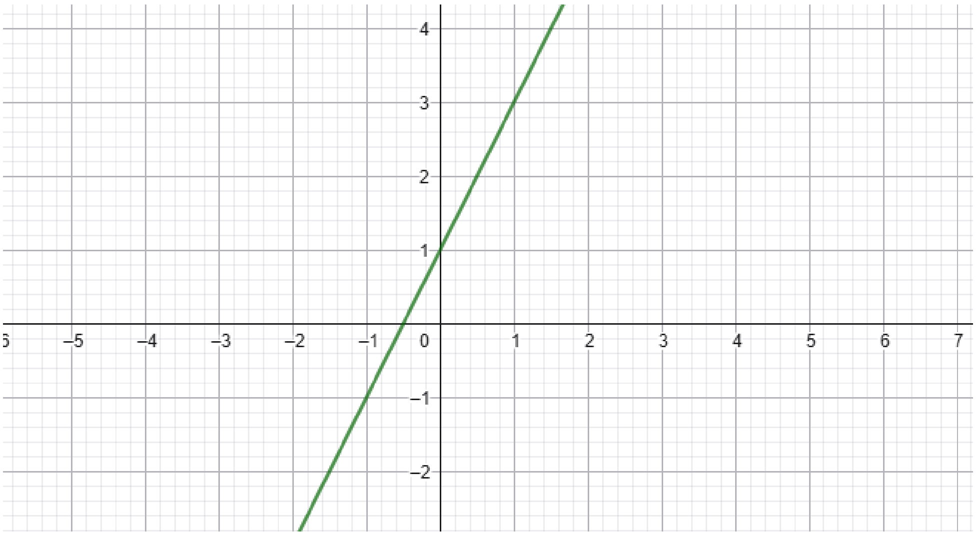


d) Der Achsenabschnitt liegt bei +3, bei 3 verläuft der Graph also durch die y-Achse. Mit Hilfe eines Steigungsdreiecks erhalten wir einen weiteren Punkt: 1 nach rechts und 2 nach oben. Wir verbinden die beiden Punkte und erhalten die gesuchte Gerade.



Aufgabe 16

a) Der Achsenabschnitt liegt bei +1, bei 1 verläuft der Graph also durch die y-Achse. Mit Hilfe eines Steigungsdreiecks erhalten wir einen weiteren Punkt: 1 nach rechts und 2 nach oben. Wir verbinden die beiden Punkte und erhalten die gesuchte Gerade.



b) Den Schnittpunkt mit der y-Achse erhält man mit Hilfe des Achsenabschnitts: S(0/1).
Den Schnittpunkt mit der x-Achse erhält man, wenn man die Nullstelle ausrechnet:

$$2x+1=0$$
$$2x=-1$$
$$x=-0{,}5$$

Damit erhalten wir: N(-0,5/0).

c) Den y-Wert erhalten wir, wenn wir x=2 in die Gleichung einsetzen:

$$y=f(2)=2\cdot 2+1=5$$

Den x-Wert erhalten wir, wenn wir y=10 einsetzen in die Gleichung:

$$2x+1=10$$
$$2x=9$$
$$x=4{,}5$$

d) Wir setzen die beiden rechten Seiten der Funktionsgleichungen gleich und berechnen damit den x-Wert des Schnittpunktes:

$$f(x)=g(x)$$
$$2x+1=-3x+4$$
$$5x+1=4$$
$$5x=3$$
$$x=0{,}6$$

Den x-Wert setzen wir dann in eine der Gleichungen ein, um den noch fehlenden y-Wert auszurechnen:

$$f(0{,}6)=2\cdot 0{,}6+1=1{,}2+1=2{,}2$$

Damit haben wir den Schnittpunkt: S(0,6/2,2).