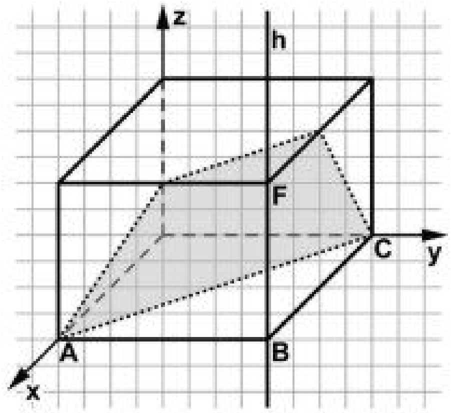
Aufgaben (Teil B)

Aufgabe 1 (Berlin 2018)

Aufgabe 2.2: Quader

Die Punkte $A(4\,|\,0\,|\,0), B(4\,|\,4\,|\,0), C(0\,|\,4\,|\,0)$ und $F(4\,|\,4\,|\,3)$ sind Eckpunkte des abgebildeten Quaders. Die Gerade h verläuft durch B und F.



a) Begründen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist. Geben Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks an.

b) Geben Sie eine Gleichung der Gerade g an, die durch A und C verläuft. Begründen Sie, dass diese Gerade windschief zur Gerade h ist.

Die Punkte der Geraden h lassen sich durch $P_t(4\,|\,4\,|\,t)$ mit $t \in \mathbb{R}$ darstellen. Für jeden Wert von t liegen A, C und P_t in der Ebene $E_t: tx + ty - 4z = 4t$.

c) Ermitteln Sie diejenigen Werte von t, für die die zugehörige Ebene E_t mit der x-y-Ebene einen Winkel der Größe 60° einschließt.

Der abgebildete Quader wird durch eine der Ebenen E_t in zwei Teilkörper zerlegt. Die Kanten der Schnittfigur dieser Ebene und des Quaders sind in der Abbildung gepunktet dargestellt.

d) Beschreiben Sie, wie man mithilfe der Abbildung ermitteln kann, dass für diese Abbildung $t = 6$ ist.

e) Berechnen Sie das Volumen desjenigen der beiden Teilkörper, zu dem der Punkt B gehört, und erläutern Sie Ihr Vorgehen.

f) Es gibt Werte von t, für die die Schnittfigur des Quaders und der Ebene E_t die Form eines Dreiecks hat. Geben Sie alle diese Werte von t an und beschreiben Sie die Lage der Eckpunkte des Dreiecks.

g) Die folgende Aussage stellt die Lösung einer Aufgabe im Zusammenhang mit den bisher betrachteten geometrischen Objekten dar:

$$\left|\frac{t \cdot 4 + t \cdot 4 - 4 \cdot 0 - 4t}{\sqrt{t^2 + t^2 + 16}}\right| = 2 \Leftrightarrow t = -2\sqrt{2} \vee t = 2\sqrt{2}$$

Formulieren Sie eine dazu passende Aufgabenstellung.

Aufgabe 2 (BW 2024)

Gegeben sind die Ebene E: $3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 12$ und die Schar der Geraden

$$g_a: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ a-2 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, \; a \in \mathbb{R}.$$

a) Untersuchen Sie, ob g_4 orthogonal zu $g_{0,5}$ ist. (2 BE)

b) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den g_4 mit E einschließt. (3 BE)

c) Untersuchen Sie, ob eine Gerade der Schar den Ursprung enthält. (3 BE)

d) Alle Geraden der Schar liegen in der Ebene F. Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung von F.
(*zur Kontrolle:* $x_1 - 2x_2 - x_3 = -8$) (4 BE)

Betrachtet werden die Punkte $P_r(1+r \,|\, 2-2r \,|\, 5-r)$ mit $r \in \mathbb{R}_0^+$.

e) Begründen Sie, dass die Punkte P_r auf einer zu F orthogonalen Gerade liegen. (3 BE)

f) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Jeder Punkt P_r *hat von jeder Gerade der Schar den Abstand* $\sqrt{6} \cdot r$. (4 BE)

g) Gegeben ist die Gerade k: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \; s \in \mathbb{R}.$

Zeigen Sie, dass k in F liegt, aber nicht zur Schar gehört. (3 BE)

h) Die Schnittpunkte aller Gerade g_a mit der x_1x_2-Ebene liegen auf der Gerade h.
Auf h gibt es einen Punkt, der auf keiner Gerade g_a liegt.
Bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punkts. (3 BE)

Aufgabe 3 (BW 2022)

Aufgabe B2

Gegeben sind die Geradenschar $g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} a \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ und

die Gerade $h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $s \in \mathbb{R}$.

a) Beschreiben Sie die besondere Lage der Gerade h im Koordinatensystem. (0,5 VP)

Zeigen Sie, dass die Gerade h zur Schar g_a gehört. (1 VP)

Alle Geraden der Schar g_a liegen in einer Ebene E.

Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene E. (2 VP)

(Teilergebnis: $E: x_2 + 3x_3 = -6$)

b) Bestimmen Sie denjenigen Wert von a, für den g_a die x_2-Achse schneidet. (1,5 VP)

Es gibt zwei Geraden der Schar g_a, die die Gerade h im Winkel 45° schneiden.

Ermitteln Sie die zugehörigen Werte von a. (2,5 VP)

c) Bestimmen Sie eine Gleichung einer Gerade, die von allen Geraden der Schar g_a den Abstand $\sqrt{40}$ besitzt und zu allen Geraden der Schar g_a windschief verläuft. (2,5 VP)

Aufgabe 4 (BW 2019)

Die Abbildung in der Anlage zeigt den Würfel ABCDEFGH mit A(0|0|0) und G(5|5|5) in einem kartesischen Koordinatensystem.
Die Ebene T schneidet die Kanten des Würfels unter anderem in den Punkten K(5|0|1), L(2|5|0), M(0|5|2) und N(1|0|5).

a) Zeichnen Sie das Viereck KLMN in die Abbildung ein.
Zeigen Sie, dass das Viereck KLMN ein Trapez ist und zwei gleich lange Seiten hat.
Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene T in Koordinatenform.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunkts von T mit der x_1 -Achse an.
(Teilergebnis: T: $5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 30$)

(5 VP)

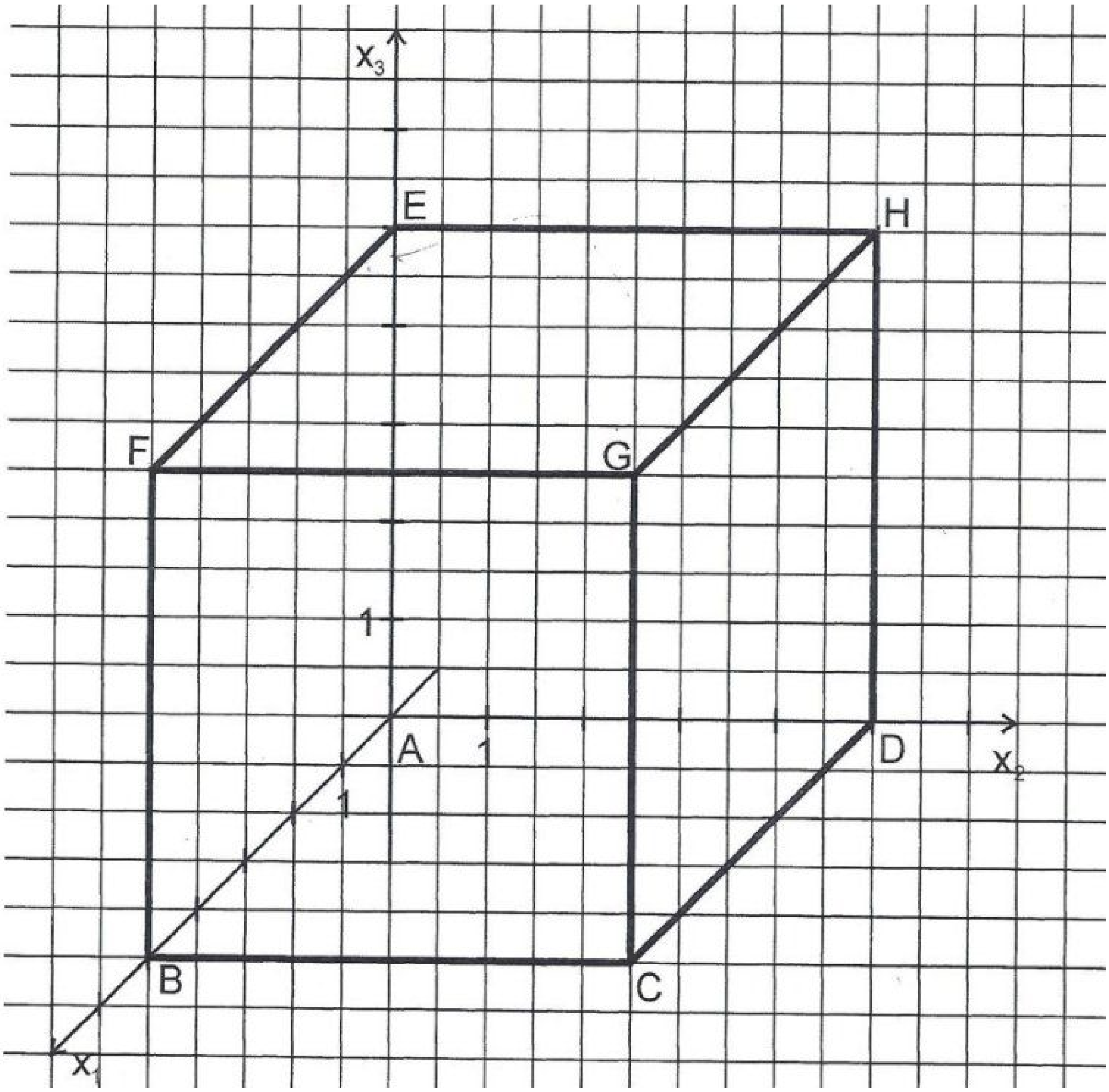
b) Die Spitze einer Pyramide mit der Grundfläche KLMN liegt auf der Strecke FG.
Untersuchen Sie, ob die Höhe dieser Pyramide $\frac{18}{\sqrt{66}}$ betragen kann.

(2 VP)

c) Betrachtet wird die Schar der Geraden

$$g_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2,5 \\ 0 \\ 3,5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10a \\ \frac{2}{a} \end{pmatrix} \quad \text{mit } a > 0.$$

Begründen Sie, dass keine Gerade der Schar in der Ebene mit der Gleichung $x_3 = 3,5$ liegt.
Gegeben ist die Ebene U: $-5x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 5$.
Untersuchen Sie, ob die Schnittgerade von T und U zur betrachteten Schar gehört.



x_3
E
H
F
G
1
A
1
D
x_2
1
B
C
x_1