Lösungen

Teil B (mit Hilfsmitteln) 1. Teil

Aufgabe 3 (Baden-Württemberg 2023)

a) *Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von G_t mit der y-Achse unabhängig von t ist.*

$f_t(0) = (1-0) \cdot e^0 = 1$

Der Schnittpunkt $S_y(0\,|\,1)$ ist unabhängig von t.

Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_{10} dargestellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Es gilt $f_{10}(1) = (1-10) \cdot e^{-2} \approx -1{,}22$.
Da der Punkt A(1|-1,22) auf dem Graphen G_{10} liegt, muss Graph II der Graph G_{10} sein.

b) *Begründen Sie, dass f_0 umkehrbar ist.*

Es gilt $f_0(x) = e^{-2x}$.
Die Funktion f_0 ist streng monoton fallend, da $f_0'(x) = -2e^{-2x} < 0$ ist.
Daher ist f_0 umkehrbar.

Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f_0 und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an.

$y = e^{-2x}$
Tausch der Variablen: $x = e^{-2y}$
Auflösen nach y: $-2y = \ln(x) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}\ln(x)$
Term der Umkehrfunktion: $\overline{f_0}(x) = -\frac{1}{2}\ln(x)$
Definitionsmenge: $D_{\overline{f_0}} =]0;+\infty[$

c) *Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der x-Achse.*

Steigung der Tangente:
Es gilt $f_0'(x) = -2e^{-2x}$.
Daraus folgt $f_0'(0{,}5) = -2e^{-1}$
Steigungswinkel der Tangente: $\tan(\alpha) = m \Leftrightarrow \tan(\alpha) = -2e^{-1} \Leftrightarrow \alpha \approx -36{,}3°$
Der Steigungswinkel beträgt $\alpha^* = -36{,}3° + 180° = 143{,}7°$.
Der Schnittwinkel β muss kleiner als 90° sein: $\beta = 180° - 143{,}7° = 36{,}3°$

Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt.

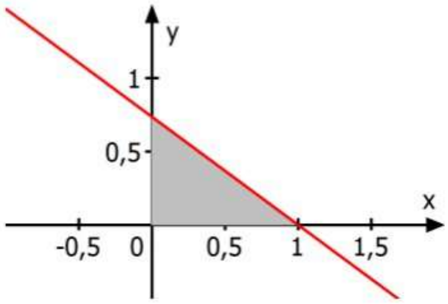
Tangentenformel: $y = f_0'(u) \cdot (x-u) + f_0(u)$
Für u = 0,5 gilt: $y = f_0'(0{,}5) \cdot (x-0{,}5) + f_0(0{,}5)$

Gleichung der Tangente: $y = -2e^{-1} \cdot (x-0{,}5) + e^{-1} \Leftrightarrow y = -\frac{2}{e}x + \frac{2}{e}$

Schnittstelle mit der x-Achse: $0 = -\frac{2}{e}x + \frac{2}{e} \Leftrightarrow x = 1$

Schnittpunkt mit der y-Achse: $S_y(0 \mid \frac{2}{e})$

Die Katheten haben eine Länge von 1 und $\frac{2}{e}$.



Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang die Ungleichung geometrisch.

Bei der Rotation um die x-Achse entsteht ein Kegel mit h = 1 und $r = \frac{2}{e}$:

$$V_x = \frac{1}{3}\pi \cdot \left(\frac{2}{e}\right)^2 \cdot 1 = \frac{4\pi}{3e^2}$$

Bei der Rotation um die y-Achse entsteht ein Kegel mit r = 1 und $h = \frac{2}{e}$:

$$V_y = \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{e} = \frac{2\pi}{3e}$$

Interpretation der Ungleichung: Das Volumen des Kegels, der bei Rotation der Dreiecksfläche um die y-Achse entsteht ist größer als der Kegel, der bei Rotation um die x-Achse entsteht.

d) *Berechnen Sie diesen Wert von t.*

Berechnung der Schnittstellen mit der x-Achse:
$f_t(x) = 0 \Leftrightarrow (1-tx^2) \cdot e^{-2x} = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
Gleichung I): $e^{-2x} = 0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $1 - tx^2 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{1}{t}}$

Der Abstand der Schnittpunkte ist $2\cdot\sqrt{\frac{1}{t}}$.

Bedingung: $2\cdot\sqrt{\frac{1}{t}}=8 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{t}}=4$ |quadrieren

$$\Rightarrow \frac{1}{t}=16 \Leftrightarrow t=\frac{1}{16}$$

e) *Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.*

$$A(z)=\left|\int_0^z (f_t(x)-f_{t+2}(x))dx\right|=\left|\left[-\left(x^2+x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2x}\right]_0^z\right|=\left|-\left(z^2+z+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2z}-(-\frac{1}{2})\right|$$

$$=\left|-\left(z^2+z+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-2z}+\frac{1}{2}\right|$$

Für $z\to+\infty$ gilt $A(z)\to\frac{1}{2}$

f) *Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Gerade mit der Gleichung $x=\frac{1}{2}$ liegt.*

Notwendige Bedingung für Extremstellen: $f_t'(x)=0$

Es gilt $f_t'(x)=-2tx\cdot e^{-2x}+(1-tx^2)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)=2e^{-2x}(-tx-1+tx^2)$.

$2e^{-2x}(-tx-1+tx^2)=0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt
Gleichung I): $2e^{-2x}=0$ ist nicht lösbar
Gleichung II): $tx^2-tx-1=0 \quad \Rightarrow x_{1,2}=\frac{t\pm\sqrt{t^2+4t}}{2t}$
Da in der Aufgabe steht, dass der Graph G_t zwei Extrempunkte besitzt, muss die hinreichende Bedingung nicht geprüft werden.

Mittelwert der Extremstellen:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{\frac{t+\sqrt{t^2+4t}}{2t}+\frac{t-\sqrt{t^2+4t}}{2t}}{2}=\frac{\frac{t+\sqrt{t^2+4t}+t-\sqrt{t^2+4t}}{2t}}{2}=\frac{\frac{2t}{2t}}{2}=\frac{1}{2}$$

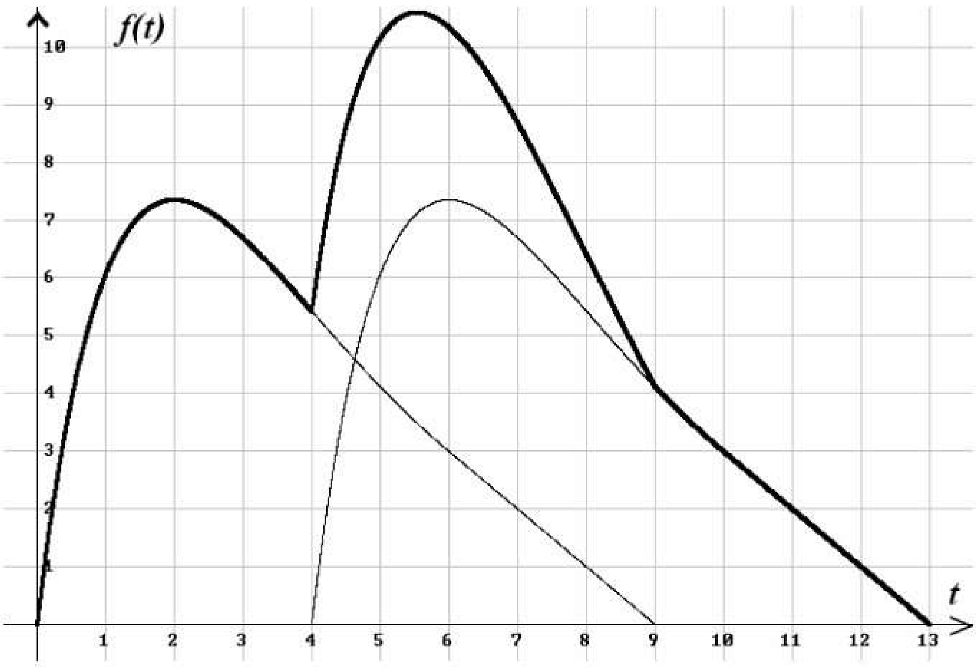
Da der Mittelwert der Extremstellen $\frac{1}{2}$ beträgt, ist der Nachweis erbracht.

Aufgabe 4 (Hamburg 2008)

a)	Die höchste Konzentration im Blut ist an der Stelle, an der der Graph der Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0,5t}$ einen Hochpunkt hat. Es muss also gelten: $f'(t) = 0$ mit $f'(t) = 10e^{-0,5t} - 5t \cdot e^{-0,5t}$. Somit erhält man $t = 2$. Dem Verlauf des Graphen in der Anlage ist zu entnehmen, dass dies nur ein Maximum sein kann. $f(2) = 10 \cdot 2 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} \approx 7,36$. Die höchste Konzentration ist also nach 2 Stunden vorhanden und beträgt 7,36 Milligramm pro Liter.
b)	Der stärkste Abbau entspricht der betragsmäßig größten Steigung nach dem Maximum des Graphen der Funktion f. Sie wird im Wendepunkt von f angenommen. Also muss gelten: $f''(t) = 0$ mit $f''(t) = -10e^{-0,5t} + 2,5t \cdot e^{-0,5t}$. Damit ergibt sich $t = 4$. Das Medikament wird nach vier Stunden am stärksten abgebaut.

c)	Der lineare Verlauf wird durch die Geradengleichung $k(t) = f(6) + f'(6) \cdot (t-6)$ beschrieben. Es gilt: $f'(t) = (10-5t) \cdot e^{-0,5 \cdot t}$. Einsetzen ergibt: $k(t) = 60 \cdot e^{-3} - 20 \cdot e^{-3} \cdot (t-6)$ $= 180 \cdot e^{-3} - 20t \cdot e^{-3}$ $= -20 \cdot e^{-3} \cdot (t-9)$. Die Nullstelle von k liegt also bei 9, d. h. dass das Medikament nach 9 Stunden vollständig abgebaut ist.
d)	Die mittlere Konzentration des Medikamentes berechnet man folgendermaßen: $\frac{1}{9} \cdot \int_0^9 f(t)\mathrm{d}t$. Eine grobe Abschätzung erhält man z. B. durch Auszählen einerseits der Anzahl n der Kästchen, die ganz in der zugehörigen Fläche liegen, und andererseits der Anzahl m der Kästchen, die von 0 bis 9 vom Graphen geschnitten werden. Man bekommt: $n = 27$ und $m = 19$. Der gesuchte Mittelwert lässt sich damit grob abschätzen durch $\left(n + \frac{m}{2}\right) : 9 = \left(27 + \frac{19}{2}\right) : 9 = 4,055\ldots$. Die Abschätzung sollte zwischen 3,5 Milligramm pro Liter und 4,5 Milligramm pro Liter liegen.

e)



<u>Bemerkung zur grafischen Darstellung:</u> Eine genaue Darstellung der „Überlagerungsfunktion“ ist etwas diffizil, da ja mehrere Definitionsintervalle in Fallunterscheidungen zu betrachten sind, je nachdem bei welcher Funktion der exponentielle oder der lineare Teil wirkt. Das wird nicht erwartet (wenn auch in der obigen Musterskizze geschehen). Wichtig ist die Struktur des Graphen und dass es einen relevanten Zeitraum gibt, in dem die 10-mg/l-Grenze überschritten wird.

f) Da die Konzentration zeitweilig die Grenze von 10 Milligramm pro Liter übersteigt, muss der Patient mit starken Nebenwirkungen rechnen.

Zur Begründung könnte man

- entweder am Graphen argumentieren
- oder zeigen, dass z. B. bei $t = 6$ der Wert $f(t) + f(t-4) \approx 10{,}34$ über 10 liegt (die linearen Teile kommen hier noch nicht ins Spiel)
- oder argumentieren, dass das Maximum rechts von $t = 4$ liegen muss, dass also die Funktion $f(t) + f(t-4)$ betrachtet werden muss, die ihre Extremstelle bei $t = \dfrac{2(3e^2+1)}{e^2+1} \approx 5{,}52$ hat mit dem Maximalwert von ungefähr 10,60 (auch hier kommen die linearen Teile noch nicht ins Spiel).

		I	II
g)	$g(t)=a\cdot t\cdot e^{-bt}$ $g'(t)=a\cdot e^{-bt}-abt\cdot e^{-bt}$ Da die Konzentration bei $t=4$ am größten sein soll, gilt: $g'(4)=0$. $0=a\cdot e^{-4b}-4ab\cdot e^{-4b}$ $a=4ab \qquad \mid :a\ (a\neq 0)$ $b=\frac{1}{4}$ Einsetzen in $g(4)=4a\cdot e^{-4b}$ mit $g(4)=10$ ergibt: $a=2{,}5e=6{,}7957...$. Also gilt: $a\approx 6{,}80$ und $b=0{,}25$.		

(www.selbstlernmaterial.de)

Aufgabe 5

a) *Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Profillinie.*

Ableitungen:

$f(x) = 0{,}0008x^4 - 0{,}12x^2 + 5$

$f'(x) = 0{,}0032x^3 - 0{,}24x$

$f''(x) = 0{,}0096x^2 - 0{,}24$

$f'''(x) = 0{,}0192x$

Hinreichende Bedingung für den Tiefpunkt: $f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

$0{,}0032x^3 - 0{,}24x = 0$

$\Leftrightarrow x \cdot \left(0{,}0032x^2 - 0{,}24\right) = 0$ Lösung mit dem Satz vom Nullprodukt

Gleichung I): x = 0

Gleichung II): $0{,}0032x^2 - 0{,}24 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 75 \Rightarrow x = \pm\sqrt{75}$

Laut dem Schaubild muss der Tiefpunkt an der Stelle $x = \sqrt{75}$ vorliegen.

Kontrolle: $f''(\sqrt{75}) = 0{,}48 > 0$ also Tiefpunkt

$f(\sqrt{75}) = 0{,}5$

Tiefpunkt $T(\sqrt{75} \mid 0{,}5)$

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle x = 5 am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat.

Der steilste Abfall befindet sich an der Wendestelle.

Kontrolle, dass bei x = 5 eine Wendestelle vorliegt:

$f''(5) = 0{,}0096 \cdot 25 - 0{,}24 = 0$ und $f'''(5) \neq 0$

Damit existiert bei x = 5 eine Wendestelle.

Steigung an der Wendestelle: $f'(5) = -0{,}8$

Die Steigung -0,8 entspricht einem Gefälle von 80%.

Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist.

Der Übergang liegt an der Stelle x = 0 vor.

Es gilt f(0) = 5, das heißt der Punkt P(0|5) ist der Übergangspunkt.

Wegen $f'(0) = 0$ besitzt der Graph von f dieselbe Steigung wie die waagrechte Gerade, die die Hochfläche beschreibt.

Durch den gemeinsamen Übergangspunkt P mit gleicher Steigung liegt ein knickfreier Übergang vor.

b) *Berechnen Sie die Länge des Seils.*

Es gilt $f(5) = 2{,}5$ und somit ist P(5|2,5).
Es gilt $f(10) = 1$ und somit ist Q(10|1).

Die Länge des Seils entspricht dem Abstand von P zu Q.

Berechnung mit dem Satz des Pythagoras:
$\overline{PQ} = \sqrt{(10-5)^2 + (2{,}5-1)^2} = \sqrt{27{,}25} \approx 5{,}22$ Meter

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann.

1.Schritt: Aufstellen der Geradengleichung g(x), die durch P und Q verläuft.

2.Schritt: Aufstellen der Funktion d(u) = g(u) – f(u), die den vertikalen Abstand zwischen der Gerade g und dem Gelände dar mit $5 \leq u \leq 10$

3.Schritt: Berechnung des absoluten Maximums der Funktion d(u).
Hinreichende Bedingung für lokales Maximum: $d'(u) = 0$ und $d''(u) < 0$
Das lokale Maximum ist hier auch das globale Maximum, da für die Randwerte gilt d(5) = d(10) = 0.

c) Der Lichtmast hat seinen Standpunkt in A(-1|5).

Das Gelände wird komplett ausgeleuchtet, wenn der Lichtstrahl entlang der Wendetangente verläuft.

Aus a) ergibt sich als Wendestelle x = 5.
Gleichung der Tangente an der Stelle x = 5: $y = f'(5) \cdot (x-5) + f(5)$
Es gilt $f'(5) = -0{,}8$ und $f(5) = 2{,}5$

Gleichung der Wendetangente: $y = -0{,}8(x-5) + 2{,}5 \Rightarrow y = -0{,}8x + 6{,}5$

Einsetzen von x = -1 in die Tangente ergibt $y = 7{,}3$.
Das Ende des Lichtmastes muss sich auf einer Mindesthöhe von 7,3 Meter befinden.
Da der Lichtmast auf einer Höhe von 5 Meter beginnt, muss der Lichtmast mindestens 2,3 Meter hoch sein.

Aufgabe 7 (Bremen 2009)

3a) zu Beginn: $6600 \, m^3/s$ $P_1(0|6600)$

nach 1h: $9000 \, m^3/s$ $P_2(1|9000)$

höchster Wert HP

nach 3h wie zu Beginn $P_3(3|6600)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$P_1(0|6600) \Rightarrow d = 6600$ I.

$P_2(1|9000) \Rightarrow a + b + c + d = 9000$ II

$3a + 2b + c = 0$ III.

$P_3(3|6600) \Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 6600$ IV.

Nach Einsetzen von I ergibt sich:

II. $a + b + c = 2400$

III. $3a + 2b + c = 0$

IV. $27a + 9b + 3c = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2400 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 27 & 9 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$a = 600$

$b = -3600$

$c = 5400$

$\Rightarrow f(x) = 600x^3 - 3600x^2 + 5400x + 6600$

Kontrolle der HB:

$f'(x) = 1800x^2 - 7200x + 5400$

$f''(x) = 3600x - 7200$

$f''(1) = 3600 - 7200 = -3600 < 0 \Rightarrow$ HP bei $x = 1$ ✓

b) $f_K(2) = 600 \cdot 2^3 - K \cdot 2 + 5400 \cdot 2 + 6600 = 22.200 - 2k$

$f_k(3) = 600 \cdot 3^3 - k \cdot 3 + 5400 \cdot 3 + 6600 = 39.000 - 3k$

Da es sich um lineare Funktionen handelt, wird der größte Wert bei $K = 3550$ und der kleinste bei $K = 3600$ erreicht.

Kleinster Wert: $x = 2 \rightarrow 15.000$

$x = 3 \rightarrow 28.200$

größter Wert: $x = 2 \rightarrow 15.100$

$x = 3 \rightarrow 28.350$

-12-

c) $f_k(x) = 600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600$

$f_k'(x) = 1800x^2 - 2kx + 5400$

$f_k''(x) = 3600x - 2k$

$f_k'''(x) = 3600$

N.B.: $f_k''(x) = 0$

$$3600x - 2k = 0$$

$$3600x = 2k$$

$$x = \frac{2k}{3600} = \frac{k}{1800}$$

H.B.: $f_k''(x) = 0 \wedge f_k'''(x) \neq 0$

$$f_k'''\left(\frac{k}{1800}\right) = 3600 \neq 0 \checkmark$$

y-Wert: $y = 600 \cdot \left(\frac{k}{1800}\right)^3 - k \cdot \left(\frac{k}{1800}\right)^2 + 5400 \cdot \frac{k}{1800} + 6600$

$$= \frac{k^3}{9720000} - \frac{k^3}{3240000} + 3k + 6600$$

$$= -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600 \ \frac{m^3}{s}$$

Der Wendepunkt ist der Zeitpunkt mit der größten Abnahme der Fließgeschwindigkeit.

d) $WP\left(\frac{k}{1800} \middle| -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600\right)$

$x = \frac{k}{1800}$ $\qquad y = -\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600$

$1800x = k$

$$\Rightarrow y = -\frac{(1800x)^3}{4860000} + 3 \cdot 1800x + 6600$$

$$= -1200x^3 + 5400x + 6600$$

$\Rightarrow O(x) = -1200x^3 + 5400x + 6600$

e) $1h = 3600s$

$\Rightarrow g_k(x) = 3600 \cdot f_k(x)$

Aufgabe 8

a) Alle Exponenten sind gerade

$\Rightarrow f_t(x)$ ist symmetrisch zur y-Achse

b) $-\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2 = 0$

$x^2 \cdot \left(-\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2\right) = 0$

$x_1 = 0$

$\frac{1}{9}x^2 = \frac{2}{3}t^2$

$x^2 = 9 \cdot \frac{2}{3} \cdot t^2$

$x^2 = 6t^2$

$x = \pm\sqrt{6}\,t \qquad t > 0$

$\Rightarrow$ drei NS: $x_1 = 0$; $x_2 = \sqrt{6}\,t$; $x_3 = -\sqrt{6}\,t$

c) $f_t'(x) = -\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2x$

$f_t''(x) = -\frac{4}{3}x^2 + \frac{4}{3}t^2$

$f_t'''(x) = -\frac{8}{3}x$

Extrempunkt:

N.B.: $f_t'(x) = 0$

$-\frac{4}{9}x^3 + \frac{4}{3}t^2x = 0$

$x \cdot \left(-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2\right) = 0$

$x_1 = 0$

$-\frac{4}{9}x^2 + \frac{4}{3}t^2 = 0$

$\frac{4}{3}t^2 = \frac{4}{9}x^2 \quad \left| \cdot \frac{9}{4}\right.$

$3t^2 = x^2 \quad |\sqrt{\ }$

$\pm\sqrt{3}\,t = x \qquad t > 0$

H.B.: $f_t'(x) = 0 \wedge f_t''(x) \neq 0$

$f_t''(0) = \frac{4}{3} t^2 > 0$

$f_t''(\sqrt{3}t) = -\frac{4}{3} \cdot 3t^2 + \frac{4}{3} t^2 = -\frac{12}{3} t^2 + \frac{4}{3} t^2 = -\frac{8}{3} t^2 < 0$

$f_t''(-\sqrt{3}t) = -\frac{8}{3} t^2 < 0$

y-Wert:

$f_t(0) = 0$

$f_t(\sqrt{3}t) = -\frac{1}{9} \cdot 9t^4 + \frac{2}{3} t^2 \cdot 3t^2 = -t^4 + 2t^4 = t^4$

$f_t(-\sqrt{3}t) = -\frac{1}{9} \cdot 9t^4 + \frac{2}{3} t^2 \cdot 3t^2 = t^4$

Ergebnis: $TP\ (0/0)$

$HP_1\ (\sqrt{3}t / t^4)$

$HP_2\ (-\sqrt{3}t / t^4)$

Wendepunkte:

N.B.: $f_t''(x) = 0$

$-\frac{4}{3} x^2 + \frac{4}{3} t^2 = 0$

$\frac{4}{3} t^2 = \frac{4}{3} x^2$

$t^2 = x^2 \qquad t > 0$

$\pm t = x$

H.B.: $f_t''(x) = 0 \wedge f_t'''(x) \neq 0$

$f_t'''(t) = -\frac{8}{3} \cdot t < 0 \neq 0 \qquad t > 0$

$f_t'''(t) = -\frac{8}{3} \cdot -t > 0 \neq 0$

y-Wert:

$f_t(t) = -\frac{1}{9} \cdot t^4 + \frac{2}{3} t^2 \cdot t^2 = -\frac{1}{9} t^4 + \frac{6}{9} t^4 = \frac{5}{9} t^4$

$f_t(-t) = -\frac{1}{9} t^4 + \frac{2}{3} t^2 \cdot t^2 = \frac{5}{9} t^4$

$\Rightarrow WP_1\ (t / \frac{5}{9} t^4)$

$WP_2\ (-t / \frac{5}{9} t^4)$

d) $HP_1(\sqrt{3}\,t \mid t^4)$

$x = \sqrt{3}\,t \qquad\qquad y = t^4$

$\frac{1}{\sqrt{3}}x = t$

$\Rightarrow \; y = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^4 = \frac{1}{9}x^4$

$HP_2(-\sqrt{3}\,t \mid t^4)$

$x = -\sqrt{3}\,t \qquad\qquad y = t^4$

$-\frac{1}{\sqrt{3}}x = t$

$\Rightarrow \; y = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x\right)^4 = \frac{1}{9}x^4$

$\Rightarrow O(x) = \frac{1}{9}x^4$

e) NS $\qquad x_1 = 0 \; ; \; x_2 = \sqrt{6}\cdot 2 \; ; \; x_3 = -\sqrt{6}\cdot 2$

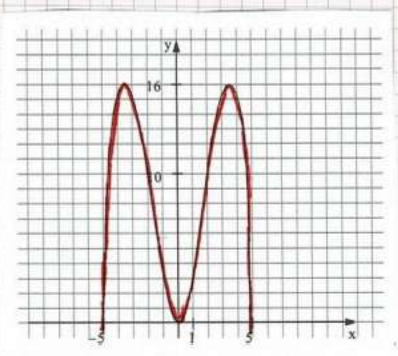
$TP\,(0/0)$

$HP_1\,(\sqrt{3}\cdot 2 \,/\, 16)$

$HP_2\,(-\sqrt{3}\cdot 2 \,/\, 16)$

$WP_1\,(2 \,/\, \frac{5}{9}\cdot 16)$

$WP_2\,(-2 \,/\, \frac{5}{9}\cdot 16)$



f) $g(x) = ax^2 + bx + c$

$P_1(t \mid \frac{5}{9}t^2) \;\Rightarrow g(t) = \frac{5}{9}t^2 \;\Rightarrow at^2 + bt + c = \frac{5}{9}t^2$

$P_2(\sqrt{6}\,t \,/\, 0) \;\Rightarrow g(\sqrt{6}\,t) = 0 \;\Rightarrow 6at^2 + \sqrt{6}\,tb + c = 0$

$P_3(-\sqrt{6}\,t \,/\, 0) \;\Rightarrow g(-\sqrt{6}\,t) = 0 \;\Rightarrow 6at^2 - \sqrt{6}\,tb + c = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2 & t & 1 & \frac{5}{9}t^2 \\ 6t^2 & \sqrt{6}t & 1 & 0 \\ 6t^2 & -\sqrt{6}t & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 6\cdot\text{I}-\text{II} \\ 6\cdot\text{I}-\text{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2 & t & 1 & \frac{5}{9}t^2 \\ 0 & 6t-\sqrt{6}t & 5 & \frac{30}{9}t^2 \\ 0 & 6t+\sqrt{6}t & 5 & \frac{30}{9}t^2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \text{II}-\text{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} t^2 & t & 1 & \frac{5}{9}t^2 \\ 0 & 6t-\sqrt{6}t & 5 & \frac{30}{9}t^2 \\ 0 & -2\sqrt{6}t & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -2\sqrt{6}t \cdot b = 0 \quad |:(-2\sqrt{6}t) \qquad t>0$

$b = 0$

$\Rightarrow 5c = \frac{30}{9}t^2 \quad |:5$

$c = \frac{6}{9}t^2 = \frac{2}{3}t^2$

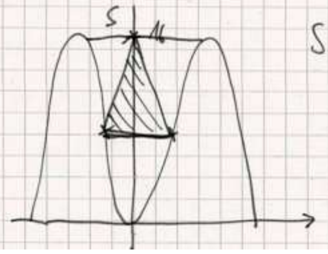
$\Rightarrow t^2 \cdot a + \frac{6}{9}t^2 = \frac{5}{9}t^2 \quad |-\frac{6}{9}t^2$

$t^2 \cdot a = -\frac{1}{9}t^2 \quad |:t^2 \qquad t>0$

$a = -\frac{1}{9}$

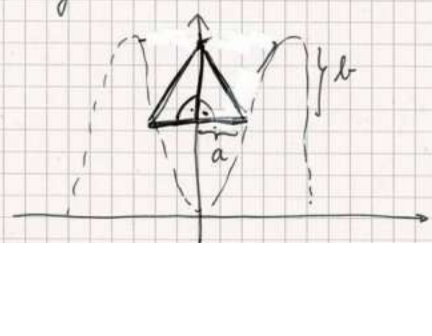
$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{9}x^2 + \frac{2}{3}t^2$

g) Skizze:



S(0/16)

Das Dreieck besteht aus 2 gleich großen rechtwinkligen Dreiecken:



$$A_\Delta = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} = a \cdot b$$

$$a = x_p$$

$$b = 16 - f_2(x_p) = 16 - \left(-\frac{1}{9}x_p^4 + \frac{2}{3} \cdot 2^2 \cdot x_p^2\right)$$
$$= 16 - \left(-\frac{1}{9}x_p^4 + \frac{8}{3}x_p^2\right)$$
$$= 16 + \frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2$$

$$\Rightarrow A(x_p) = x_p \cdot \left(16 + \frac{1}{9}x_p^4 - \frac{8}{3}x_p^2\right)$$
$$= 16x_p + \frac{1}{9}x_p^5 - \frac{8}{3}x_p^3$$

gesucht: Maximum von $A(x_p)$

$$A'(x_p) = 16 + \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2$$
$$A''(x_p) = \frac{20}{9}x_p^3 - 16x_p$$

N.B.: $A'(x_p) = 0$

$$16 + \frac{5}{9}x_p^4 - 8x_p^2 = 0$$

GTR...
$$\left.\begin{array}{l} x_{p_1} = -3{,}46 \\ x_{p_2} = -1{,}55 \end{array}\right\} \text{außerhalb des Def. bereichs}$$
$$x_{p_3} = 1{,}55$$
$$x_{p_4} = 3{,}46$$

H.B.: $A'(x_p) = 0 \wedge A''(x_p) \neq 0$

$$A''(x_{p_3}) = -16{,}52 < 0 \Rightarrow HP$$
$$A''(x_{p_4}) = 36{,}69 > 0 \Rightarrow TP$$

Ränder und y-Wert:

$$A(0) = 0$$
$$A(1{,}55) = 15{,}864$$
$$A(2 \cdot \sqrt{3}) = 0$$

$\Rightarrow x_p \approx 1{,}55$ mit $A \approx 15{,}864$ FE (Flächeneinheiten)