Aufgaben

Teil A (ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen bzw. Funktionsscharen

a) $f(x)=2x^2-8x+6$

b) $f(x)=x^3-6x^2-7x$

c) $f(x)=(8x-16)\cdot e^{-0,6x}$

d) $f_a(x)=x^3-ax^2$

e) $f(x)=(x^4-5x^2+4)\cdot e^{-4x}$

f) $f_a(x)=x^2-2x+a$

g) $f(x)=e^{2x}-1$

h) $f_a(x)=x^3-2ax$

Aufgabe 2

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
I. x + y + 2z = 7
II. 2x – y + z = 2
III. 2x + 2y – z = 4

b)
I. x + y + z = 9
II. 2x + 3y - 2z = 9
III. -x + 2y + 2z = 9

Aufgabe 3

a) Berechne das folgende Integral: $\int_0^2 3x^2+2x\,dx$

b) Berechne a: $\int_0^a 2x+1\,dx=30$

c) Berechne a: $\int_a^{3a} 2x+1\,dx=14$

d) Berechne das folgende Integral in Abhängigkeit von a: $\int_0^2 3x^2+ax\,dx$

e) Bestimme zwei verschiedene Stammfunktionen von $f(x)=4x^3+6x^2+6x$

f) Bestimme diejenige Stammfunktion F(x) von $f(x)=6x^2+4x$, für die F (1) = 1 gilt.

g) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x)=4\cdot e^{2x}$.

h) Zeige, dass $F(x)=(2x+5)\cdot e^{3x}$ eine Stammfunktion von $f(x)=(6x+17)\cdot e^{3x}$ ist.

i) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=(4x^2+3x+1)\cdot e^{2x}$.

j) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=x\cdot e^x+4x^2$

k) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=x^2\cdot\sin(x^2)$

l) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=(x^2+1)\cdot e^{x^2+4x}$

m) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=2e^{-x}+2e^x$

n) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=\sqrt{2x^2+5}$

o) Bestimme die erste Ableitung von $f(x)=\frac{x+1}{x^2}$

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktionsschar $f_a(x)=x^2+ax+4$.

a) Bestimme den Wert, den man für a einsetzen muss, damit x = 6 eine Nullstelle der Funktion ist.

b) Bestimme die Koordinaten des Extrempunktes von f_a in Abhängigkeit von a.

c) Bestimme die Funktionsgleichung für die Ortslinie der Extrempunkte von Aufgabe 4b.

d) Bestimme die Gleichung der Tangente an f_a durch den Punkt P (1 / $f_a(1)$).

e) Bestimme die Gleichung der Normalen an f_a durch den Punkt P (1 / $f_a(1)$).

f) Untersuche, ob es Punkte gibt, die auf allen Funktionen der Funktionsschar liegen.

g) Bestimme die Werte von a, für die gilt: P (a / 3a²) liegt auf dem Graphen von f_a

Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktionsschar $f_{a,b}(x)=ax^2-bx$ mit zwei voneinander unabhängigen Parametern a und b. Bestimme die Nullstellen in Abhängigkeit von a und b.

Aufgabe 6

Bestimme x:

a) $\log_2(8)=x$

b) $\log_x(49)=2$

c) $\log_3(x)=3$

d) $3^x=81$

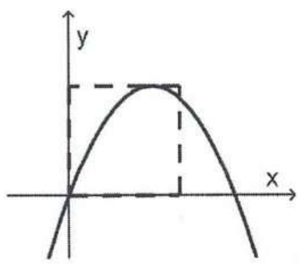
e) $\frac{18}{x^2}=2$

Aufgabe 7 (Baden-Württemberg 2023)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x)=-x^2+2ax$, $a\in\,]1;+\infty[$.
Die Nullstellen von f sind 0 und 2a.

a) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

b) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung). Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, überein.
Bestimmen Sie den Wert von a.

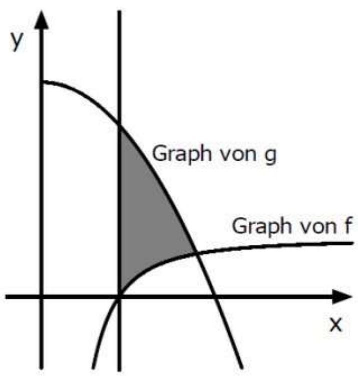


Aufgabe 8 (Baden-Württemberg 2022)

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f mit $f(x)=4-\frac{4}{x^2}$ und g mit $g(x)=15-3x^2$, $x>0$, sowie die Gerade mit der Gleichung x = 1.

a) Zeigen Sie, dass sich die Graphen von f und g an der Stelle $x_0=2$ schneiden.

b) Berechnen Sie den Inhalt der markierten Fläche.



Aufgabe 9 (Baden-Württemberg 2022)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktionen f_k mit
$f_k(x) = x^4 + (2-k)\cdot x^3 - k\cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.
b) Es gibt einen Wert von k, für den $x_W = 1$ eine Wendestelle von f_k ist.
Berechnen Sie diesen Wert von k.

Aufgabe 10 (Baden-Württemberg 2022)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{0,5x^2}$.
Bestimmen Sie den Wert der zweiten Ableitung von f an der Stelle $x_0 = 0$.

Aufgabe 11 (Baden-Württemberg 2022)

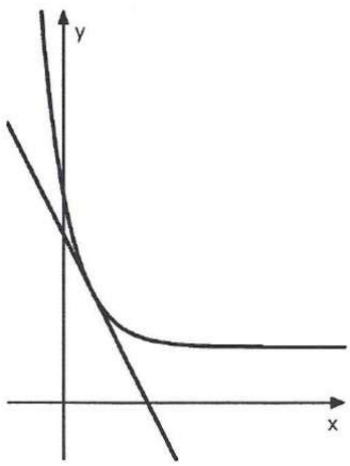
Die Graphen einer Schar ganzrationaler Funktionen dritten Grades berühren die x-Achse im Punkt O(0|0). Jeder Graph der Schar besitzt die Extremstelle $x_0 = -2$.
Untersuchen Sie, ob alle Graphen der Schar den Punkt P(-3|0) gemeinsam haben.

Aufgabe 12 (Baden-Württemberg 2021)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-2x+1} + 1$.
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.

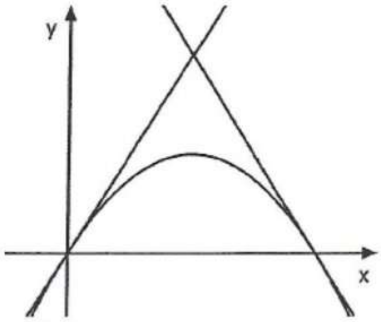
a) Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Steigung -2 hat.

b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.



Aufgabe 13 (Baden-Württemberg 2021)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = 4x - x^2$.
Die Abbildung zeigt ihren Graphen G_f sowie die Tangenten an G_f in den Schnittpunkten mit der x-Achse.

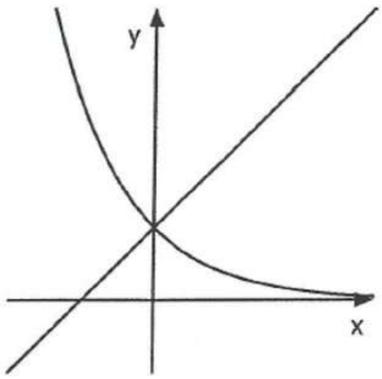


a) Weisen Sie nach: Die Tangente an G_f an der Stelle x = 0 hat die Steigung 4.

b) Die beiden Tangenten schneiden sich in einem Punkt S. Berechnen Sie den Abstand des Punktes S vom Ursprung.

Aufgabe 14 (Baden-Württemberg 2021)

Die Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit $f(x) = e^{-x}$ und $g(x) = x + 1$, deren Schnittpunkt auf der y-Achse liegt.



Die Graphen begrenzen mit der x-Achse und der Geraden x = u (u > 0) eine Fläche.
Diese Fläche wird von der y-Achse in zwei inhaltsgleiche Teilflächen geteilt.
Berechnen Sie den Wert von u.

Aufgabe 15 (Baden-Württemberg 2010)

Berechnen Sie das Integral $\int_1^e \left(\frac{2}{x} + 4x \right) dx$

Aufgabe 16 (Baden-Württemberg 2016)

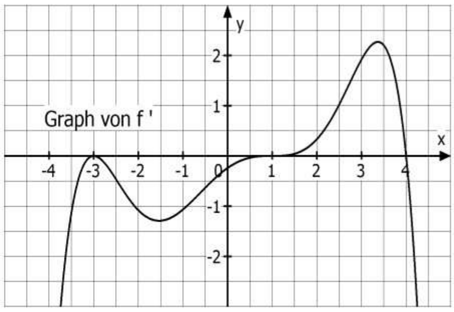
Lösen Sie die Gleichung $3 - e^x = \frac{2}{e^x}$

Aufgabe 17 (Baden-Württemberg 2017)

Sind folgende Aussagen wahr ? Begründen Sie jeweils Ihre Entscheidung.
(1) Jede Funktion, deren Ableitung eine Nullstelle hat, besitzt eine Extremstelle.
(2) Jede ganzrationale Funktion vierten Grades hat eine Extremstelle.

Aufgabe 18 (Baden-Württemberg 2018)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f ' einer ganzrationalen Funktion f.
Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.



(1) Im Bereich $-3,5 \le x \le 4,5$ besitzt f genau drei Extremstellen.

(2) Die Gleichung $f'(x) = -\frac{1}{2}x$ hat im abgebildeten Bereich genau zwei Lösungen.

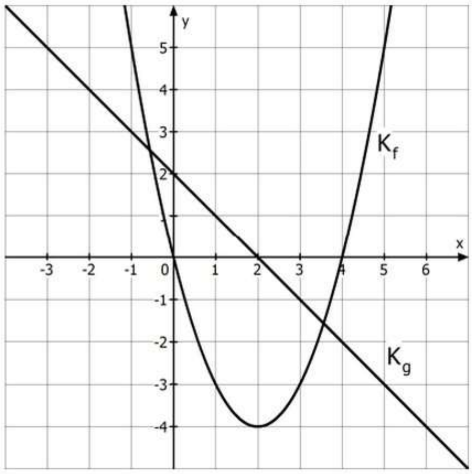
(3) Die Funktion f'' hat an der Stelle x = -3 einen Vorzeichenwechsel von positiven zu negativen Werten.

Aufgabe 19 (Baden-Württemberg 2014)

Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g.

a) Bestimmen Sie $f(g(3))$.
Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f(g(x)) = 0$ ist.

b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Bestimmen Sie $h'(2)$.



Aufgaben
Teil B (mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1 (Berlin 2018)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a durch die Gleichung $f_a(x) = (x^2 + a) \cdot e^{0,5-x}; a \in \mathbb{R}$.
Die Graphen der Schar sind G_a.

a) Ermitteln Sie die Anzahl der Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.
Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von f_a für $x \to \infty$ und für $x \to -\infty$.

b) Geben Sie den Schnittpunkt des Graphen G_a mit der y-Achse an.
In der Abbildung 1 sind für ganzzahlige Parameterwerte a zwei Graphen der Funktionenschar f_a dargestellt.
Ermitteln Sie die Parameterwerte und beschriften Sie die Graphen.

c) Die Graphen G_2 und G_0, die y-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 3$ schließen eine Fläche ein. Berechnen Sie den Inhalt A dieser Fläche.

d) Weisen Sie nach, dass die Graphen G_a der Funktionenschar f_a für $a > 1$ keine Extrempunkte besitzen.
[Zur Kontrolle: $f_a'(x) = (-x^2 + 2x - a) \cdot e^{0,5-x}$]

e) Weisen Sie nach, dass gilt: $f_2''(x) = (x-2)^2 e^{0,5-x}$.
Erläutern Sie, welche Schlussfolgerungen daraus über den Verlauf des Graphen G_2 gezogen werden können.

f) Der Graph G_2 verläuft im Intervall $[1;3]$ annähernd geradlinig und kann vereinfacht durch die Tangente t an diesen Graphen in $x = 2$ dargestellt werden.
Ermitteln Sie die Gleichung der Tangente t.
[Zur Kontrolle: $t(x) = -2 \cdot e^{-1,5} \cdot x + 10 \cdot e^{-1,5}$]
Zeigen Sie, dass der Funktionswert der Tangente t an der Stelle $x = 1$ um weniger als 2 % vom Funktionswert von f_2 an dieser Stelle abweicht.

Der Graph $G_{0,65}$ der Funktion $f_{0,65}$ schließt über dem Intervall $[0;3]$ mit der x-Achse eine Fläche ein (siehe Abbildung 2).
Durch Rotation dieser Fläche um die x-Achse entsteht ein Körper, der modellhaft einer auf der Seite liegenden und nach links geöffneten Vase entspricht. Es gilt: $1\,\text{LE} = 1\,\text{dm}$.

g) Die Vase nimmt an zwei verschiedenen Stellen einen maximalen Radius von ca. 1,07 dm an. Bestimmen Sie diese beiden Stellen.

h) Interpretieren Sie im Sachzusammenhang die Funktion $b(t) = \pi \cdot \int_{3-t}^{3} ((f_{0,65}(x))^2 \, dx$.

i) Die Vase soll stehend in einem Karton verpackt werden, der die Form eines regelmäßigen sechsseitigen Prismas besitzt. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen dem maximalen Radius der Vase und der Grundfläche des Kartons mit Hilfe einer Skizze und einer Gleichung dar.
Ermitteln Sie, welches Volumen (in cm³) dieser Karton mindestens haben muss.

Anlage zu 1.1: Vase

Abbildung 1

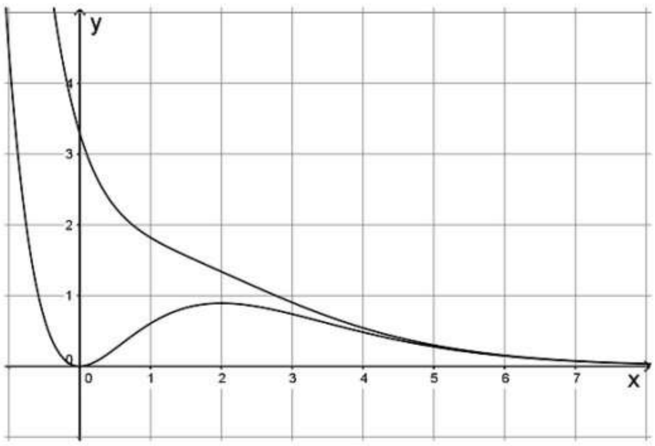
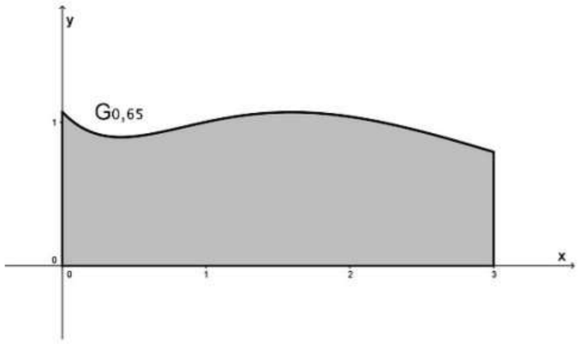


Abbildung 2



<u>Aufgabe 2</u> (Berlin 2018)

Gegeben sind die Funktionenschar f_a mit $f_a(x) = \frac{1}{a}x^3 + 3x^2 + 5x + 2a$; $x \in I\!R$, $a \in I\!R$, $a \neq 0$

und die Funktion h mit $h(x) = -\frac{1}{2} \cdot x^{-3}$; $x \in I\!R$, $x \neq 0$.

Die zugehörigen Graphen sind G_a und K.

a) Geben Sie die für den Graphen K vorliegende Symmetrie an und begründen Sie diese.
Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte von h für $x \to +\infty$.
Begründen Sie, dass es keine reelle Zahl a gibt, so dass gilt: $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f_a(x)$.

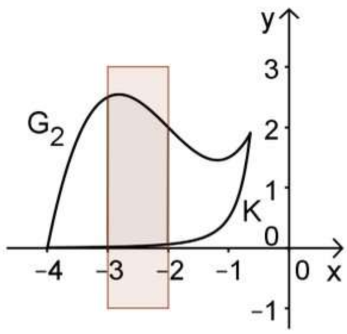
b) Die Tangente an K im Punkt $P(-1 \mid h(-1))$ und die beiden Koordinatenachsen begrenzen ein Dreieck.
Ermitteln Sie den Flächeninhalt dieses Dreiecks.

c) Begründen Sie, dass der Graph K keine lokalen Extrempunkte besitzt.

d) Zeigen Sie, dass es genau zwei Punkte auf dem Graphen G_2 gibt, in denen Tangenten mit dem gleichen Anstieg $m = 1{,}5$ existieren.

e) Es gibt einen Wert des Parameters a, für den der Graph G_a genau einen Punkt mit waagerechter Tangente besitzt. Bestimmen Sie diesen Parameterwert.
Erläutern Sie, wie Sie nachweisen könnten, dass der Graph G_a für diesen Parameterwert einen Sattelpunkt besitzt.

Ein Gartenbesitzer hat sich in einer Ecke seines Gartens einen Teich angelegt. Der Rand dieses Teiches an der Wasseroberfläche wird durch Teile der Graphen G_2 und K modelliert. Im Intervall $-3 \leq x \leq -2$ verläuft eine Brücke über den Teich, $1 \text{ LE} = 1 \text{ m}$.
In der nebenstehenden Darstellung sind die Teichoberfläche und die Brücke senkrecht von oben betrachtet dargestellt.



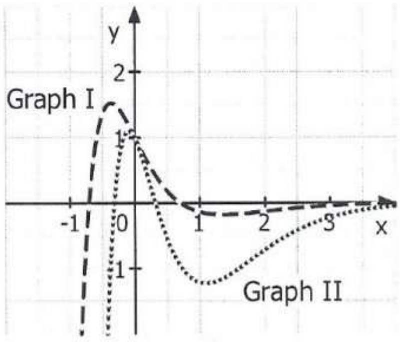
f) Zeigen Sie, dass die Punkte $P_1(-4 \mid 0)$ und $P_2(-0{,}64 \mid 1{,}9)$ bei entsprechender Rundung der y-Koordinaten auf den beiden zur Modellierung verwendeten Graphen liegen.
Der Gartenteich wird kurzzeitig durch eine rechteckige Plane abgedeckt. Die Seiten dieser Plane liegen parallel zu den Koordinatenachsen.
Berechnen Sie die Seitenlängen, die diese Plane mindestens haben muss.

g) Wenn genau senkrecht zur Teichoberfläche Licht auf den Gartenteich fällt, entsteht durch die Brücke ein Schatten, der zum Teil auf der Wasseroberfläche liegt. Berechnen Sie die Größe der Wasseroberfläche, die in diesem Fall im Schatten liegt.

h) Die über den Teich führende Brücke soll in einem neuen x-y-Koordinatensystem modelliert werden durch eine ganzrationale Funktion 4. Grades, die symmetrisch zur y-Achse verläuft.
Die Brücke hat eine Spannweite von 4 Metern und ist in der Mitte 0,5 Meter hoch (über der x-Achse). An den beiden Enden hat die Brücke einen Steigungswinkel von 45° (bzw. – 45°).
Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel.

Aufgabe 3 (Baden-Württemberg 2023)

Für jedes $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist G_t der Graph der Funktion f_t mit $f_t(x) = \left(1 - tx^2\right) \cdot e^{-2x}$, $x \in \mathbb{R}$.



a) Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt von G_t mit der y-Achse unabhängig von t ist. (0,5 VP)
Entscheiden Sie, welcher der abgebildeten Graphen G_{10} dargestellt, und begründen Sie Ihre Entscheidung. (1 VP)

b) Begründen Sie, dass f_0 umkehrbar ist. (1 VP)
Ermitteln Sie einen Term der Umkehrfunktion von f_0 und geben Sie die Definitionsmenge dieser Umkehrfunktion an. (1,5 VP)

c) Betrachtet wird die Tangente an G_0 im Punkt $B(0{,}5 \mid f_0(0{,}5))$.
Bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels dieser Tangente mit der x-Achse. (1 VP)
Diese Tangente begrenzt mit den Koordinatenachsen ein rechtwinkliges Dreieck.
Berechnen Sie die Längen der Katheten dieses Dreiecks exakt. (1,5 VP)
Bei Rotation dieses Dreiecks um die x- bzw. y-Achse entsteht jeweils ein Körper.
Interpretieren Sie in diesem Zusammenhang folgende Ungleichung geometrisch:

$$\frac{2\pi}{3e} > \frac{4\pi}{3e^2}$$ (1,5 VP)

d) Für einen bestimmten Wert von t besitzt der Graph G_t zwei Schnittpunkte mit der x-Achse, die voneinander den Abstand 8 haben.
Berechnen Sie diesen Wert von t. (2 VP)

e) Die Funktion H mit $H(x) = -\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-2x}$ ist eine Stammfunktion von h mit $h(x) = f_t(x) - f_{t+2}(x)$. Die Graphen G_t und G_{t+2} besitzen für x > 0 keine gemeinsamen Punkte und schließen mit der y-Achse eine nach rechts unbegrenzte Fläche ein. Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche.
(2,5 VP)

f) Für jedes t > 0 hat der Graph G_t zwei Extrempunkte P_t und Q_t.
Begründen Sie, dass der Mittelpunkt der Strecke P_tQ_t auf der Gerade mit der Gleichung $x = \frac{1}{2}$ liegt. (2,5 VP)

Aufgabe 4 (Hamburg 2008)

Nach Einnahme eines Medikamentes kann man dessen Konzentration im Blut eines Patienten messen. Für die ersten 6 Stunden beschreibt die Funktion f mit der Gleichung $f(t) = 10t \cdot e^{-0{,}5t}$ die im Blut vorhandene Menge des Medikamentes in Milligramm pro Liter in Abhängigkeit von der Zeit t. Nach 6 Stunden erfolgt der Abbau näherungsweise linear (siehe Anlage).

a) Berechnen Sie die maximale Konzentration im Blut und den Zeitpunkt, zu dem sie vorhanden ist. **20 P**

b) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem das Medikament am stärksten abgebaut wird. **10 P**

c) Der lineare Abbau nach 6 Stunden wird näherungsweise durch die Tangente k am Graphen von f im Punkt $(6 \mid f(6))$ beschrieben. Bestimmen Sie die Geradengleichung der Tangente und damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament unter dieser Annahme vollständig abgebaut ist. **15 P**

d) Beschreiben Sie, wie Sie die mittlere Konzentration des Medikamentes bis zum vollständigen Abbau berechnen würden. Bestimmen Sie eine grobe Abschätzung dieser mittleren Konzentration, z. B. mithilfe der Grafik in der Anlage. **15 P**

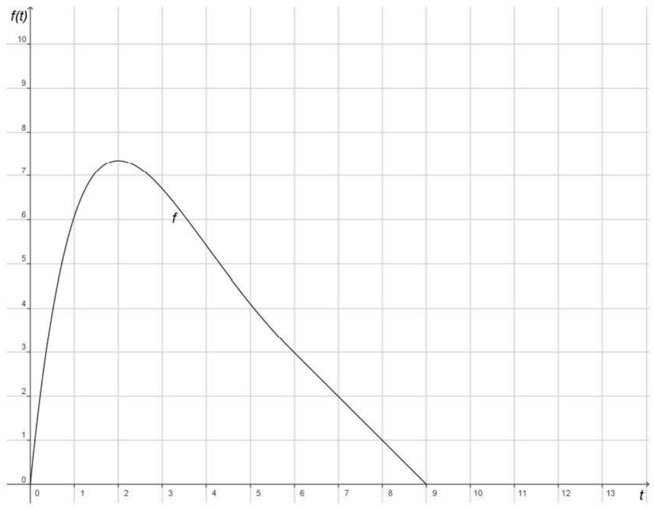
e) Ein Patient nimmt das Medikament 4 Stunden nach der ersten Einnahme in gleicher Dosierung ein weiteres Mal ein. Nehmen Sie in einem vereinfachenden Modell an, dass sich die Konzentrationen im Blut dieses Patienten addieren und dass der Abbau (und damit auch der Übergang in die „lineare Zone“) für beide Medikationen unabhängig voneinander erfolgt.

Skizzieren Sie zur Grafik in der Anlage die Darstellung der Gesamtkonzentration bis zum vollständigen Abbau nach dem eben beschriebenen Modell. **15 P**

f) Ein Patient muss mit starken Nebenwirkungen rechnen, wenn die Konzentration des Medikamentes im Blut 10 Milligramm pro Liter übersteigt.
Entscheiden Sie, ob der Patient aus Aufgabenteil e) gefährdet ist. **10 P**

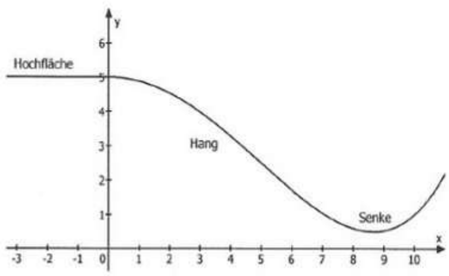
Um das Medikament in seiner Wirksamkeit zu verbessern, verändert der Hersteller seine Zusammensetzung. Die Konzentration des Medikamentes im Blut wird wieder durch eine Funktion der Form $g(t) = a \cdot t \cdot e^{-b \cdot t}$ mit $a > 0$ und $b > 0$ beschrieben. t ist wiederum die Zeit in Stunden nach der Einnahme und $g(t)$ wird in der Einheit $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ (Milligramm pro Liter) gemessen.

g) Bestimmen Sie die Konstanten a und b, wenn die Konzentration genau vier Stunden nach der Einnahme ihren größten Wert von $10 \frac{\text{mg}}{\text{l}}$ erreichen soll. **15 P**



Aufgabe 5 (Baden-Württemberg 2021)

Das Gelände eines Abenteuerspielplatzes besteht aus einer Hochfläche, an die sich ein Hang mit einer Senke anschließt.
Die Profillinie des Geländes wir für $-3 \le x \le 0$ durch die Gerade mit der Gleichung y = 5 und für $0 \le x \le 11$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}0008x^4 - 0{,}12x^2 + 5$ beschrieben.
Die Abbildung zeit diese Profillinie.
(1 LE entspricht 1m)



a) Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Profillinie. (2 VP)

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle x = 5 am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat. (2 VP)

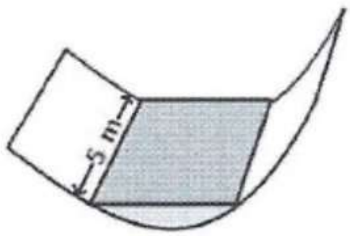
Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist. (1 VP)
(Teilergebnis: Der tiefste Punkt hat die y-Koordinate 0,5)

b) Zwischen zwei Befestigungspunkten, die im Modell durch P(5|f(5)) und Q(10|f(10)) dargestellt werden, wird ein Seil straff gespannt.
Berechnen Sie die Länge des Seils. (1,5 VP)

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann. (2 VP)

c) Auf der Hochfläche, einen Meter vom Übergang zum Hang entfernt, steht ein vertikaler Lichtmast, von dem aus das gesamte Gelände ausgeleuchtet werden kann. Berechnen Sie die Mindestlänge dieses Lichtmasts. (2,5 VP)

d) Bei einem Umbau soll die Senke auf 5m Länge so mit Sand aufgefüllt werden, dass eine horizontale rechteckige Fläche entsteht, die 0,5m oberhalb des tiefsten Punktes der Senke liegt.
Berechnen Sie das Volumen des dafür benötigten Sandes. (3,5 VP)

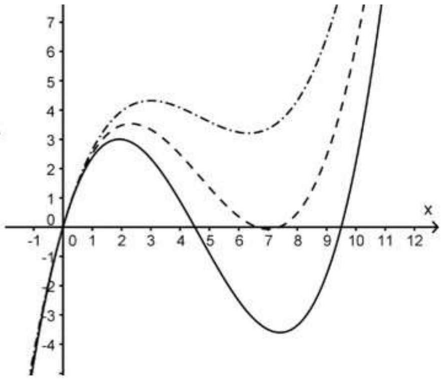


<u>Aufgabe 6</u> (Berlin 2015)

Gegeben ist die Funktionenschar f_a mit

$f_a(x) = ax^3 - 14ax^2 + 3{,}42x$; $a \in IR, a > 0$.

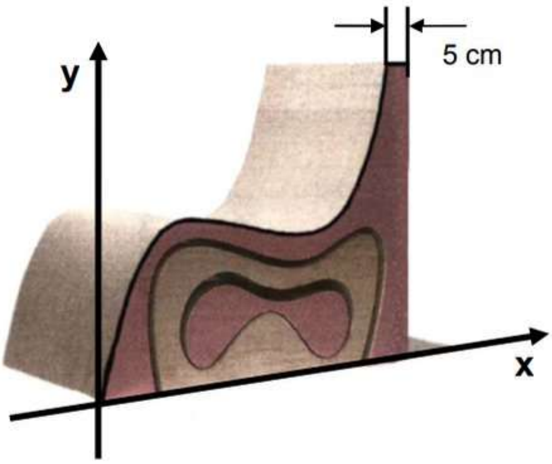
Drei Graphen der Schar sind in der Abbildung dargestellt.



a) Weisen Sie nach, dass alle Graphen der Schar bei $x_n = 0$ dieselbe Steigung haben.
Einer der Graphen der Schar hat außer $x_n = 0$ genau eine weitere Nullstelle.
Berechnen Sie den Parameterwert dieser Funktion gerundet auf zwei Nachkommastellen.

b) Jeder Graph der Schar hat genau einen Wendepunkt. Bestimmen Sie seine Koordinaten und weisen Sie damit nach, dass alle Wendepunkte auf einer Parallelen zur y-Achse liegen. Geben Sie die Gleichung dieser Geraden an.
Einer der Graphen der Schar hat an der Stelle $x_e = 3$ einen Hochpunkt.
Bestimmen Sie für die zu diesem Graphen gehörende Funktion f_a die Funktionsgleichung.

Der abgebildete Designersessel hat Seitenflächen, die für $0 \leq x \leq 9$ aus der Fläche unter dem Graphen von $f_{0,06}$ der gegebenen Funktionenschar (oberster Graph in der oberen Abbildung) und für $9 < x \leq 9{,}5$ aus einem angesetzten Rechteck von 5 cm Breite bestehen (1 LE = 10 cm).



c) Bestimmen Sie die Gesamthöhe des Sessels und ermitteln Sie, wie hoch der Sessel an der niedrigsten Stelle der Sitzfläche ist (Angaben in cm).

d) Berechnen Sie die Größe der in der Abbildung sichtbaren Seitenfläche (Angabe in m^2).
Diese Seitenfläche enthält auch die 5 cm breite Rechteckfläche am hinteren Rand.
Die Seitenfläche soll grafisch neu gestaltet werden.
Für die Grafik wird ein achsenparalleles Rechteck der Größe 85 cm x 30 cm benötigt.
Untersuchen Sie, ob ein solches Rechteck auf die Seitenfläche passt.

e) Für jede Stelle x_1 im Fußbereich ($x_1 < 3$) gibt es eine Stelle x_2 im Lehnenbereich ($x_2 > 6{,}3$) mit gleicher Steigung.
Weisen Sie für $f_{0,06}$ nach, dass für je zwei x-Werte x_1 und x_2, bei denen die Steigung gleich ist, gilt: $x_1 + x_2 = \dfrac{28}{3}$.

<u>Aufgabe 7</u> (Bremen 2009)

Hochwasser


Wasserstandsanzeiger Bremerhaven

Auf der Höhe von Bremerhaven erzeugt der Tidenverlauf (Zyklus von Ebbe und Flut) in Verbindung mit den vorherrschenden Winden unterschiedliche Fließgeschwindigkeiten der Weser. Vom Wasser- und Schifffahrtsamt Bremerhaven wurden zu unterschiedlichen Zeitpunkten die Fließgeschwindigkeiten der Weser in $\frac{m^3}{s}$ [Kubikmeter pro Sekunde] gemessen.

a) Die Weser hatte zu Beginn der Messung eine Fließgeschwindigkeit von $6600\frac{m^3}{s}$. Eine Stunde nach Beginn der Messung stieg die Fließgeschwindigkeit auf ihren höchsten Wert von $9000\frac{m^3}{s}$ an.
Drei Stunden nach Beginn der Messung hatte die Weser wieder die Fließgeschwindigkeit erreicht, die sie zu Beginn der Messung hatte.
Das Wasser- und Schifffahrtsamt möchte die Fließgeschwindigkeit der Weser auf der Höhe von Bremerhaven mit Hilfe der beschriebenen Messergebnisse näherungsweise durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben.
Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von der Zeit x, wobei x die Zeit in Stunden nach Beginn der Messung und $f(x)$ die Fließgeschwindigkeit in $\frac{m^3}{s}$ zum Zeitpunkt x angibt.

Messungen an anderen Tagen bei gleichen Tidenverhältnissen aber unterschiedlichen Winden zeigten, dass sich die Fließgeschwindigkeiten der Weser durch die Funktionen f_k mit

$$f_k(x) = 600x^3 - kx^2 + 5400x + 6600,\ 0 \le x \le 3$$

und $k \in [3550; 3600]$ beschreiben lassen.

Die Aufgabenteile b) bis e) sollen stets in Abhängigkeit von k gelöst werden.

b) Berechnen Sie die Fließgeschwindigkeit der Weser sowohl zwei als auch drei Stunden nach Beginn der Messung.
Bestimmen Sie an diesen Punkten jeweils den größten und kleinsten Wert der Fließgeschwindigkeit, der aufgrund des Intervalls für k möglich ist.

c) Weisen Sie nach, dass der Wendepunkt von f_k bei $x_W = \frac{k}{1800}$ liegt und dass die Fließgeschwindigkeit zu dieser Zeit $-\frac{k^3}{4860000} + 3k + 6600\ \frac{m^3}{s}$ beträgt. Erläutern Sie die Bedeutung des Wendepunktes für die Fließgeschwindigkeit.

d) Zeigen Sie, dass alle Wendepunkte (vgl. Teil c)) der Kurvenschar f_k auf dem Graphen einer Funktion h liegen und geben Sie die zugehörige Funktionsvorschrift an.

e) Geben Sie die Funktion g_k an, welche die Fließgeschwindigkeit in „m^3 pro Stunde" statt in „m^3 pro Sekunde" beschreiben.

Aufgabe 8 (Bremen 1995)

Für jedes $t > 0$ ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x) = -\frac{1}{9}x^4 + \frac{2}{3}t^2x^2$ $(x \in \mathbb{R})$.

a) Untersuchen Sie die Funktion f_t auf Symmetrie!

b) Berechnen Sie die Schnittpunkte des Graphen der Funktion f_t mit der x-Achse!

c) Untersuchen Sie den Graphen der Funktion f_t auf lokale Extrempunkte und Wendepunkte!

d) Auf welcher Kurve liegen die lokalen Maximumpunkte der Graphen aller Funktionen f_t?
Geben Sie eine Gleichung dieser Ortskurve an!

e) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f_2 im Intervall $-5 \leq x \leq 5$!

f) Die Punkte $P_1(t; \frac{5}{9}t^2)$, $P_2(t\sqrt{6}; 0)$ und $P_3(-t\sqrt{6}; 0)$ liegen auf dem Graphen einer quadratischen Funktion.
Ermitteln Sie eine Gleichung dieser quadratischen Funktion!

g) Die Verbindungsgerade der beiden Maximumpunkte des Graphen von f_2 schneidet die y-Achse im Punkt S. Der Punkt S und die beiden Kurvenpunkte $P(x_p; f_2(x_p))$ und $Q(-x_p; f_2(-x_p))$ mit $0 < x_p < 2\sqrt{3}$ sind die Eckpunkte eines Dreiecks ΔQPS.
Für welchen Wert von x_p wird der Flächeninhalt des Dreiecks maximal?
Geben Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks ΔQPS an!