Lösungen (Teil ohne Hilfsmittel)

<u>Aufgabe 1</u>

1 a) $\binom{6}{3} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{120}{6} = 20$

b) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

c) $\binom{6}{0} = 1$

Erinnerung: $\binom{n}{0} = 1$ für alle n

d) $\frac{5!}{3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot \cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 1}} = 20$

e) $\binom{3}{2} \cdot \binom{4}{1} = \frac{\cancel{3!}}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{4!}{1! \cdot \cancel{3!}} = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \cdot 3 \cdot \cancel{2 \cdot 1}}{\cancel{2 \cdot 1}} = 12$

f) $\binom{k}{0} = 1$

g) $\binom{t}{1} = \frac{t!}{1! \cdot (t-1)!} = \frac{t \cdot \cancel{(t-1) \cdot (t-2) \cdot \ldots \cdot 1}}{1 \cdot \cancel{(t-1) \cdot (t-2) \cdot \ldots \cdot 1}} = t$

h) $\binom{t}{2} = \frac{t!}{2! \cdot (t-2)!} = \frac{t \cdot (t-1) \cdot \cancel{(t-2) \cdot (t-3) \cdot \ldots \cdot 1}}{2 \cdot 1 \cdot \cancel{(t-2) \cdot (t-3) \cdot \ldots \cdot 1}}$

$= \frac{t \cdot (t-1)}{2} = \frac{1}{2}(t^2 - t)$

Aufgabe 2

Es gilt: Die Einträge sind jeweils die Summe der beiden Einträge rechts und links darüber.

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

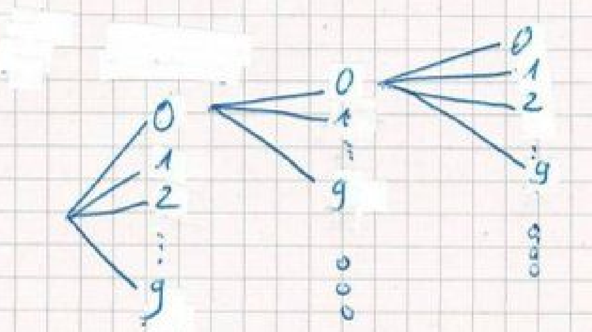
1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

Aufgabe 3

a) Es gibt insgesamt 10 Möglichkeiten pro Ring.

Anzahl $= 10^3 = 1000$



Ring 1 Ring 2 Ring 3

Mit jedem Ring verzehnfacht sich die Zahl der Möglichkeiten.

b) Es gibt 5 ungrade Ziffern: 1, 3, 5, 7, 9.
Für den mittleren Ring gibt es nur noch 5 Möglichkeiten; für die beiden anderen weiter 10.

$$\text{Anzahl} = 10 \cdot 5 \cdot 10 = 10^2 \cdot 5 = 500$$

c) $\text{Anzahl} = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$

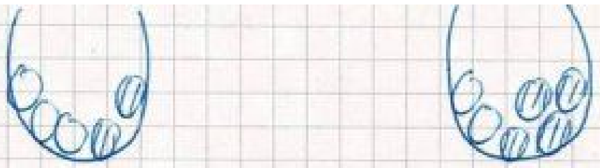
Für den ersten Ring gibt es 10 Möglichkeiten, für den zweiten nur noch 9 (die Ziffer vom ersten Ring darf nicht mehr vorkommen), für den dritten 8 (die Ziffern von Ring 1 und Ring 2 dürfen nicht mehr vorkommen).

Aufgabe 4

Systematisches Probieren führt auf 11 Möglichkeiten:

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO	
					X	X	1
				X	X		2
			X		X		3
		X			X		4
	X				X		5
X					X		6
				X		X	7
			X			X	8
		X				X	9
	X					X	10
X						X	11

<u>Aufgabe 5</u>



URNE 1 URNE 2

a) $\xrightarrow{2/5}$ weiß (U1) $\xrightarrow{4/6}$ weiß (U2)

$$P(\text{2 weiße Kugeln}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{8}{30} = \frac{4}{15}$$

b)

$\xrightarrow{3/5}$ weiß $\xrightarrow{4/6}$ blau

$\xrightarrow{2/5}$ blau $\xrightarrow{2/6}$ weiß

U1 U2

$$P(\text{genau eine weiß}) = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{6}$$
$$= \frac{12}{30} + \frac{4}{30}$$
$$= \frac{16}{30}$$
$$= \frac{8}{15}$$

c) Wir arbeiten mit dem Gegenereignis:

$$P(\text{mind. 1 blau}) = 1 - P(\text{keine blau})$$
$$= 1 - P(\text{alle weiß})$$
$$= 1 - \frac{4}{15}$$
$$= \frac{11}{15}$$

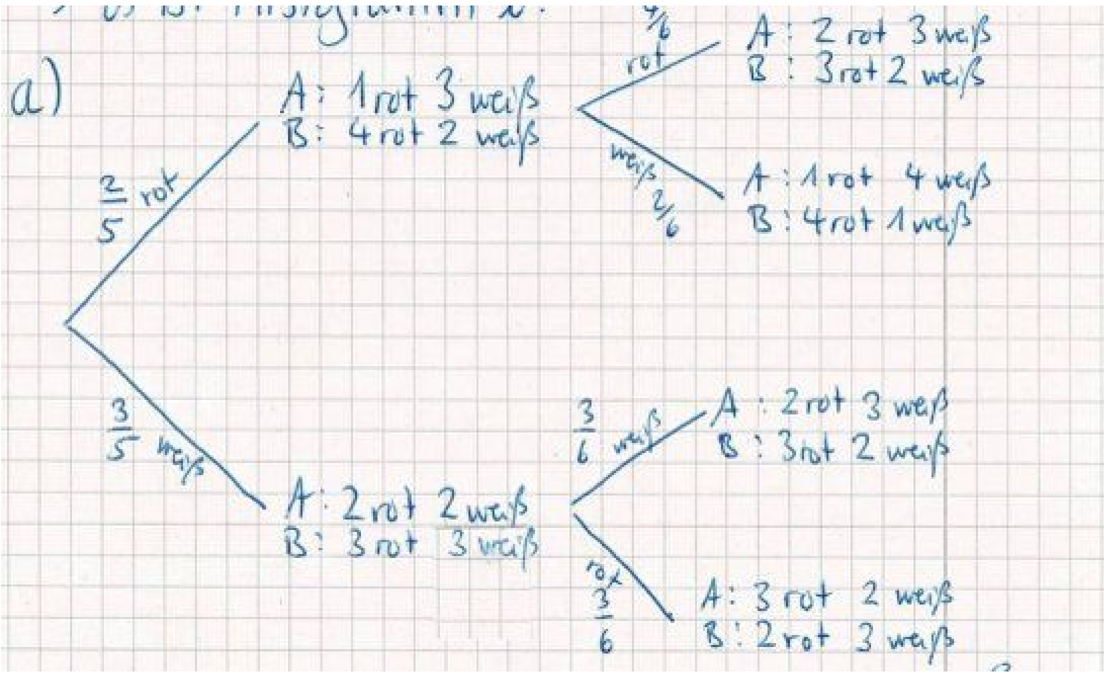
Aufgabe 6

a) Es gibt jeweils 6 Ergebnisse bei einem Wurf.
Und es wird 3-mal geworfen:
Anzahl = $6^3 = 216$

b) Es gibt drei gerade Zahlen: 2, 4 und 6. Daher gibt es drei Möglichkeiten beim einmaligen Werfen. Beim zweiten und beim dritten Wurf gibt es auch jeweils drei Möglichkeiten. Damit ergibt sich eine Anzahl von $3^3 = 27$ Ergebnissen insgesamt. Damit erhalten wir eine Wahrscheinlichkeit von 27 / 216. Oder in gekürzter Form: 1 / 8.

c) Es gibt drei Möglichkeiten, wo die eine gerade Zahl auftaucht: am Anfang, in der Mitte und am Ende. Jede dieser drei Möglichkeiten hat wieder 27 Ereignisse (zum Beispiel am Anfang: 3 gerade Zahlen, dann 3 ungerade Zahlen und schließlich 3 ungerade Zahlen – also 3 mal 3 mal 3 Ergebnisse). Damit ergibt sich 3 mal 27 / 216 als Wahrscheinlichkeit. Das ergibt 3 / 8.

Aufgabe 7



Möglichkeiten: 2 rot 3 weiß
1 rot 4 weiß
3 rot 2 weiß

b) $P(2\text{ rot }3\text{ weiß}) = \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{6}$

$= \frac{8}{30} + \frac{9}{30}$

$= \frac{17}{30}$

Gegenereignis: $P(\text{Geg.}) = 1 - \frac{17}{30} = \frac{13}{30}$

Antwort: Ereignis E hat eine höhere Wahrscheinlichkeit.

Aufgabe 8

a) $p + 2p + P(\text{gelb}) = 1$

$3p + P(\text{gelb}) = 1$

$P(\text{gelb}) = 1 - 3p$

P(gelb) muss größer als 0 und kleiner als 1 sein

$\Rightarrow 0 \leq p \leq \frac{1}{3}$

b) Wir erhalten „Rot“ mit der Wahrscheinlichkeit P(rot) = 2p. Damit ergibt sich P (nicht rot) = 1- 2p. Wir drehen das Glücksrad 2-mal, die Wahrscheinlichkeit für 2mal „nicht Rot“ ist dann $(1-2p)^2$.

Anschließend arbeiten wir mit dem Gegenereignis: Das Gegenereignis zu mind. ein Mal rot ist kein Mal rot.

P (mind. ein Mal Rot) = 1 – P (kein Mal Rot)
= $1 - (1- 2p)^2$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - (1-2p)^2 \\
&= 1 - (1 - 4p + 4p^2) \\
&= 1 - 1 + 4p - 4p^2 \\
&= 4p - 4p^2 \checkmark
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9

Wenn eine Zahl eine Null am Ende hat, so ist sie durch 2 und 5 teilbar. 2 und 5 sind in ihrer Primfaktorzerlegung enthalten.

Wenn eine Zahl zwei Nullen am Ende hat, so ist sie 2-mal jeweils durch 2 und 5 teilbar. 2 und 5 sind 2-mal in der Primfaktorzerlegung.

allgemein:
Wenn eine Zahl n Nullen hat am Ende, so ist sie n-mal durch jeweils 2 und 5 teilbar und sie hat in ihrer Primfaktorzerlegung n-mal 2 und 5.

Die Definition der Fakultät ähnelt der Primfaktorzerlegung:

$$20! = 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Die Zahl 20! hat bedingt durch die Faktoren 5, 10, 15, 20 jeweils eine 5 in die Primfaktorzerlegung. Da die anderen Faktoren durch 5 nicht teilbar sind, sind es insgesamt vier 5en.
Zu jeder der 5en kann eine 2 gefunden werden (z.B. 2, 4, 6, 8, 12).
$\Rightarrow$ Die Primfaktorzerlegung hat vier 5en und mind. vier 2en
$\Rightarrow$ vier Nullen

Aufgabe 10

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 2 & 9 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot \mathrm{I} - \mathrm{II} \\ 3\cdot \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 5 & 1 & 15 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5\cdot \mathrm{II} + \mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 16 & 80 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 16z = 80$$
$$z = 5$$

$$\Rightarrow -y + 15 = 13$$
$$-y = -2$$
$$y = 2$$

$$\Rightarrow x + 2 + 5 = 8$$
$$x = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -4 & 9 \\ 1 & 1 & -2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2\cdot\underline{\mathrm{I}}-\underline{\mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{I}}-\underline{\mathrm{III}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 10 & -15 \\ 0 & -3 & 5 & -8 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5\cdot\underline{\mathrm{III}}-3\cdot\underline{\mathrm{II}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 10 & -15 \\ 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -5z = 5$$
$$z = -1$$

$$\Rightarrow -5y - 10 = -15$$
$$-5y = -5$$
$$y = 1$$
$$\Rightarrow x - 2 - 3 = -3$$
$$x = 2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) $$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3\cdot\underline{\mathrm{I}}+\underline{\mathrm{II}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 14 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow 7y = 14$$
$$y = 2$$
$$\Rightarrow x + 4 = 5$$
$$x = 1$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 11

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ -2 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \mathrm{I}+\underline{\mathrm{II}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \mathrm{II}-5\cdot\underline{\mathrm{III}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{array}\right)$

$\Rightarrow 0 = -5$ ↯

Das System hat keine Lösung.

b) $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ -2 & 2 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \mathrm{I}+\underline{\mathrm{II}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & a \end{array}\right) \mathrm{II}-5\cdot\underline{\mathrm{III}}$

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & 5 & 13 \\ 0 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 5-5a \end{array}\right)$

Es müsste gelten: $5-5a=0$

$\Rightarrow \underline{a=1}$

Aufgabe 12

a) Wir setzen den Punkt P_b in die Ebenengleichung ein:

$1 + 2 \cdot (-2) - 2 \cdot b = 2$
$1 - 4 - 2b = 2$
$-3 - 2b = 2$
$-2b = 5$
$b = -2{,}5$

b) Für a = 0 erhalten wir als Ebene G: 3x + 4y = 1

Wir erhalten als Normalenvektor $\vec{n}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$ und für seinen Betrag $|\vec{n}|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$. Mit x = 0 erhalten wir 4y = 1, also y = 0,25. Ein Aufpunkt ist also A (0/0,25/0).

Damit bilden wir die Hessesche Normalenform:

$$\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\odot\left(\begin{pmatrix}1\\-2\\b\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\0{,}25\\0\end{pmatrix}\right)=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}1\\-2{,}25\\b\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot(3-9)=\frac{-6}{5}=-1{,}2$$

Der Abstand beträgt 1,2 LE.

c) Die Ebenen sind orthogonal zueinander, wenn die Normalenvektoren zueinander senkrecht sind.

$$\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}3\\4\\a\end{pmatrix}=0$$
$3+8-2a=0$
$11-2a=0$
$-2a=-11$
$a=5{,}5$

Aufgabe 13

a) Die Gerade ist parallel zur Ebene, wenn der Normalenvektor der Ebene und der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zueinander sind.

$$\begin{pmatrix}2a\\-4\\a-2\end{pmatrix}\odot\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}=0$$
$-2a+a-2=0$
$-a-2=0$
$a=-2$

b) Es gilt:

$6x - 8y + z = 24$ durch 2
$3x - 4y + 0{,}5 = 12$

Diese Gleichung vergleichen wir mit E_a:

$2ax - 4y + (a\text{-}2)z = 12$

Die Werte bei y und rechts vom Gleichzeichen stimmen überein.
Es müsste gelten:

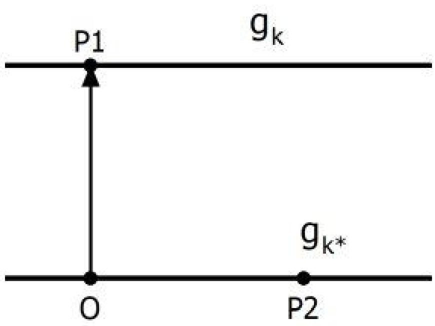
$2a = 3$ und $a\text{-}2 = 0{,}5$
$a = 1{,}5$ $a = 2{,}5$

Wir erhalten nicht denselben Wert für a. Die Ebene liegt daher nicht in der Schar.

Aufgabe 14

a) Alle Geraden sind zueinander parallel, da sie denselben Richtungsvektor besitzen.

b)



Wenn der Punkt P ein benachbarter Punkt von O ist gibt es zwei Möglichkeiten:

1.Möglichkeit:
Die Punkte O und P (in der Zeichnung mit P1 bezeichnet) liegen auf zwei unterschiedlichen Geraden der Schar.
Dies ist der Fall, wenn der Vektor $\overrightarrow{OP}$ und der Richtungsvektor der Gerade orthogonal zueinander sind.
Da $\begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 44 + 32 + 5 = 81 \neq 0$ ist, sind die Vektoren nicht orthogonal zueinander, also scheidet die 1.Möglichkeit aus.

2.Möglichkeit:
Die Punkte O und P (in der Zeichnung mit P2 bezeichnet) liegen auf derselben Schargerade.

Einsetzen des Punktes O(0|0|0) in die Schargerade:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k\\-4k\\k\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix} \qquad \begin{aligned}0 &= k+4\mu\\ \Leftrightarrow 0 &= -4k+8\mu\\ 0 &= k+\mu\end{aligned}$$

Zeile (1) – Zeile (3): $0=3\mu \Leftrightarrow \mu=0$
Einsetzen in Zeile ergibt k = 0.

Der Ursprung O liegt auf der Gerade $g_0:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}$

Kontrolle, ob der Punkt P(11|4|5) auf g_0 liegt:

$$\begin{pmatrix}11\\4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\8\\1\end{pmatrix}$$

Aus Zeile (3) folgt $\mu=5$
Aus Zeile (2) folgt $\mu=0{,}5$.

Daher liegt P nicht auf g_0.
Damit scheidet auch die Möglichkeit 2 aus.

Somit sind O und P keine benachbarten Eckpunkte des Quadrats.

Aufgabe 15

a) Aus der Geradengleichung kann aus den Zeilen entnommen werden:
$x_1=t$ und $x_2=1$ und $x_3=1-t$

Einsetzen in die Ebenengleichung ergibt: $t+1+(1-t)=2$
Daraus ergibt sich die wahre Aussage 2 = 2.
Damit liegt g in der Ebene E.

b) Zunächst wird geprüft, ob die Richtungsvektoren für einen bestimmten Wert von a Vielfache sein können:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Aus der 1.Zeile ergibt sich k = 1.
Aus der 3.Zeile ergibt sich 0 = -1, also ein Widerspruch.
Somit sind die Richtungsvektoren für jeden Wert von a keine Vielfache zueinander.

Gleichsetzen der Geradengleichungen:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

3.Zeile: $1 = 1 - t \Leftrightarrow t = 0$
1.Zeile: $s = t \Rightarrow s = 0$
2.Zeile: $s \cdot a = 1 \Rightarrow 0 \cdot a = 1$ ergibt einen Widerspruch

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar, daher sind die Geraden für jeden Wert von a windschief.