

Lösungen

Teil B (mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1

a)

Berechnen Sie die Nullstellen von f .

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$$

$$\text{Bedingung: } f(x) = 0$$

$$x^3 - 6x^2 + 8x = 0$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (x^2 - 6x + 8) = 0 \quad \text{Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt}$$

$$\text{I) } x_1 = 0$$

$$\text{II) } x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} \quad x_2 = 4 \quad x_3 = 2$$

Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_f .

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 8$$

$$f''(x) = 6x - 12$$

$$f'''(x) = 6$$

Hinreichende Bedingung für den Wendepunkt: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$6x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$f'''(2) = 6 \neq 0$, damit existiert bei $x = 2$ eine Wendestelle

Wegen $f(2) = 0$ ergibt sich als Wendepunkt $W(2|0)$.

Zeigen Sie, dass $y = -4x + 8$ eine Gleichung von t_1 ist.

$$f'(2) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 8 = 12 - 24 + 8 = -4 \quad \Rightarrow \quad t(x) = -4x + b$$

$$W(2|0) \text{ auf } t \quad \Rightarrow \quad t(2) = 0$$

$$-4 \cdot 2 + b = 0$$

$$b = 8$$

$$t(x) = -4x + 8$$

b)

Berechnen Sie für das Dreieck OWQ die Weite des Innenwinkels bei Q .

Zur Berechnung des Innenwinkels werden die Steigungen der beiden Tangenten benötigt.

$$\text{Steigung von } t_1 : m_1 = -4$$

$$\text{Steigung von } t_2 : m_2 = f'(0) = 8$$

$$\text{Steigungswinkel der Tangente } t_1 : \tan(\alpha_1) = -4 \Rightarrow \alpha_1 \approx -76,0^\circ$$

$$\text{Steigungswinkel der Tangente } t_2 : \tan(\alpha_2) = 8 \Rightarrow \alpha_2 \approx 82,9^\circ$$

Differenz der Steigungswinkel: $\alpha_2 - \alpha_1 = 82,9^\circ - (-76,0^\circ) = 158,9^\circ$

Somit ist $\alpha_3 = 180^\circ - 158,9^\circ = 21,1^\circ$ die Winkelweite bei Q.

Bestimmen Sie den Wert von u.

Bedingung: $f'(u) = 8$

$3u^2 - 12u + 8 = 8 \Leftrightarrow 3u^2 - 12u = 0 \Leftrightarrow u(3u - 12) = 0$ Satz vom Nullprodukt

I) $u = 0$

II) $u = 4$

Wegen $u > 0$ gilt $u = 4$.

c)

Erläutern Sie, welche Symmetrieeigenschaft daraus für G_f folgt.

Der Graph G_h von h ist punktsymmetrisch zum Ursprung, denn der Funktionsterm von h enthält nur Potenzen von x mit ungeraden Hochzahlen (Exponenten).

Das Schaubild G_f von f ist gegenüber G_h um 2 Einheiten nach rechts verschoben. Daher ist G_f punktsymmetrisch zu $W(2|0)$.

d)

Bestimmen Sie den Wert von a.

Die Steigung der Wendetangente an das Schaubild von f ist $m = -4$.

Durch die Spiegelung des Schaubildes an der senkrechten Geraden $x = a$ ändert sich die Steigung der Wendetangente zu $m^* = 4$.

Da die Wendetangente an G_{f^*} durch $S(0|16)$ verläuft, ist die Gleichung der Wendetangente an G_{f^*} $y = 4x + 16$.

Durch die Spiegelung an der Geraden $x = a$ liegt der Wendepunkt W^* von G_{f^*} weiterhin auf der x-Achse.

Berechnung der Nullstelle der Wendetangente an G_{f^*} : $0 = 4x + 16 \Leftrightarrow x = -4$

Daher ist $W^*(-4|0)$ der Wendepunkt von G_{f^*} .

Der Wendepunkt von G_f ist $W(2|0)$.

Um die Wendestelle von $x = 2$ nach $x^* = -4$ zu bringen, muss der Punkt an der senkrechten Geraden $x = -1$ gespiegelt werden (Mittelwert von 2 und -4).

Daher ist $a = -1$.

Aufgabe 2

$$2a) f(2) = 20 \\ \Rightarrow 20.000 \text{ €/h}$$

b) Ich lasse den Graphen von f mit dem Graph-Programm des GTR zeichnen. Anschließend suche ich mit X-1AL die x -Werte, die zu den Punkten des Graphen mit $y=10$ gehören. Der GTR zeigt an $x_1 \approx 0,43$, $x_2 \approx 3,18$ und $x_3 \approx 7,40$. Es kann nicht mehr als 3 solche Punkte geben. x_3 liegt außerhalb des Def. Bereichs.

$$\Rightarrow x_1 \approx 0,43 \quad \hat{=} \quad 10:26 \text{ Uhr} \\ x_2 \approx 3,18 \quad \hat{=} \quad 13:11 \text{ Uhr}$$

$$c) \text{N.B.: } f'(x) = 0 \\ f'(x) = 3x^2 - 22x + 28$$

$$3x^2 - 22x + 28 = 0$$

GTR...

$$x_1 \approx 1,64$$

$$x_2 \approx 5,69$$

$$\text{H.B.: } f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0 \\ f''(x) = 6x - 22$$

$$f''(1,64) = -12,16 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(5,69) = 12,14 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

Ränder:

$$f(0) = 0$$

$$f(1,64) = 20,75$$

$$f(5,69) = -12,60$$

$$f(7) = 0$$

Stärkster Zufluss: $x \approx 1,64 \hat{=} 11:38 \text{ Uhr}$
mit 20.750 €/h

Stärkster Abfluss: $x = 5,69 \hat{=} 15:41 \text{ Uhr}$
mit -12.600 €/h

d) gesucht: Max. von f'

$$\text{N.B.: } f''(x) = 0$$

$$6x - 22 = 0$$

$$x = \frac{11}{3}$$

$$\text{H.B.: } f''(x) = 0 \wedge f'''(x) \neq 0$$

$$f'''(x) = 6$$

$$f'''(\frac{11}{3}) = 6 \neq 0$$

$$\text{Ränder: } f'(0) = 28$$

$$f'(\frac{11}{3}) = -12,3$$

$$f'(7) = 21$$

stärkste Zunahme der Veränderungsrate:

um 10 Uhr mit 28.000 €/h^2

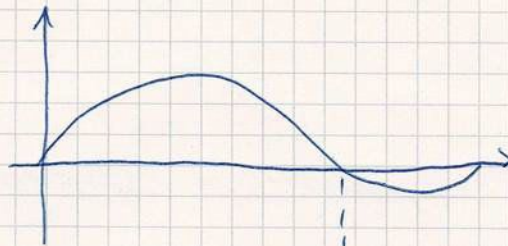
e) $f(x) = 0$
 $x^3 - 11x^2 + 28x = 0$
 (GTR...)

$x_1 = 0$

$x_2 = 4$

$x_3 = 7$

Also:



Zufluss 4h
 max. 20.750 ℓ/h

Abfluss 3h
 max. 12.600 ℓ/h

Innerhalb der ersten 4h fließt Wasser zu.

$\Rightarrow$ am meisten Wasser um 14 Uhr

In den letzten 3h fließt weniger Wasser ab als in den ersten 4h zu

(1 Stunde länger, Maximum höher,
 vgl. Graph-Programm GTR)

$\Rightarrow$ am wenigsten Wasser um 10 Uhr

f) Wenn 4h lang Wasser mit 20.750 ℓ/h
 zufließen würden maximal $4 \cdot 20.750 < 84.000 \ell$
 zufließen.
83.000

g) ① $g(x) = x^3 - 11x^2 + 28x + 10$

↑
Es fließen konstant
zusätzlich 10.000 l/h
zu.

② $g(x) = 0$

$$x^3 - 11x^2 + 28x + 10 = 0$$

GTR...

$$x_1 \approx -0,32$$

$$x_2 = 5$$

$$x_3 \approx 6,31$$

Probe: $g(6) = -2 \checkmark$

Antwort: Ja!

Zwischen $x_2 = 5$ (15 Uhr)
und $x_3 \approx 6,31$ ($\approx 16:17$ Uhr)
fließt insgesamt Wasser ab.

Aufgabe 3

3a) $E(x) = 25 \cdot x$

x : Anzahl an Kisten
(zu je 100 Personen)

$$K(x) = \frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{50}{3}x + 100$$

$$\Rightarrow G(x) = E(x) - K(x)$$

$$= 25x - \frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{50}{3}x - 100$$

$$= -\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{3}x - 100$$

$$b) \quad G(x) = 0$$

$$-\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{25}{3}x - 100 = 0$$

(GTR...)

$$x_1 \approx -26,06$$

$$x_2 = 10$$

$$x_3 = 46,06$$

x_1 liegt außerhalb des Definitionsbereichs (da die Anzahl der Kisten positiv sein muss)

Probe: $G(0) = -100 < 0$

$$G(20) = 100 > 0$$

$$G(50) = -100 < 0$$

$\Rightarrow$ Der Gewinnbereich liegt zwischen 10 und 46,06 Kisten.
(bzw. 10 und 46)

$$c) \quad G'(x) = -\frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{25}{3}$$

$$G''(x) = -\frac{1}{20}x + \frac{1}{2}$$

N.B.: $G'(x) = 0$

$$-\frac{1}{40}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{25}{3} = 0$$

GTR...

$$x_1 = -10,82 \quad (\text{außerhalb des Def. Bereichs})$$

$$x_2 = 30,82$$

H.B.: $G'(x) = 0 \wedge G''(x) \neq 0$

$$G''(30,82) = -1,041 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

Känder: $G(0) = -100$
 $G(30,82) = 150,34$

nach rechts:

$G(x) < 0$ für $x > 46,06$ (siehe b)

⇒ Die gesuchte Menge liegt bei 30,82 Kisten pro Tag
 (bzw. bei 31, wenn nur ganze Kisten produziert werden)
 und bringt einen Gewinn
 von 150,34 € (bzw.

$G(30) = 150$

$G(31) = 150,325$

150,325 €) pro Tag

d) $G_{\text{neu}}(x) = E_{\text{neu}}(x) - K(x)$
 $= 15x - \frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{50}{3}x - 100$
 $= -\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{3}x - 100$

$G_{\text{neu}}(x) = 0$
 $-\frac{1}{120}x^3 + \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{3}x - 100 = 0$
 GTR...
 $x = -14,35$

Probe: $G(0) = -100$

Antwort: Nein!

egal, wie viel er produzieren würde, er
 würde auf jeden Fall Verlust machen.

Ab $x = -14,35$ befindet sich der Graph
 sich unterhalb der x-Achse.

g)

Es wurden noch 30% von einst 500, also
 150 verkauft. Das ergibt einen Erlös von
 $150 \cdot 0,5 \text{ €} = 75 \text{ €}$.

Um diesen Erlös zu halten, müssen $70 \text{ €} : 0,12 \text{ €} = 375$
 Gersten verkauft werden.

Eine solche Steigerung (mehr als Verdopplung) ist

unrealistisch.

Aufgabe 4

$$4a) \quad f'(x) = 3x^2 - 24x + 32$$

$$f''(x) = 6x - 24$$

$$N.B.: f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 24x + 32 = 0$$

GTR...

$$x_1 \approx 1,69$$

$$x_2 \approx 6,31$$

$$H.B.: f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$$

$$f''(1,69) = -13,86 < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(6,31) = 13,86 > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$\text{Ränder: } f(0) = 0$$

$$f(1,69) = 24,63$$

$$f(6,31) = -24,63$$

$$f(9) = 45$$

nördlichste Stelle: $P_1(9/45)$

südlichste " : $P_2(6,31/-24,63)$

$$b) \quad f(2) = 24$$

$\Rightarrow$ Die Straße verläuft durch den Ort.

$$c) \quad f(x) = 24$$

$$x^3 - 12x^2 + 32x = 24$$

GTR...

$$x_1 \approx 1,39$$

$$x_2 = 2$$

$$x_3 \approx 8,6$$

$\Rightarrow$ Es sind $8,6 - 2 = 6,6$ km.

$$d) \quad f''(x) = 0$$

$$6x - 24 = 0$$

$$x = 4$$

$$f''(0) = -24 < 0$$

$$f''(5) = 30 - 24 = 6 > 0$$

Rechtskrümmung: $0 \leq x < 4$
 Linkskrümmung: $4 < x \leq 7$

Aufgabe 5

$$5a) \quad f(x) = 0$$

$$\frac{1}{6750} x^4 - \frac{1}{75} x^2 - 4,5 = 0$$

GTR...

$$x_1 = -15$$

$$x_2 = 15$$

$$\Rightarrow \text{Länge} = 30 \text{ m}$$

b) gesucht: Minimum

N.B.: $f'(x) = 0$

$$\frac{2}{3375} x^3 - \frac{2}{75} x = 0$$

GTR...

$$x_1 \approx -6,71$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 \approx 6,71$$

H.B.: $f'(x) = 0 \wedge f''(x) \neq 0$

$$f''(-6,71) = 0,053... > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

$$f''(0) = -\frac{2}{75} < 0 \Rightarrow \text{HP}$$

$$f''(6,71) = 0,053... > 0 \Rightarrow \text{TP}$$

Ränder: $f(-15) = 0$

$$f(-6,71) = -4,8$$

$$f(6,71) = -4,8$$

$$f(15) = 0$$

Die Wasserlinie befindet sich 1m unter der
x-Achse

$\Rightarrow$ Tiefgang: 3,8 m

c) ① $f(13) = -2,522 \Rightarrow P(13 | -2,522)$

$$f'(13) \approx 0,96$$

$$\Rightarrow t(x) = 0,96x + b$$

$$P(13 | -2,522) \text{ liegt auf } t \Rightarrow t(13) = -2,522$$

$$0,96 \cdot 13 + b = -2,522$$

$$12,48 + b = -2,522$$

$$b = -15,002 \approx -15$$

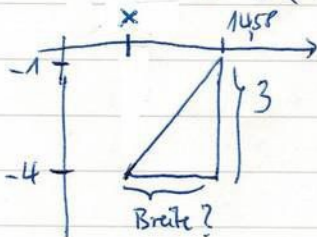
$$\Rightarrow t(x) = 0,96x - 15$$

② $0,96x - 15 = -1$

$$0,96x = 14$$

$$x \approx 14,58$$

$$\Rightarrow S(14,58 | -1)$$



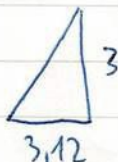
Breite:

$$0,96x - 15 = -4$$

$$0,96x = 11$$

$$x \approx 11,46$$

$$14,58 - 11,46 = 3,12$$



$$A = \frac{3 \cdot 3,12}{2} = \underline{\underline{4,68 \text{ m}^2}}$$

d) Länge entlang der Wasserlinie:

$$f(x) = -1$$

$$\frac{1}{6750} x^4 - \frac{1}{75} x^2 - 4,5 = -1$$

GTR...

$$x_1 = -14,32$$

$$x_2 = 14,32$$

$$\text{Länge} = 2 \cdot 14,32 = 28,64 \text{ m}$$

$$v_E = 4,5 \cdot \sqrt{28,64}$$

$$\approx 24,08 \text{ km/h}$$

$$\begin{aligned} 500 \text{ Seemeilen} &= 500 \cdot 1,852 \text{ km} \\ &= 926 \text{ km} \end{aligned}$$

$$\frac{\text{Weg}}{\text{Zeit}} = \text{Geschwindigkeit}$$

$$\frac{926 \text{ km}}{t} = 24,08 \text{ km/h}$$

$$926 = 24,08 \cdot t$$

$$\frac{926}{24,08} = t$$

$$38,455 \approx t$$

Es sind $\approx 38 \text{ h } 27 \text{ Min}$

Aufgabe 6

6a) Die Funktion ist symmetrisch zur y -Achse (gerader Exponent) und steigt von $x=0$ aus nach rechts und links an. Die Tiefe in der Mitte ergibt sich also aus den bei $x=-5$ und $x=5$ erreichten Funktionswerten. Dazu lasse ich den Graphen mit dem Graph-Programm des GTR zeichnen. Dann bestimme ich mit y -CALL das zu $P(5|y)$ gehörende y . Das Ergebnis ist 5.

$\Rightarrow$ Tiefe: 5 m

b) Ich zeichne den Graphen mit dem Graph-Programm des GTR. Dann bestimme ich mit x -CALL das zu $P(x|3)$ gehörende x . Ich erhalte -4,4 und 4,4

$\Rightarrow$ Breite = 8,8 m

c) Steigung unter
2,86 bei $x \rightarrow \tan(-2,86) < f'(x) < \tan(2,86)$
 $-0,05 < f'(x) < 0,05$

$$f'(x) = \frac{4}{125} x^3$$

Ich lasse mit dem Graph-Programm des GTR $f'(x)$ zeichnen. Dann bestimme ich mit x -CALL die zu $P(x|0,05)$ gehörenden x und die zu $P(x|-0,05)$ gehörenden x .

Ich erhalte: 1,16 (zu 0,05)
-1,16 (zu -0,05)

Probe: $f'(-2) = -0,256 \Rightarrow \alpha = -14,36^\circ$
 $f'(0) = 0 \Rightarrow \alpha = 0^\circ$
 $f'(2) = 0,256 \Rightarrow \alpha = 14,36^\circ$

$\Rightarrow -1,16 < x < 1,16$

d) $f(4) = 2,048$
 $f(-4) = 2,048$

Bestimmung der Normalen:

$f'(4) = 2,048$
 $f'(-4) = -2,048$

zu -4:

$n_1(x) = -\frac{1}{2,048}x + b$

$P_1(4|2,048) \text{ auf } n_1 \Rightarrow$

$-\frac{1}{2,048} \cdot 4 + b = 2,048$

$b = 2,048 + \frac{4}{2,048}$

$b = 4$

$\Rightarrow n_1(x) = -\frac{1}{2,048}x + 4$

$\approx -0,488x + 4$

zu 4:

$n_2(x) = \frac{1}{2,048}x + b$

$P(-4|2,048) \text{ auf } n_2 \Rightarrow$

$\frac{1}{2,048} \cdot (-4) + b = 2,048$

$b = 2,048 + \frac{4}{2,048}$

$b = 4$

$\Rightarrow n_2(x) = \frac{1}{2,048}x + 4$

$\approx 0,488x + 4$

Die Plattform befindet sich auf der x-Achse
 $\Rightarrow NS$ gesucht

$$\begin{array}{ll}
 -0,488x + 4 = 0 & 0,488x + 4 = 0 \\
 -0,488x = -4 & 0,488x = -4 \\
 x = 8,20 & x = -8,20 \\
 \Rightarrow \text{Abstand} = 2 \cdot 8,2 = 16,4 \text{ m}
 \end{array}$$

Aufgabe 7

- a) *Gib an, zu welchen Uhrzeiten die Außentemperatur minimal bzw. maximal ist.*

Das Schaubild von f besitzt die Periode $p = \frac{2\pi}{\pi/12} = 24$ Stunden.

Da das Schaubild von f gegenüber der Grundsinusfunktion um 8,5 nach rechts verschoben ist, befindet sich die Wendestelle bei $x = 8,5$.

Die minimale Außentemperatur existiert bei $x = 8,5 - \frac{p}{4} = 2,5$ Stunden
(also um 2.30 Uhr).

Die maximale Außentemperatur existiert bei $x = 8,5 + \frac{p}{4} = 14,5$ Stunden
(also um 14.30 Uhr).

Wann ist der Temperaturanstieg im Freien am größten?

Der Temperaturanstieg ist an der Wendestelle am größten, also bei $x = 8,5$
(um 8.30 Uhr).

- b) *Bestimme einen Term der Funktion g , der den Temperaturverlauf K_g wiedergibt.*

Die Funktion g hat die Bauart $g(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$.

Es gilt $d = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} = \frac{21 + 15}{2} = 18$. Die Amplitude beträgt $a = 3$.

Periode $p = 24$ und damit $24 = \frac{2\pi}{b} \Rightarrow b = \frac{\pi}{12}$

Die Wendestelle mit positiver Steigung befindet sich bei $x = 12$.
Somit gilt $c = 12$.

$$g(x) = 3 \cdot \sin\left[\frac{\pi}{12}(x - 12)\right] + 18$$

Beschreibe, wie K_g aus dem Schaubild der Sinusfunktion mit $y = \sin(x)$ entsteht.

Das Schaubild von g entsteht aus der Sinusfunktion durch folgende Schritte:

- 1.) Streckung mit dem Faktor $a = 3$ in y -Richtung
- 2.) Verschiebung um 18 nach oben
- 3.) Streckung mit dem Faktor $\frac{12}{\pi}$ in x -Richtung.
- 4.) Verschiebung um 12 nach rechts

Gib eine mögliche Ursache für die zeitliche Verschiebung der beiden Temperaturverläufe K_f und K_g an.

Die Ursache für die zeitliche Verschiebung liegt darin begründet, dass eine Temperaturänderung im Freien sich erst zeitversetzt im Haus bemerkbar macht (aufgrund der Dämmung etc.).

c) Berechne a und b .

Es gilt:

$$h(24) = f(24) \Rightarrow 10 \cdot \sin\left(\frac{31}{24}\pi\right) + 24a + b = 8 \cdot \sin\left(\frac{31}{24}\pi\right) + 21 \Rightarrow 24a + b = 22,587$$

$$h'(24) = f'(24) \Rightarrow 10 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{12}(24 - 8,5)\right] + a = 8 \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \cos\left[\frac{\pi}{12}(24 - 8,5)\right] \\ \Rightarrow -0,32 + a = 0$$

Daraus ergibt sich $a = 0,32$ und $b = 14,9$.

Aufgabe 8

a) Bestimme die Periodendauer.

Die Periodendauer beträgt $T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6} \approx 0,52$ Sekunden.

b) Zwischen welchen Werten schwankt die Geschwindigkeit des Schwimmers?

Die Funktion $f(t) = 0,4 \cdot \sin(t)$ besitzt die Wertemenge $[-0,4 ; 0,4]$.

Durch die Verschiebung um 1,5 nach oben besitzt die Funktion v die Wertemenge $[1,1 ; 1,9]$.

Die Geschwindigkeit schwankt zwischen 1,1 m/s und 1,9 m/s.

c) *Gib zwei Zeitpunkte an, in dem die Geschwindigkeit am stärksten abnimmt.*

Die Geschwindigkeit des Schwimmers nimmt am stärksten an den Stellen ab, an denen die Tangentensteigung minimal ist.

Diese Stellen existieren bei den Wendepunkten mit negativer Steigung.

Anhand des Schaubildes ist zu erkennen, dass der Wendepunkt mit negativer Steigung nach einer halben Periodendauer auftritt, also bei $t = \frac{\pi}{12}$ Sekunden.

Der nächste Zeitpunkt kommt eine Periodendauer später, also bei

$$t = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{4} \text{ Sekunden.}$$