

Lösungen (Teil B – Teil 1)

Aufgabe 1

- a) Gegeben sind die Punkte A (4/0/0), B (4/4/0), C(0/4/0)
Wir beschreiben die Seiten des Dreiecks mit Vektoren:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 4-4 \\ 4-0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 4-4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit ist erkennbar:

$$\vec{AB} \odot \vec{BC} = 0 \text{ und } |\vec{AB}| = |\vec{BC}| = 4$$

Wir haben also ein rechtwinkliges und gleichschenkliges Dreieck.

Für die Fläche gilt dann: A = 0,5 mal 4 mal 4 = 8 FE.

- b) Gerade durch A und C: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Gerade h verläuft durch B und F: B (4/4/0) und F (4/4/3)

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aus der ersten Zeile folgt: $4r = 0$, also $r = 0$.

Dann folgt aber für die zweite Zeile: $-4 = -4 \text{ mal } 0 = 0$. Wir erhalten einen Widerspruch. Die Gleichung ist daher nicht lösbar und es gibt keinen Schnittpunkt.

Die Richtungsvektoren der beiden Geraden sind keine Vielfache voneinander. Daher sind die beiden Geraden windschief zueinander.

- c) Die x-y-Ebene hat als Normalenvektor $\vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, dessen Betrag gleich 1 ist. Die Ebenenschar hat als Normalenvektor $\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} t \\ t \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $|\vec{n}_2| = \sqrt{2t^2 + 16}$

Deshalb gilt:

$$\cos 60^\circ = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} t \\ t \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{2t^2 + 16}} = \frac{-4}{\sqrt{2t^2 + 16}}$$

Kosinus von 60° ist gleich 0,5. Und vom Zähler des Bruchs benötigen wir den Betrag.

$$0,5 = \frac{4}{\sqrt{2t^2 + 16}}$$

$$0,5 \cdot \sqrt{2t^2 + 16} = 4$$

$$\sqrt{2t^2 + 16} = 8$$

$$2t^2 + 16 = 64$$

$$2t^2 = 48$$

$$t^2 = 24$$

$$t_1 = \sqrt{24}$$

$$t_2 = -\sqrt{24}$$

- d) Die Schnittfigur hat vier Seiten: Eine verläuft von A nach C, eine weitere verläuft parallel dazu auf der Deckfläche des Quaders. Dazu kommen zwei weitere Seiten, die nicht parallel zueinander sind und von A bzw. C jeweils nach oben zur Deckfläche verlaufen.

Wir verlängern die zwei nicht zueinander parallelen Seiten, bis sie sich schneiden. Dieser Schnittpunkt muss auf der Geraden h liegen (da die Ebenen jeweils durch A und C und einen Punkt auf dieser Geraden verlaufen) und er hat t als z-Koordinate.

Durch die Verlängerung der beiden Seiten wird aus der Schnittfigur ein Dreieck, dessen Eckpunkte A und C sowie der soeben bestimmte Schnittpunkt sind.

- e) Wir betrachten zuerst die Pyramide ABCP (wobei P die z-Koordinate 6 hat). Diese hat als Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Fläche bereits in Aufgabenteil a ausgerechnet wurde. Die Höhe der Pyramide ist dann 6 (von der Grundfläche entlang der Geraden h bis P).

$$V = 1/3 \text{ mal } 8 \text{ mal } 6 = 16 \text{ VE}$$

Der Teilkörper, dessen Volumen auszurechnen ist, ist ein Teil der Pyramide ABCP. Bei ihm fehlt nur ein pyramidenförmiger Teil, der sich oberhalb des Quaders befindet. Einer seiner Eckpunkte ist F.

Wir benötigen zur Bestimmung des Volumens des fehlenden Stücks die Fläche seiner Grundfläche, die sich auf der Deckfläche des Quaders befindet. Ein Eckpunkt ist F. Die beiden anderen Eckpunkte haben denselben z-Wert (nämlich 3). Der zweite Eckpunkt links hat zusätzlich als x-Wert den Wert 4 (wie die Punkte A und B). Der andere hat den y-Wert 4.

Damit ergibt sich mit der Ebene $6x + 6y - 4z = 24$ (wo die beiden Punkte drin liegen):

$$\begin{aligned} 2. \text{ Punkt: } & 6 \text{ mal } 4 + 6y - 4 \text{ mal } 3 = 24 \\ & 24 + 6y - 12 = 24 \\ & 12 + 6y = 24 \\ & 6y = 12 \\ & y = 2 \end{aligned}$$

Punkt: $P_1(4/2/3)$

$$\begin{aligned} 3. \text{ Punkt: } & 6x + 6 \text{ mal } 4 - 4 \text{ mal } 3 = 24 \\ & 6x + 24 - 12 = 24 \\ & 6x + 12 = 24 \\ & 6x = 12 \\ & x = 2 \end{aligned}$$

Punkt: $P_2(2/4/3)$

Dazu kommt F (4/4/3).

Damit haben wir: $|\overrightarrow{P_1F}|=2$ und $|\overrightarrow{P_2F}|=2$. Die beiden Seiten sind senkrecht zueinander.

Wir erhalten für das Volumen des fehlenden Stücks:

$$V = 1/3 \text{ mal } \frac{1}{2} \text{ mal } 2 \text{ mal } 2 \text{ mal } 3 = 2 \text{ VE}$$

$$\text{Endergebnis: } V = 16 - 2 = 14 \text{ VE.}$$

f)

$$t \in [-3; 3] \setminus \{0\}$$

Zwei der Eckpunkte sind stets die Punkte A und C. Für $0 < t \leq 3$ liegt der dritte Eckpunkt auf der Seitenkante $\overline{BF}$ des Quaders, für $-3 \leq t < 0$ auf der gegenüberliegenden Seitenkante.

g)

Bestimmen Sie diejenigen Werte von t , für die B und E_t den Abstand 2 voneinander haben.