

Lösungen (Teil mit Hilfsmitteln-Teil2)

Aufgabe 2

a) Richtungsvektor von g_4 : $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ Richtungsvektor von $g_{0,5}$: $\begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix}$

Es gilt: $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 \\ 1 \\ -1,5 \end{pmatrix} = 2 + 1 - 3 = 0$

Somit sind die Geraden orthogonal.

b) $\sin(\alpha) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 2 \end{pmatrix} \right|}{\sqrt{16+1+4} \cdot \sqrt{9+36+4}} = \frac{10}{\sqrt{21} \cdot 7} \approx 0,312$

$\alpha = \sin^{-1}(0,312) = 18,2^\circ$

c) Punktprobe mit $O(0|0|0)$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{array}{rcl} 1 & +at & = 0 \\ 2 & +t & = 0 \\ 5 & +t(a-2) & = 0 \end{array}$$

Aus Zeile 2 folgt: $t = -2$

Aus der Zeile 1 folgt: $1 - 2a = 0 \Leftrightarrow a = 0,5$

Kontrolle mit Zeile 3: $5 - 2(0,5 - 2) = 0$ ist eine falsche Aussage

Es gibt keine Gerade, die den Ursprung enthält.

d) Wähle zwei beliebige Geraden: $g_0: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gleichung der Ebene F, die die beiden sich schneidenden Geraden enthält:

$$F: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Normalenvektor von F: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$ bzw. $\vec{n}^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ansatz für die Koordinatengleichung F: $x_1 - 2x_2 - x_3 = d$

Einsetzen von P(1|2|5) ergibt $d = -8$.

Koordinatengleichung: F: $x_1 - 2x_2 - x_3 = -8$

e) Die Punkte $P_r(1+r | 2-2r | 5-r)$ liegen auf einer Gerade mit folgender Gleichung:

$$n: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1+r \\ 2-2r \\ 5-r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Der Richtungsvektor der Geraden ist ein Normalenvektor von F.

Damit ist die Gerade orthogonal zur Ebene F.

f) Aus d) folgt: Alle Geraden g_a liegen in der Ebene F und enthalten den Punkt Q(1|2|5).
Die Punkte P_r liegen auf der Gerade n aus e). Auch die Gerade h enthält den Punkt Q(1|2|5).

Somit ist der gesuchte Abstand $|\overline{QP_r}| = \left| \begin{pmatrix} r \\ -2r \\ -r \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r^2 + 4r^2 + r^2} = \sqrt{6r^2} = r \cdot \sqrt{6}$

Die Aussage ist wahr.

g) Einsetzen der Gerade k in die Koordinatengleichung von F:

$$\begin{aligned} (1+s) - 2 \cdot 2 - (5+s) &= -8 \\ \Leftrightarrow 1+s-4-5-s &= -8 \Leftrightarrow -8 = -8 \end{aligned}$$

Da sich eine wahre Aussage ergibt, liegt die Gerade k in der Ebene F.

Die Gerade k ist parallel zur x_1x_3 -Ebene, da die zweite Koordinate im Richtungsvektor 0 ist.

Da bei der Geradenschar g_a die zweite Koordinate im Richtungsvektor nicht null ist, gibt es keine Schargerade, die parallel zur x_1x_3 -Ebene ist.

- h) Alle Geraden g_a liegen in der Ebene F. Somit ist h die Schnittgerade von F mit der x_1x_2 -Ebene.

Die Spurpunkte von F lauten $S_1(-8|0|0)$ und $S_2(0|4|0)$.

Somit lautet die Gleichung von h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die Gerade k aus g) liegt in der Ebene F. Die Gerade k hat mit jeder Gerade g_a aber nur den Punkt $P(1|2|5)$ gemeinsam und liegt nicht in der Schar g_a .

Berechnung des Schnittpunktes von k mit der x_1x_2 -Ebene:

$$x_3 = 5 + s = 0 \Leftrightarrow s = -5$$

Einsetzen von $s = -5$ in k ergibt Punkt $S(-4|2|0)$.

Kontrolle, dass der Punkt S auf h liegt:

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist eine wahre Aussage f\"ur } t = 0,5.$$

Somit ist S der gesuchte Punkt.

Aufgabe 3

a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem.

Da die x_1 -Koordinate des Richtungsvektors von h gleich Null ist und die x_1 -Koordinate des Stützvektors von h ungleich Null ist, verläuft die Gerade h parallel zur $x_2 - x_3$ -Ebene.

Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Schar g_a gehört.

Es muss einen Wert von a geben, so dass der Richtungsvektor von h ein Vielfaches zum Richtungsvektor von g_a ist.

Dies ist für $a = 0$ der Fall, hier stimmen die beiden Richtungsvektoren überein.

Kontrolle ob der Punkt $P(1|-6|0)$ auf der Gerade g_0 liegt:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Zeile: $1 = 1$

2. Zeile: $-6 = 3t \Leftrightarrow t = -2$

3. Zeile: $0 = -2 - t \Leftrightarrow t = -2$

Da das Gleichungssystem die Lösung $t = -2$ besitzt, liegt $P(1|-6|0)$ auf h .
Damit sind die Geraden h und g_0 identisch.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E .

Um zwei Spannvektoren der Ebene E zu ermitteln, wählt man für a zwei verschiedene Werte, z.B. $a = 0$ und $a = 1$.

Spannvektoren der Ebene: $\vec{u}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}^\wedge$

Normalenvektor von E : $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ansatz Koordinatengleichung: E: $x_2 + 3x_3 = d$

Einsetzen des Punkts Q(1|0|-2) in E: $-6 = d$

Koordinatengleichung: E: $x_2 + 3x_3 = -6$

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a , für den g_a die x_2 -Achse schneidet.

$$\text{Gleichung der } x_2\text{-Achse: } k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Gleichsetzen der Geradengleichungen von k und g_a :

$$\begin{pmatrix} 0 \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$1.\text{Zeile: } 0 = 1 + a \cdot t$$

$$2.\text{Zeile: } s = 3t$$

$$3.\text{Zeile: } 0 = -2 - t$$

$$\text{Aus der 3. Zeile: } t = -2$$

$$\text{Aus der 2. Zeile folgt dann } s = -6$$

$$\text{Aus der 1. Zeile folgt dann } a = 0,5.$$

Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a .

$$\cos(45^\circ) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{10}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 10}} \quad | \cdot 2 \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 10}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} \cdot \sqrt{a^2 + 10} = 20 \quad | \text{quadrieren}$$

$$\Rightarrow 20 \cdot (a^2 + 10) = 400$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 10 = 20$$

$$\Leftrightarrow a^2 = 10$$

$$\Rightarrow a = \pm\sqrt{10}$$

- c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Gerade, die von allen Geraden der Schar g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen Geraden der Schar g_a windschief verläuft.

Alle Geraden der Schar befinden sich in der Ebene E: $x_2 + 3x_3 = -6$.

Da die gesuchte Gerade von allen Geraden den Abstand $\sqrt{40}$ hat muss die Gerade in einer Ebene F liegen, die parallel zu E ist und von E den Abstand $\sqrt{40}$ hat.

Ansatz für die Koordinatengleichung von F: $x_2 + 3x_3 = d$

$$\text{HNF von F: } \frac{x_2 + 3x_3 - d}{\sqrt{10}} = 0$$

Für den Punkt Q(1|0|-2) soll gelten: $d(Q,F) = \sqrt{40}$

$$d(Q,F) = \left| \frac{-6 - d}{\sqrt{10}} \right| = \sqrt{40}$$

Daraus folgt $|-6 - d| = 20$

Eine mögliche Lösung ist $d = 14$.

Die gesuchte Gerade liegt in der Ebene F: $x_2 + 3x_3 = 14$

Für den Richtungsvektor $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ der gesuchten Geraden gilt:

- 1.) Richtungsvektor ist orthogonal zum Normalenvektor von F:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow y + 3z = 0 \Leftrightarrow y = -3z$$

- 2.) Richtungsvektor ist kein vielfacher Vektor von $\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ für alle Werte von a:

$$\begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \neq k \cdot \begin{pmatrix} x \\ -3z \\ z \end{pmatrix}$$

Diese Ungleichung wird nur für $z = 0$ erfüllt.

Der Wert von x kann beliebig sein, allerdings nicht $x = 0$.

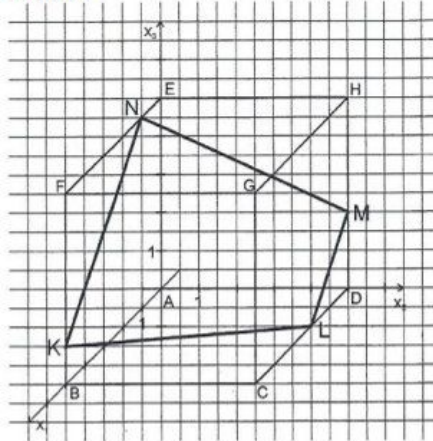
Möglicher Richtungsvektor der gesuchten Geraden: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Ein Punkt auf der Ebene F lautet z.B. $T(0|14|0)$, den man als Punkt der gesuchten Geraden wählen kann.

Eine mögliche Gleichung der gesuchten Geraden ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Aufgabe 4

a) Zeichnung des Vierecks KLMN:



Nachweis, dass das Viereck ein Trapez ist:

$$\text{Es gilt } \overrightarrow{KN} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{LM} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Vektoren sind vielfache zu einander, daher sind sie parallel und es liegt ein Trapez vor.

Nachweis, dass zwei Seiten gleich lang sind:

$$|\overrightarrow{KL}| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35} \quad |\overrightarrow{MN}| = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{1 + 25 + 9} = \sqrt{35}$$

Gleichung der Ebene T in Parameterform:

$$T: \vec{x} = \overrightarrow{OK} + r \cdot \overrightarrow{KN} + s \cdot \overrightarrow{KL} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Koordinatengleichung von T:

$$\text{Normalenvektor von T: } \vec{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 \\ -16 \\ -20 \end{pmatrix} \text{ bzw. vereinfacht } \vec{n}^* = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Ansatz für Koordinatengleichung: T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = d$

Einsetzen des Punktes K(5|0|1): $25 + 5 = 30 \Rightarrow d = 30$

Koordinatengleichung von T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$

Schnittpunkt von T mit der x_1 -Achse: S(x_1 | 0 | 0) ergibt S(6 | 0 | 0)

b) Koordinaten von F: F(5|0|5)

Die Strecke $\overline{FG}$ liegt auf der Geraden g: $\vec{x} = \overline{OF} + t \cdot \overline{FG} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

Der Punkt F wird erreicht für $t = 0$ und der Punkt G wird erreicht für $t = 1$.

Ein allgemeiner Punkt auf der Strecke $\overline{FG}$ hat die Koordinaten S(5|5t|5) mit $0 \leq t \leq 1$.

HNF von T: $\frac{5x_1 + 4x_2 + 5x_3 - 30}{\sqrt{66}} = 0$

Abstand des Punktes S von der Ebene T:

$$d(S, T) = \left| \frac{5 \cdot 5 + 4 \cdot 5t + 5 \cdot 5 - 30}{\sqrt{66}} \right| = \left| \frac{20 + 20t}{\sqrt{66}} \right| = \frac{18}{\sqrt{66}}$$

Für die Betragsgleichung gibt es zwei Fälle:

Fall 1: $20 + 20t = 18 \Rightarrow t = -0,1$ liegt nicht im Intervall $0 \leq t \leq 1$

Fall 2: $20 + 20t = -18 \Rightarrow t = -1,9$ liegt nicht im Intervall $0 \leq t \leq 1$

Somit kann die Höhe der Pyramide nicht $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen.

c) Schnittpunkt der Geradenschar mit der Ebene:

$$3,5 + r \cdot \frac{2}{a} = 3,5 \Rightarrow r \cdot \frac{2}{a} = 0$$

Wenn die Gerade in Ebene liegen soll, muss eine wahre Aussage entstehen und die Variable r herausfallen.

Das wäre jedoch nur so, wenn $\frac{2}{a} = 0$ ist. Diese Gleichung ist jedoch nicht lösbar.

Somit kann keine der Schargeraden in der Ebene liegen.

Eine Gerade der Schar ist eine Schnittgerade unter folgenden Bedingungen:

1.) Der Punkt P(2,5|0|3,5) der Schar auf den Ebenen T und U liegen.

Punktprobe mit T: $5 \cdot 2,5 + 0 + 5 \cdot 3,5 = 30$ ist eine wahre Aussage

Punktprobe mit U: $-5 \cdot 2,5 + 0 + 5 \cdot 3,5 = 5$ ist eine wahre Aussage

- 2.) Der Richtungsvektor der Schar muss sowohl senkrecht zum Normalenvektor von T als auch zum Normalenvektor von U sein.

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -40a + \frac{10}{a} = 0 \Rightarrow -40a^2 + 10 = 0 \Rightarrow a = \pm 0,5$$

Da $a > 0$ sein soll, kommt nur $a = 0,5$ in Frage.

Prüfung, ob für $a = 0,5$ der Richtungsvektor der Schargeraden auch auf dem Normalenvektor von U senkrecht ist:

$$\text{Es gilt } \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 - 20 + 20 = 0.$$

Damit ist die Bedingung für $a = 0,5$ erfüllt.

Also gehört die Schnittgerade von T und U zur Schar.