

Aufgabe 1

- a) A: „Genau 66 der verkauften Patronen sind mit schwarzer Tinte gefüllt.“
B: „Die Anzahl der verkauften Patronen mit schwarzer Tinte weicht um mehr als 10% vom Erwartungswert dieser Anzahl ab.“

X = Anzahl der verkauften Patronen mit schwarzer Tinte.
 X ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0,65$.

$$P(A) = P(X = 66) \approx 0,082$$

Erwartungswert der Anzahl: $E(X) = n \cdot p = 100 \cdot 0,65 = 65$
10% vom Erwartungswert sind 6,5.

$$P(B) = P(X < 65 - 6,5) + P(X > 65 + 6,5) = P(X \leq 58) + P(X \geq 72) \\ P(X \leq 58) + 1 - P(X \leq 71) \approx 0,0877 + 1 - 0,9152 = 0,1725$$

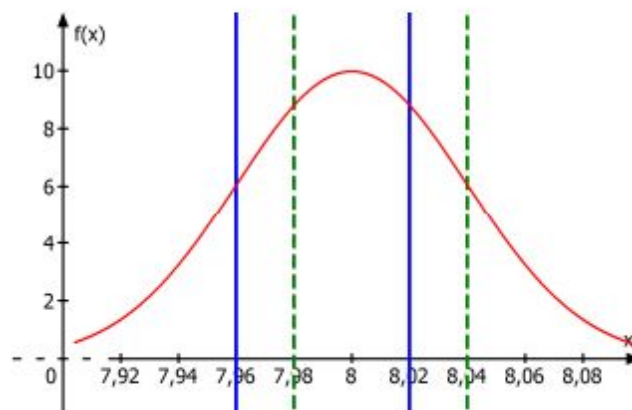
- b) Geben Sie die Abbildung an, die den Graphen der zugehörigen Dichtefunktion nicht zeigt, und begründen Sie Ihre Angabe.

Wegen $\mu = 8$ und $\sigma = 0,04$ sind die Wendestelle der Dichtefunktion bei $x_1 = \mu - \sigma = 8 - 0,04 = 7,96$ und $x_2 = \mu + \sigma = 8 + 0,04 = 8,04$.
Daher zeigt die Abbildung (II) nicht die Dichtefunktion.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Patrone weniger als 7,95 ml Tinte enthält.

Y = Füllmenge der ausgewählten Patrone in ml
 Y ist normalverteilt mit $\mu = 8$ und $\sigma = 0,04$
 $P(Y < 7,95) \approx 0,106$

Betrachtet wird das Ereignis, dass eine zufällig ausgewählte Patrone zwischen 7,98 ml und 8,04 ml Tinte enthält. Geben Sie ein anderes Ereignis im Sachzusammenhang an, welches exakt dieselbe Wahrscheinlichkeit hat.



Da das Schaubild der Dichtefunktion symmetrisch zur senkrechten Geraden $x = 8$ ist, ist der Flächeninhalt im Intervall $[7,98 ; 8,04]$ gleich groß wie der Flächeninhalt im Intervall $[7,96 ; 8,02]$.

Ereignis: Eine zufällig ausgewählte Patrone enthält zwischen 7,96 ml und 8,02 ml Tinte.

Bestimmen Sie das kleinste Intervall $[a;b]$, so dass die Füllmenge einer zufällig ausgewählten Patrone mit einer Wahrscheinlichkeit von 92% in $[a;b]$ liegt.

Da das Intervall $[a;b]$ möglichst klein sein soll, muss es symmetrisch um den Erwartungswert μ liegen, da die Fläche um den Erwartungswert zwischen der Dichtefunktion und der x-Achse am größten ist.

Bedingung: $P(8 - z \leq X \leq 8 + z) = 0,92$

Für $z = 0,07$ gilt $P(7,93 \leq X \leq 8,07) \approx 0,92$.

Somit ist $a \approx 7,93$ und $b \approx 8,07$.

c)

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 85% wird eine Ware innerhalb von t Stunden nach Eingang der Bestellung versandt. Bestimmen Sie den Wert von t .

Bedingung: $\int_0^t (0,25 \cdot e^{-0,25x}) dx = 0,85$

$$\int_0^t (0,25 \cdot e^{-0,25x}) dx = \left[-e^{-0,25x} \right]_0^t = -e^{-0,25t} + 1$$

$$-e^{-0,25t} + 1 = 0,85$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{-0,25} \ln(0,15) \approx 7,59$$

Aufgabe 2

- a) *Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass weniger als 250g Honig in diesem Glas sind.*

Die Zufallsgröße X ist normalverteilt mit $\mu = 252$ und $\sigma = 2$.

$$P(X < 250) \approx 0,159 \quad (\text{WTR})$$

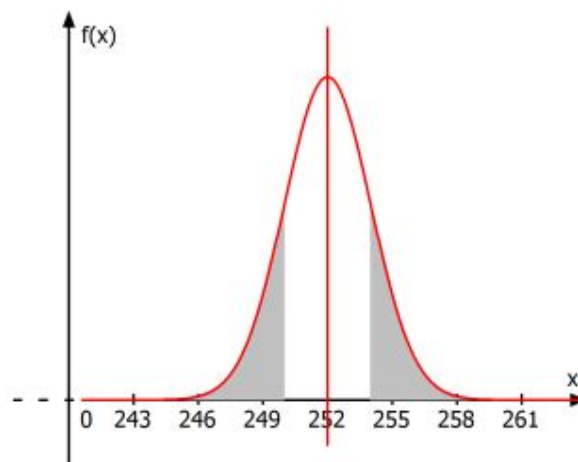
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Füllmenge dieses Glases um höchstens 2% von 250g abweicht.

$$P(0,98 \cdot 250 \leq X \leq 1,02 \cdot 250) = P(245 \leq X \leq 255) \approx 0,933$$

- b) *Begründen Sie, dass es solch einen Wert von a gibt und geben Sie diesen Wert an.*

Die Dichtefunktion der Normalverteilung (die Glockenkurve) ist symmetrisch zur Geraden mit der Gleichung $x = 252$.

Der Inhalt der linken grauen Fläche entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(245 \leq X \leq 250)$.



Aufgrund der Symmetrie hat die rechte graue Fläche denselben Inhalt. Somit gilt $P(245 \leq X \leq 250) = P(254 \leq X \leq 259)$.

Es gibt also einen solchen Wert von a , dieser ist $a = 254$.

- c) Ermitteln Sie, auf welchen Wert der Erwartungswert der Füllmenge mindestens eingestellt werden muss.

Die Zufallsgröße Y gibt die Füllmenge der neuen Anlage in g an.

Y ist normalverteilt mit $\sigma = 1$ und unbekanntem Parameter μ .

Gesucht ist der kleinste Wert von μ mit $P(X < 250) \leq 0,15$.

WTR: (ausprobieren)

Für $\mu = 251,0$ gilt $P(X < 250) \approx 0,159$

Für $\mu = 251,1$ gilt $P(X < 250) \approx 0,136$

Der Erwartungswert der Füllmenge muss mindestens 251,1g betragen.

- d) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Gläser an, welche einen Gutschein enthalten.

X ist binomialverteilt mit $n = 6$ und $p = 0,2$.

Ereignis A:

$P(A) = P(X = 3) \approx 0,082$ (WTR)

Ereignis B:

$P(B) = 0,2^2 = 0,04$

Begründung: Es gibt nur für die ersten beiden Gläser eine Vorgabe, dass diese einen Gutschein enthalten sollen.

Ereignis C:

Es gilt $P(X = 2) \approx 0,246$

.....

Die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Gläser mit Gutschein unmittelbar nebeneinander stehen, beträgt $0,2^2 \cdot 0,8^4 \cdot 5$.

Der Faktor 5 entsteht dadurch, dass es 5 verschiedene Anordnungen gibt, bei denen die beiden Gläser mit Gutschein nebeneinander stehen:

Platz 1 und 2

Platz 2 und 3

Platz 3 und 4

Platz 4 und 5

Platz 5 und 6

Nun gilt: $P(C) = P(X = 2) - 0,2^2 \cdot 0,8^4 \cdot 5 \approx 0,164$