

Lösungen

Teil A (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1

1a) $x^2 - 2x - 8 = 0$

$$x = 1 \pm \sqrt{1+8}$$

$$x = 1 \pm \sqrt{9}$$

$$x = 1 \pm 3$$

$$x_1 = -2$$

$$x_2 = 4$$

b) $3x^2 + 3x - 18 = 0$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = -0,5 \pm \sqrt{0,25+6}$$

$$x = -0,5 \pm \sqrt{6,25}$$

$$x = -0,5 \pm 2,5$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 2$$

c) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$ | Sub. $x^2 = z$

$$z^2 - 13z + 36 = 0$$

$$z = 6,5 \pm \sqrt{42,25 - 36}$$

$$z = 6,5 \pm \sqrt{6,25}$$

$$z = 6,5 \pm 2,5$$

$$z_1 = 9 \text{ und } z_2 = 4 \text{ | Resub. } z = x^2$$

$$x^2 = 9$$

$$x^2 = 4$$

$$|\sqrt{}$$

$$x_1 = 3$$

$$x_3 = 2$$

$$x_2 = -3$$

$$x_4 = -2$$

d) $x^3 + 20x^2 = 0$

$$x^2 \cdot (x + 20) = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ oder } x + 20 = 0$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = -20$$

e) $x^6 - 4x^3 + 3 = 0$ | Sub. $x^3 = z$

$$z^2 - 4z + 3 = 0$$

$$z = 2 \pm \sqrt{4-3}$$

$$z = 2 \pm \sqrt{1}$$

$$z = 2 \pm 1$$

$$z_1 = 3 \text{ und } z_2 = 1 \text{ | Resub. } z = x^3$$

$$x^3 = 3$$

$$x^3 = 1$$

$$|\sqrt[3]{}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{3}$$

$$x_2 = 1$$

$$f) (x^2 - 4) \cdot (x + 2) = 0$$

$$x^2 - 4 = 0 \text{ oder } x + 2 = 0$$

$$x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$x_1 = 2 \quad x_3 = -2$$

$$x_2 = -2$$

$$g) x^5 - 3x^3 - 4x = 0$$

$$x \cdot (x^4 - 3x^2 - 4) = 0$$

$$x = 0 \text{ oder } x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \quad | \text{sub. } x^2 = z$$

$$x_1 = 0 \quad z^2 - 3z - 4 = 0$$

$$z = 1,5 \pm \sqrt{2,25 + 4}$$

$$z = 1,5 \pm \sqrt{6,25}$$

$$z = 1,5 \pm 2,5$$

$$z_1 = -1 \text{ und } z_2 = 4 \quad | \text{Result. } z = x^2$$

$$x^2 = -1 \quad x^2 = 4 \quad | \sqrt{}$$

$$\underline{\quad} \quad x_2 = 2$$

$$\quad \quad x_3 = -2$$

$$h) \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} - 1 = 0 \quad | \cdot x^4$$

$$6 + x^2 - x^4 = 0$$

$$-x^4 + x^2 + 6 = 0$$

$$x^4 - x^2 - 6 = 0 \quad | \text{sub. } x^2 = z$$

$$z^2 - z - 6 = 0$$

$$z = 0,5 \pm \sqrt{0,25 + 6}$$

$$z = 0,5 \pm \sqrt{6,25}$$

$$z = 0,5 \pm 2,5$$

$$z_1 = -2 \text{ und } z_2 = 3 \quad | \text{Result. } z = x^2$$

$$x^2 = -2 \quad x^2 = 3 \quad | \sqrt{}$$

$$\underline{\quad} \quad x_1 = \sqrt{3}$$

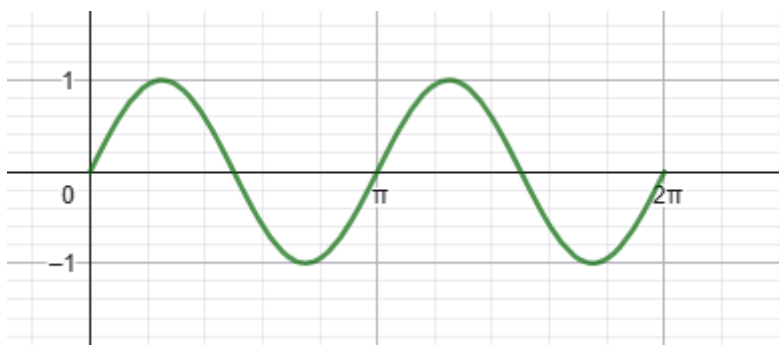
$$\quad \quad x_2 = -\sqrt{3}$$

$$i) x^3 + 27 = 0$$

$$x^3 = -27 \quad | \sqrt[3]{}$$

$$x = -3$$

- j) Die Funktion $g(x) = \sin(x)$ hat Nullstellen bei $x_1 = \pi$ und $x_2 = 2\pi$ bei einer Periode von 2π . Die gegebene Funktion $f(x) = \sin(2x)$ hat durch den Faktor 2 eine veränderte Periodenlänge, nämlich π , die x -Werte der oben erwähnten Nullstellen liegen daher nach der Stauchung bei $x_1 = \frac{\pi}{2}$ und $x_2 = \pi$. Im betrachteten Definitionsbereich $0 \leq x \leq 2\pi$ kommt die Periode allerdings weiter rechts nochmals vor. Daher gibt es zwei weitere Nullstellen: $x_3 = \frac{3}{2}\pi$ und $x_4 = 2\pi$.



- k) Die Funktion $g(x) = \cos(0,5x)$ hat eine Amplitude von 1. Der Summand $+1$ sorgt daher dafür, dass die Nullstellen von $f(x) = \cos(0,5x) + 1$ den Tiefpunkten von $g(x) = \cos(0,5x)$ entsprechen. Diese Tiefpunkte erhält man, wenn man zunächst nach die Tiefpunkte von $h(x) = \cos(x)$ sucht. Und die Tiefpunkte von h liegen bei $x_1 = \pi$, $x_2 = 3\pi$ usw. Dabei muss beachtet werden, dass h eine Periodenlänge von 2π hat. Der Faktor 0,5 sorgt jedoch dafür, dass g eine Periodenlänge von 4π hat (also das Doppelte). Damit ergibt sich insgesamt ein einziger Tiefpunkt für g , nämlich bei $x_1 = 2\pi$. Dies ist dann auch die einzige Nullstelle von f .



Aufgabe 2

- Die Funktion f_1 ist symmetrisch zur y -Achse, da die Exponenten alle gerade sind.
 Die Funktion f_2 ist symmetrisch zum Koordinatenursprung, da die Exponenten alle ungerade sind.
 Die Funktion f_3 hat keine Standardsymmetrie, da es sowohl gerade als auch ungerade Exponenten gibt.
 Die Funktion f_4 ist symmetrisch zur y -Achse, da der einzige (nicht explizit angegebene) Exponent Null ist (was als gerade gilt).
 Die Funktion f_5 ist symmetrisch zur y -Achse. Es handelt sich um den Graphen von Kosinus.
 Die Funktion f_6 ist symmetrisch zum Koordinatenursprung. Es handelt sich um den Graphen von Sinus.
 Die Funktion f_7 ist symmetrisch zur y -Achse. Die Kurve wird nämlich um 90° nach links verschoben. Dadurch entsteht der Graph von Kosinus.

Aufgabe 3

$$\begin{aligned}x=5 \text{ Nullstelle von } f &\Rightarrow f(5)=0 \\5^2 + a - 5 &= 0 \\25 + 5a &= 0 \\5a &= -25 \\a &= -5\end{aligned}$$

Aufgabe 4

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad f(x) &= (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \\ \text{b)} \quad f(x) &= (x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (x-3)\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Die Mitte der wellenförmigen Bewegung liegt bei $y=1$. Daher gilt: $d = 1$.

Die Amplitude beträgt 4, da die Hoch- und Tiefpunkte jeweils 4 LE von der Mitte entfernt sind (nach oben bzw. nach unten). Daher gilt: $a = 4$.

Die Periodenlänge beträgt π (nach jeweils π LE wiederholt sich die Bewegung). Daher gilt:

$$\begin{aligned}\frac{2\pi}{b} &= \pi \\2\pi &= \pi b \\2 &= b\end{aligned}$$

Um am Ende c zu bestimmen, benötigen wir einen Extrem- oder Wendepunkt. Gut ablesbar ist. Eine gut ablesbare Wendestelle mit positiver Steigung liegt bei $x=0$. Und ein solcher Punkt müsste nach der Verschiebung bei $x=-c$ liegen. Daher gilt: $-c = 0$, also $c=0$.

Insgesamt erhalten wir: $f(x) = 4 \cdot \sin(2x) + 1$

Aufgabe 6

Die Mitte der wellenförmigen Bewegung liegt bei $y=2$. Daher gilt: $d = 2$.

Die Amplitude beträgt 2, da die Hoch- und Tiefpunkte jeweils 2 LE von der Mitte entfernt sind (nach oben bzw. nach unten). Daher gilt: $a = 2$.

Die Periodenlänge beträgt 4π (nach jeweils 4π LE wiederholt sich die Bewegung). Daher gilt:

$$\frac{2\pi}{b} = 4\pi$$

$$2\pi = 4\pi b$$

$$0,5 = b$$

Um am Ende c zu bestimmen, benötigen wir einen Extrem- oder Wendepunkt. Gut ablesbar ist. Eine gut ablesbare Wendestelle mit positiver Steigung liegt bei $x = \pi$. Und ein solcher Punkt müsste nach der Verschiebung bei $x = -c$ liegen. Daher gilt: $-c = \pi$, also $c = -\pi$.

Insgesamt erhalten wir: $f(x) = 2 \cdot \sin(0,5(x - \pi)) + 2$

Aufgabe 7

Der Graph von Sinus entspricht dem um 90° (also ein Viertel der Periodenlänge) nach rechts verschobenen Graphen von Kosinus. Eine einfache Verschiebung nach rechts bzw. links um einen bestimmten Betrag genügt, um aus dem einen Graphen den anderen herzustellen.

Der Graph von $f(x) = 2 \cdot \sin(3x) - 1$ hat eine Periodenlänge von $\frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{3}$. Daher ist der

Graph von $f(x) = 2 \cdot \cos(3x) - 1$ im Vergleich dazu um $\frac{1}{6}\pi$ nach links verschoben (nämlich

um ein Viertel der Periodenlänge: $\frac{2\pi}{3 \cdot 4} = \frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$). Ansonsten entsprechen sich die beiden

Graphen: Die Amplitude wird bei beiden um den Faktor 2 vergrößert und beide werden um 1 LE nach unten verschoben. Um aus dem einen Graphen den anderen zu machen, genügt eine Verschiebung um ein Sechstel π .

Endergebnis: $f(x) = 2 \cdot \cos(3(x - \frac{1}{6}\pi)) - 1$

Alternative:

Die Graphen von $f(x) = \sin(3x)$ und $f(x) = \cos(3x)$ ähneln einander. Wenn ich den einen um einen bestimmten Betrag nach rechts bzw. links verschiebe, so erhalte ich den anderen.

Um diesen Betrag zu bestimmen, kann man überlegen:

Für welches e gilt $\sin(t) = \cos(t + e)$? Da der Graph von Sinus dem um 90° (oder der Hälfte von π) nach rechts verschobenen Graphen von Kosinus entspricht, gilt: $e = -\frac{1}{2}\pi$. Daher

gilt: $f(x) = \sin(3x) = \cos(3x - \frac{\pi}{2})$. Anschließend klammern wir die 3 aus, um zu unserer

Form der Funktionsgleichung zu gelangen: $f(x) = \cos(3x - \frac{\pi}{2}) = \cos(3(x - \frac{\pi}{6}))$. Zuletzt

muss man bedenken, dass der Faktor 2 und der Term -1 die beiden Graphen in gleicher Weise beeinflussen. Die Verschiebung um ein Sechstel π reicht also aus.

Endergebnis: $f(x) = 2 \cdot \cos(3(x - \frac{1}{6}\pi)) - 1$

Aufgabe 8

$g(x) = x^3$ wäre symmetrisch zum Koordinatenursprung (weil es nur ungerade Exponenten hat)
 $f(x) = x^3 + 4$ ist im Vergleich zu g nur um 4 LE nach oben verschoben
 $\Rightarrow P(0/4)$

Aufgabe 9

$$\cos^2(x) + 2\cos(x) = 0$$

$$\cos(x) \cdot (\cos(x) + 2) = 0$$

$$\cos(x) = 0 \quad \text{oder} \quad \cos(x) = -2 \text{ (nicht lösbar)}$$

$$x_1 = \pi$$

$$x_2 = 3\pi$$

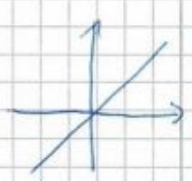
Dabei ist zu beachten, dass der Term $\cos(x)$ den Wert -2 nicht annehmen kann.

Aufgabe 10

(1) Die erste Aussage ist wahr, da f' im betrachteten Bereich immer echt größer als Null ist
 $f'(x) > 0$ für $-3 < x < 3$

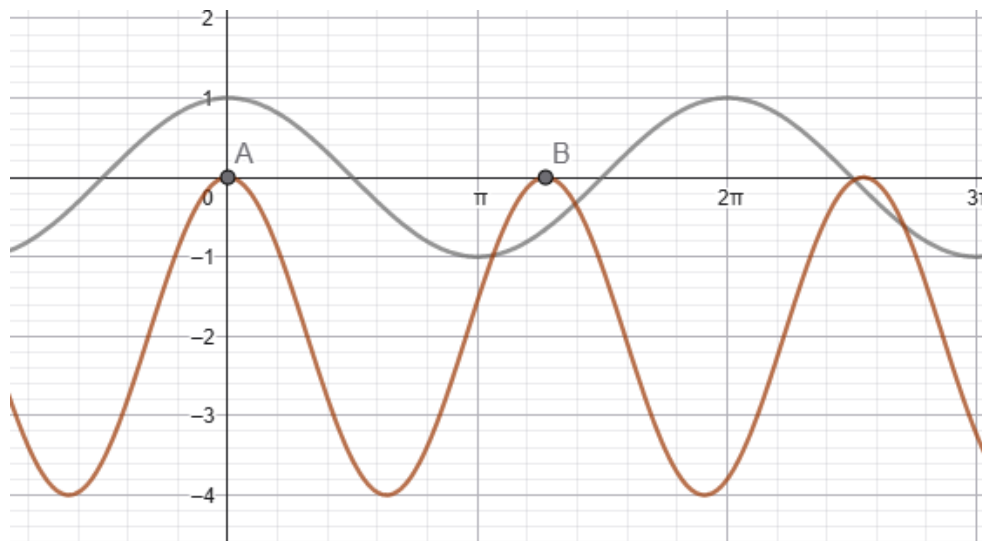
- (2) Die zweite Aussage ist wahr.
Extremstellen von f' entsprechen
Wendestellen von f . Der Graph hat
in der Tat eine Extremstelle bei $x=0$
- (3) Die Aussage ist falsch. Sie widerspricht
der ersten Aussage.
Der Graph steigt ununterbrochen.
- (4) Diese Aussage kann nicht beurteilt
werden (unentscheidbar), da nicht
bekannt ist, von wo aus f wächst
(in Bezug auf den y -Wert)

Aufgabe 11

- ① Die Aussage ist falsch. f hat
bei $x=-2$ einen Sattelpunkt
($f'(-2)=0$, aber kein Vorzeichenwechsel)
- ② Extrempunkte von f' sind Wendepunkte
von f .
 f' hat EP bei $x=-2$ und $x=1$
 $\Rightarrow$ Aussage wahr
- ③ Die Aussage ist wahr.
Die Winkelhalbierende
hat eine Steigung von 1.
($g(x)=x$)
 f hat in $x=0$ die Steigung 4
- 
- ④ Die Aussage ist falsch.
 f' ist überall positiv für $0 \leq x \leq 5$
 $\Rightarrow f$ wächst
 $\Rightarrow f(5) > f(0)$

Aufgabe 12

- a) Der Graph von f wird um den Faktor 2 in y -Richtung gestreckt (von der x -Achse aus auseinandergezogen). Außerdem wird er um den Faktor $\pi/2$ in x -Richtung gestaucht (in Richtung der y -Achse zusammengedrückt). Als letztes wird er um 2 nach unten verschoben.
- b) Der Graph von g hat eine Amplitude von 2 und er wird um 2 nach unten verschoben. Dadurch werden die Hochpunkte zu den neuen Nullstellen. Außerdem beträgt seine Amplitude $\frac{2\pi}{0,5\pi} = 4$. Er wird nicht nach links oder rechts verschoben. Hochpunkte müsste der neue Graph bei $x = 0$ und allen Vielfachen der Amplitude haben, also: $x_1 = 0$ und $x_2 = 4$.



Aufgabe 13

Zuerst bestimmen wir den Wendepunkt:

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 - x - 3$$

$$f'(x) = -3x^2 + 6x - 1$$

$$f''(x) = -6x + 6$$

$$f'''(x) = -6$$

$$N.B.: f''(x) = 0$$

$$-6x + 6 = 0$$

$$6 = 6x$$

$$1 = x$$

$$H.B.: f''(x) = 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0$$

$$f'''(1) = -6 \neq 0$$

$$f(1) = -1 + 3 - 1 - 3 = -2 \Rightarrow W(1/-2)$$

Hinweis: Da die Aufgabenstellung vorgibt, dass es einen Wendepunkt gibt, kann man die Hinreichende Bedingung bei dieser Aufgabe auch weglassen.

Als nächstes bestimmen wird die Gleichung der Wendetangente:

$$f'(1) = -3 + 6 - 1 = 2 \Rightarrow t(x) = 2x + b$$

$$W(1|-2) \text{ auf } t \Rightarrow t(1) = -2 \Rightarrow 2 + b = -2 \Rightarrow b = -4$$

Damit erhalten wir: $t(x) = 2x - 4$

Aufgabe 14

Es gilt: $g(x) = a \cdot f(x) + bx = a \cdot 3 \cdot \cos(x) + bx = 3a \cos(x) + bx$

Wir wissen, dass $(0|-3)$ auf dem Graphen liegt. Daher gilt:

$$\begin{aligned} g(0) &= -3 \\ 3a \cdot \cos 0 + b \cdot 0 &= -3 \\ 3a &= -3 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

Also erhalten wir: $g(x) = -3 \cos(x) + bx$

Zuletzt wissen wir, dass $(\frac{\pi}{2} | \frac{3}{4}\pi)$ auf dem Graphen liegt. Daher gilt:

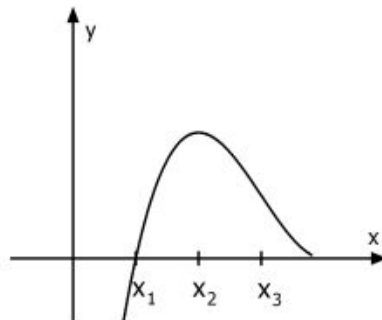
$$\begin{aligned} g\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \frac{3}{4}\pi \\ -3 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + b \cdot \frac{\pi}{2} &= \frac{3}{4}\pi \\ -3 \cdot 0 + \frac{\pi}{2}b &= \frac{3}{4}\pi \\ \frac{1}{2}b &= \frac{3}{4} \\ b &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Antwort: $a = -1$ und $b = 1,5$.

Aufgabe 15

a) Die Ableitung hat eine Extremstelle bei x_3 . Damit das möglich ist, muss ihr Grad mindestens 2 sein. Dann muss aber f selbst vom Grad her mindestens 3 sein.

b)



Aufgabe 16

a) $f(x) = 2x - 5$

$$y = 2x - 5$$

$$x = 2y - 5$$

$$x + 5 = 2y$$

$$0,5x + 2,5 = y$$

$$g(x) = 0,5x + 2,5$$

b)

$$f(x) = 0,5 \cdot (x - 2)^3 + 1$$

$$y = 0,5 \cdot (x - 2)^3 + 1$$

$$x = 0,5 \cdot (y - 2)^3 + 1$$

$$x - 1 = 0,5 \cdot (y - 2)^3$$

$$2x - 2 = (y - 2)^3$$

$$\sqrt[3]{2x - 2} = y - 2$$

$$\sqrt[3]{2x - 2} + 2 = y$$

$$g(x) = \sqrt[3]{2x - 2} + 2$$

Aufgabe 17

a)

$$f(x) = x^3 + x + 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$f''(x) = 6x$$

$$f'''(x) = 6$$

$$\begin{aligned} N.B.: f''(x) &= 0 \\ 6x &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H.B.: f''(x) &= 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \\ f'''(0) &= 6 \neq 0 \end{aligned}$$

$$f(0) = 0 + 0 + 1 = 1 \Rightarrow W(0/1)$$

Hinweis: Da in der Aufgabenstellung steht, dass es genau einen Wendepunkt gibt, ist die Durchführung der hinreichenden Bedingung bei dieser Aufgabe nicht nötig.

b) Wir bestimmen die Ableitungen:

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^3 + bx + 1 \\ f'(x) &= 3ax^2 + b \\ f''(x) &= 6ax \\ f'''(x) &= 6a \end{aligned}$$

Nun bestimmen wir den Wendepunkt:

$$\begin{aligned} N.B.: f''(x) &= 0 \\ 6ax &= 0 \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H.B.: f''(x) &= 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \\ f'''(0) &= 6a \neq 0 \end{aligned}$$

$$f(0) = 0a + 0b + 1 = 1 \Rightarrow W(0/1)$$

Bei den Rechnungen verschwinden a und b jeweils. Da a ungleich 0 ist, darf man im Term 6ax durch 6a teilen.

Aufgabe 18

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 11 \\ f''(x) &= 6x - 12 \\ f'''(x) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N.B.: f''(x) &= 0 \\ 6x - 12 &= 0 \\ 6x &= 12 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H.B.: f''(x) &= 0 \text{ und } f'''(x) \neq 0 \\ f'''(2) &= 6 \neq 0 \end{aligned}$$

$$f(2) = 8 - 6 \cdot 4 + 11 \cdot 2 - 6 = 8 - 24 + 22 - 6 = 0 \Rightarrow W(2/0)$$

$$W(2/0) \text{ auf } g \Rightarrow g(2) = 0$$

$$y = x - 2$$

$$0 = 2 - 2 \text{ wahr}$$

b) Wir verschieben den Graphen um 1 nach rechts und 2 nach oben.

$$\text{Damit ergibt sich: } h(x) = (x-1)^3 - 6(x-1)^2 + 11(x-1) - 6 + 2$$

Aufgabe 19

Für den Parameter b von f gilt: $b = 1$.	☒
Der Parameter b ist bei g doppelt so groß wie bei f .	☒

Aufgabe 20

Lösungserwartung: Winkelfunktionen* - 1_673, FA6.5, Offenes Antwortformat

$$k = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 21

a) $f(x) = 2x - 5$

Definitionsmenge: $\mathbb{R}$

Wertemenge: $\mathbb{R}$

b) $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$

Definitionsmenge: $\mathbb{R}$

Wertemenge: $y \geq 1$

c) $f(x) = 2 \cdot \sin(5x) + 1$

Definitionsmenge: $\mathbb{R}$

Wertemenge: $-1 \leq x \leq 3$

d) $f(x) = \frac{4}{x}$

Definitonsmenge: $x \neq 0$

Wertemenge: $y \neq 0$

$$\text{e) } f(x) = \frac{4}{(x-1)^2}$$

Definitionsmenge: $x \neq 0$

Wertemenge: $y > 0$

$$\text{f) } f(x) = \sqrt{x-2}$$

Definitionsmenge: $x \geq 2$

Wertemenge: $y \geq 0$