# Lösungen (Teil B – 2. Hälfte)

## Aufgabe 10

Eine Bakterienkultur bedeckt im Moment 28 cm². Sie verdreifacht jede Stunde ihre Größe.

a)

$$f(x)=28\cdot 3^x$$

b)

75 min = 1 Stunde + 15 min = 1,25 Stunden

$$f(1{,}25)=28\cdot 3^{1{,}25}=110{,}55$$

Antwort: Es sind 110,55 cm².

c)

vor 2 Stunden = – 2 Stunden

$$f(-2)=28\cdot 3^{-2}=3{,}11$$

Antwort: Vor zwei Stunden waren es 3,11 cm².

d)

$$f(x)=100$$
$$28\cdot 3^x=100 \qquad |:28$$
$$3^x=\frac{25}{7}$$
$$x=\log_3\left(\frac{25}{7}\right)=1{,}16$$

Antwort: Eine Größe von 100 cm² wird nach 1,16 h erreicht.

e)

$$28\cdot 3^x=56 \qquad |:28$$
$$3^x=2$$
$$x=\log_3(2)=0{,}63$$

Antwort: Die Kultur braucht 0,63 h für eine Verdopplung.

f)

Der Anfangswert ist weiterhin 28 cm². Die Gleichung hat deshalb die Form
$$g(x)=28\cdot a^x$$

Nach zwei Stunden ist eine Verdreifachung erreicht (also von 28 auf 84 cm²). Es gilt daher:

$$f(2)=84$$
$$28\cdot a^2=84 \qquad |:28$$
$$a^2=3$$
$$a=\sqrt{3}\approx 1{,}73$$

Die gesuchte Gleichung lautet also $g(x)=28\cdot 1{,}73^x$

## Aufgabe 11

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| x | 0 | 1 | 2 | 3 |
| f(x) | 21 | 35,7 | 60,69 | 103,173 |

a)

Der Anfangswert (der Funktionswert bei x = 0) ist 21. Die Gleichung hat deshalb die folgende Gestalt: $f(x)=21\cdot a^x$ .

Wenn man oben einen Wert weitergeht, so wird unten mit 1,7 multipliziert. Der Wachstumsfaktor ist also 1,7.

Die Funktionsgleichung ist die folgende: $f(x)=21\cdot 1{,}7^x$ .

b)

Die Kultur hatte eine Größe von 21 cm².

c)

$$f(9)=21\cdot 1{,}7^9=2490{,}35$$

Größe nach 9 Stunden: 2490,45 cm²

d)

20 min = 1/3 Stunde

$$f(\frac{1}{3})=21\cdot 1{,}7^{\frac{1}{3}}=25{,}06$$

Größe nach 20 min: 25,06 cm²

e)

$$f(x)=80$$
$$21\cdot 1{,}7^x=80 \qquad |:21$$
$$1{,}7^x=\frac{80}{21}$$
$$x=\log_{1{,}7}(\frac{80}{21})=2{,}52$$

Zeitpunkt: nach 2,52 Stunden

f)

$$21 \cdot 1{,}7^x = 42 \qquad |:21$$
$$1{,}7^x = 2$$
$$x = \log_{1{,}7}(2) = 1{,}31$$

Eine Verdopplung erfolgt jeweils nach 1,31 Stunden.

g)

$$21 \cdot 1{,}7^x = 40 \cdot 1{,}1^x \qquad |:21$$
$$1{,}7^x = \frac{40}{21} \cdot 1{,}1^x \qquad |:1{,}1^x$$
$$\frac{1{,}7^x}{1{,}1^x} = \frac{40}{21}$$
$$\left(\frac{17}{11}\right)^x = \frac{40}{21}$$
$$x = \log_{\frac{17}{11}}\left(\frac{40}{21}\right) = 1{,}48$$

Die eine Kultur überholt die andere nach 1,48 h.

## Aufgabe 12

Auf einem Konto befinden sich im Moment 9000 Euro. Es gibt pro Jahr 1,2 % Zinsen. Wir rechnen mit Zinseszins.

a)

$$f(x) = 9000 \cdot 1{,}012^x$$

b)

$$f(6) = 9000 \cdot 1{,}012^6 = 9667{,}75$$

nach 6 Jahren: 9667,75 Euro auf dem Konto

c)

$$9000 \cdot 1{,}012^x = 10.000 \qquad |:9000$$
$$1{,}012^x = \frac{10}{9}$$
$$x = \log_{1{,}012}\left(\frac{10}{9}\right) = 8{,}83$$

10.000 Euro werden nach 8,83 Jahren erreicht.

d)

Kontostand jetzt: 9000 Euro

Kontostand in 100 Jahren: $9000 \cdot 1{,}012^{100} = 1.363.813.588{,}35$

$$\frac{1363813588{,}35}{9000} = 151.534{,}84$$

$151.534{,}84-1=151.533{,}84$

$151.533{,}84\cdot 100=15.153.384$

Der Kontostand wächst um 15.153.384 % an.

## Aufgabe 13

Gegeben: $f(x)=12\cdot 1{,}3^x$ und $g(x)=10\cdot 1{,}5^x$ . Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 11 Uhr und f(x) für die Größe in cm².

a)

Kultur 1 (die von f beschrieben wird): 12 cm²
Kultur 2 (die von g beschrieben wird): 10 cm²

b)

Kultur 1: 30 %
Kultur 2: 50 %

d)

$12\cdot 1{,}3^x=20$

$1{,}3^x=\frac{5}{3}$

$x=\log_{1,3}(\frac{5}{3})=1{,}95$

$10\cdot 1{,}5^x=20$

$1{,}5^x=2$

$x=\log_{1,5}(2)=1{,}71$

Kultur 1: 1,95 Stunden (12:57 Uhr)
Kultur 2: 1,71 Stunden (12:43 Uhr)

e) (i)

$12\cdot 1{,}3^x=10\cdot 1{,}5^x \quad |:10$

$1{,}2\cdot 1{,}3^x=1{,}5^x \quad |:1{,}3^x$

$1{,}2=\frac{1{,}5^x}{1{,}3^x}$

$1{,}2=(\frac{15}{13})^x$

$x=\log_{\frac{15}{13}}(1{,}2)=1{,}27$

1,27 Stunden = 1 Stunde + 0,27 mal 60 min = 1 Stunde + 16,2 min

Das Überholen findet um 12:16 Uhr statt.

(ii)
Vor dem Überholen war Kultur 1 größer.

## Aufgabe 14

In Tiexland leben im Moment 20 Millionen Menschen. Die Bevölkerung schrumpft jedes Jahr um 1 Prozent.

a)

$$f(20)=20\cdot 0{,}99^x$$

b)

$$20\cdot 0{,}99^x=10 \qquad |:20$$
$$0{,}99^x=0{,}5$$
$$x=\log_{0{,}99}(0{,}5)=68{,}97$$

Dies wird nach 68,97 Jahren der Fall sein.

c)

$$20\cdot 0{,}99^x=10\cdot 1{,}02^x \qquad |:10$$
$$2\cdot 0{,}99^x=1{,}02^x \qquad |:0{,}99^x$$
$$2=\frac{1{,}02^x}{0{,}99^x}$$
$$2=\left(\frac{102}{99}\right)^x$$
$$x=\log_{\frac{102}{99}}(2)=23{,}22$$

Dies ist nach 23,22 Jahren der Fall.

## Aufgabe 15

Die Größe eines Baums beträgt im Moment 3 Meter. Er wächst pro Jahr um 20 cm.

a)

f(x) = 0,2x + 3

b)

8 = 0,2x + 3
5 = 0,2x
25 = x

Dies ist nach 25 Jahren der Fall.

c) $g(x)=0{,}4x+2$

(i)

40 cm

(ii)

0,2x + 3 = 0,4x + 2
0,2x + 1 = 0,4x
1 = 0,2x
5 = x

Die Bäume sind nach 5 Jahren gleich groß.

## Aufgabe 16

Erde: $6 \cdot 10^{24}$ kg

Erde: Durchmesser 12.700 km.

Neutronenstern: $4 \cdot 10^{27}$ t = $4 \cdot 10^{30}$ kg

Neutronenstern: Dichte $5 \cdot 10^{17} \frac{kg}{m^3}$

a)

$$\frac{4 \cdot 10^{30}}{6 \cdot 10^{24}} = \frac{4}{6} \cdot 10^{30-24} = \frac{2}{3} \cdot 10^{6} = 666.666{,}67$$

Der Neutronenstern wiegt 666.666,67-mal so viel wie die Erde.

b)

$$r_{Erde} = \frac{1}{2} \cdot 12.700 = 6350\, km$$

$$V_{Erde} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot (6350\, km)^3 = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 256.047.875.000 \approx 1{,}07 \cdot 10^{12}\, km^3$$

c) (i)

$$V_{Neutronenstern} = \frac{Gewicht_{Neutronenstern}}{Dichte_{Neutronenstern}} = \frac{4 \cdot 10^{30}}{5 \cdot 10^{17}} = 0{,}8 \cdot 10^{30-17} = 0{,}8 \cdot 10^{13}$$

Das Volumen beträgt $0{,}8 \cdot 10^{13}$ m³

(ii)

$$V_{Erde} = 1{,}07 \cdot 10^{12}\ km^3 = 1{,}07 \cdot 10^{12} \cdot 1000^3\ m^3 = 1{,}07 \cdot 10^{12} \cdot 10^9\ m^3 = 1{,}07 \cdot 10^{21}\ m^3$$

$$Gewicht_{Erde} = V_{Erde} \cdot Dichte_{Erde} = 1{,}07 \cdot 10^{21} \cdot 5 \cdot 10^{17} = 5{,}35 \cdot 10^{38}\ kg$$

Das Gewicht würde $5{,}35 \cdot 10^{38}$ kg betragen.

## Aufgabe 17

a)

$$\frac{-3}{400} x^2 + \frac{3}{10} x = 0$$
$$x \cdot \left(\frac{-3}{400} x + \frac{3}{10}\right) = 0$$
$$x = 0 \quad oder \quad -0{,}0075 x + 0{,}3 = 0$$
$$x_1 = 0 \qquad -0{,}0075 x = -0{,}3$$
$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 40$$

Die beiden Nullstellen (wo die Fliege auf dem Boden war) sind 40 m voneinander entfernt. Sie hat daher 40 m Luftlinie zurückgelegt.

b)

$$f(x) = \frac{-3}{400}x^2 + \frac{3}{10}x$$
$$f(x) = -0{,}0075x^2 + 0{,}3x$$
$$f(x) = -0{,}0075 \cdot (x^2 - 40\text{x})$$
$$f(x) = -0{,}0075 \cdot ((x-20)^2 - 400)$$
$$f(x) = -0{,}0075 \cdot (x-20)^2 + 3$$

Der Scheitelpunkt liegt bei S (20 / 3). Die größte Höhe ist daher 3 m.

c)

$$f(10) = -0{,}0075 \cdot 10^2 + 0{,}3 \cdot 10 = 2{,}25$$

2,25 m – 1,75 m = 0,5 m

Es sind 50 cm Abstand.