Lösungen (Teil B)

Aufgabe 1

Gegeben ist die Funktion $f(x)=2x^2+6x-20$.

a)

$$2x^2+6x-20=0 \qquad |:2$$
$$x^2+3x-10=0$$
$$x=-1{,}5\pm\sqrt{2{,}25+10}$$
$$x=-1{,}5\pm3{,}5$$
$$x_1=-5 \qquad x_2=2$$

b)

S (0 / – 20)

c)

$$f(x)=2x^2+6x-20$$
$$f(x)=2\cdot[x^2-3x-10]$$
$$f(x)=2\cdot[(x-1{,}5)^2-10-2{,}25]$$
$$f(x)=2\cdot[(x-1{,}5)^2-12{,}25]$$
$$f(x)=2\cdot(x-1{,}5)^2-24{,}5$$
$$\Rightarrow S(1{,}5/-24{,}5)$$

d)

$$A(7/y)\, auf\, f \Rightarrow f(7)=y$$
$$y=2\cdot7^2+6\cdot7-20=120$$

e)

$$B(x/10)\, auf\, f \Rightarrow f(x)=10$$

$$2x^2+6x-20=10 \qquad |-10$$
$$2x^2+6x-30=0 \qquad |:2$$
$$x^2+3x-15=0$$
$$x=-1{,}5\pm\sqrt{2{,}25+15}$$
$$x=-1{,}5\pm\sqrt{17}{,}25$$
$$x_1=2{,}65 \qquad x_2=-5{,}65$$

$$Antwort: Es\, gibt\, zwei\, Werte, x_1=2{,}65\, und\, x_2=-5{,}65$$

f)

$$Wenn\, C\, auf\, f\, liegt, so\, müsste\, f(1)=1\, gelten.$$

$$2\cdot1^2+6\cdot1-20=1$$
$$2+6-20=1$$
$$Widerspruch \Rightarrow C\, nicht\, auf\, f$$

g)

$$2x^2+6x-20=14x-26 \qquad |-14x$$
$$2x^2-8x-20=-26 \qquad |+26$$
$$2x^2-8x+6=0 \qquad |:2$$
$$x^2-4x+3=0$$
$$x=2\pm\sqrt{4-3}$$
$$x=2\pm 1$$
$$x_1=1 \qquad x_2=3$$

$$\textit{Bestimmung } y-\textit{Werte}:$$
$$y=14\cdot 1-26=-12$$
$$y=14\cdot 3-26=16$$

$$\textit{Schnittpunkte}:$$
$$S_1(1/-12) \qquad S_2(3/16)$$

h)

$$2x^2+6x-20=x^2 \qquad |-x^2$$
$$x^2+6x-20=0$$
$$x=-3\pm\sqrt{9+20}$$
$$x=-3\pm\sqrt{29}$$
$$x_1=2{,}39 \qquad x_2=-8{,}39$$

$$\textit{Bestimmung } y-\textit{Wert}:$$
$$y=2{,}39^2=5{,}71$$
$$y=(-8{,}39)^2=70{,}39$$

$$\textit{Schnittpunkte}:$$
$$S_1(2{,}39/5{,}71) \qquad S_2(-8{,}39/70{,}39)$$

Aufgabe 2

Gegeben ist eine quadratische Funktion f. Ihr Scheitelpunkt ist S (1 / -2) und der Punkt A (2 / 1) liegt auf dem Graphen von f.

a)

$$\textit{Scheitelpunkt } S(1/-2) \Rightarrow f(x)=a\cdot(x-1)^2-2$$

$$A(2/1)\ \textit{liegt auf } f \Rightarrow f(2)=1$$
$$a\cdot(2-1)^2-2=1$$
$$a\cdot 1-2=1$$
$$a-2=1$$
$$a=3$$

$$f(x)=3\cdot(x-1)^2-2$$
$$f(x)=3\cdot(x^2-2x+1)-2$$
$$f(x)=3x^2-6x+3-2$$
$$f(x)=3x^2-6x+1$$

b)

$$3x^2-6x+1=0 \qquad |:3$$
$$x^2-2x+\frac{1}{3}=0$$
$$x=1\pm\sqrt{1-\frac{1}{3}}$$
$$x=1\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$x_1=1{,}82 \qquad x_2=0{,}18$$

c)

S (0 / 1)

d)

$$3x^2-6x+1=-6x+4 \qquad |+6x$$
$$3x^2+1=4 \qquad |-1$$
$$3x^2=3$$
$$x^2=1$$
$$x_1=1 \qquad x_2=-1$$

$$Bestimmung\ y-Wert:$$
$$y=-6\cdot 1+4=-2$$
$$y=-6\cdot -1+4=10$$

$$\Rightarrow S_1(1/-2)$$
$$S_2(-1/10)$$

e) (i)

$$f(3)=3\cdot 3^2-6\cdot 3+1=10$$
$$f(5)=3\cdot 5^2-6\cdot 5+1=46$$

(ii)

$$h(x)=mx+b$$
$$m=\frac{46-10}{5-3}=\frac{36}{2}=18$$
$$\Rightarrow h(x)=18x+b$$

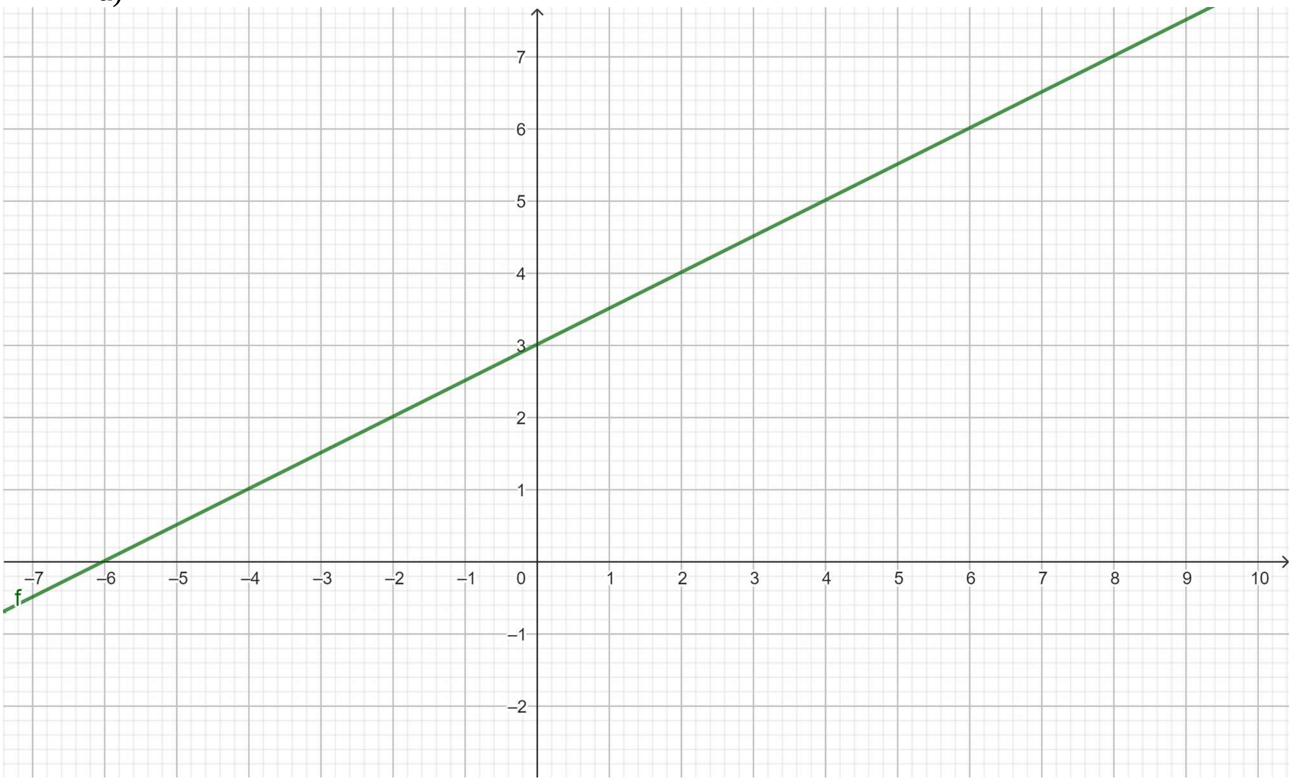
$$A(3/10)\ auf\ h \Rightarrow h(3)=10$$
$$18\cdot 3+b=10$$
$$54+b=10$$
$$b=-44$$

$$h(x)=18x-44$$

Aufgabe 3

Gegeben ist die lineare Funktion $f(x) = 0{,}5x + 3$.

a)



b)

$$0{,}5x + 3 = 0 \qquad |-3$$
$$0{,}5x = -3 \qquad |:0{,}5$$
$$x = -6$$

c)

S (0 / 3)

d)

$$0{,}5x + 3 = 2x - 4 \qquad |-2x$$
$$-1{,}5x + 3 = -4 \qquad |-3$$
$$-1{,}5x = -7 \qquad |:-1{,}5$$
$$x = \frac{14}{3}$$

$$\textit{Bestimmung } y-\textit{Wert}:$$
$$y = \frac{1}{2} \cdot \frac{14}{3} + 3 = \frac{7}{3} + 3 = \frac{7}{3} + \frac{9}{3} = \frac{16}{3}$$

$$\textit{Schnittpunkt}: S\left(\frac{14}{3} / \frac{16}{3}\right)$$

e) Da h parallel zu f ist, muss es dieselbe Steigung haben.

$$h(x)=0{,}5\,x+b$$

$$A(1/1)\,auf\,h \Rightarrow h(1)=1$$
$$0{,}5\cdot 1+b=1$$
$$0{,}5+b=1$$
$$b=0{,}5$$

$$h(x)=0{,}5\,x+0{,}5$$

Aufgabe 4

Gegeben sind drei Punkte, die auf dem Graphen liegen: A (1 / 3), B (3 / 7) und C (4 / 12)
Eine allgemeine Gleichung für eine quadratische Funktion sieht so aus: $f(x)=ax^2+bx+c$

$$Punkt\ A \Rightarrow f(1)=3$$
$$a+b+c=3$$
$$Punkt\ B \Rightarrow f(3)=7$$
$$9a+3b+c=7$$
$$Punkt\ C \Rightarrow f(4)=12$$
$$16a+4b+c=12$$

$$Gleichungssystem:$$
$$I.\ a+b+c=3$$
$$II.\ 9a+3b+c=7$$
$$III.\ 16a+4b+c=12$$

$$Umformen\ von\ I: c=3-a-b$$
$$Einsetzen:$$
$$II.\ 9a+3b+3-a-b=7$$
$$III.\ 16a+4b+3-a-b=12$$

$$II.\ 8a+2b=4$$
$$III.\ 15a+3b=9$$

$$Umformen\ von\ II: 2b=4-8a$$
$$b=2-4a$$
$$Einsetzen:$$
$$15a+3\cdot(2-4a)=9$$
$$15a+6-12a=9$$
$$3a=3$$
$$a=1$$

$$Bestimmung\ von\ b\ und\ c:$$
$$b=2-4\cdot 1=2-4=-2$$
$$c=3-1+2=4$$

$$f(x)=x^2-2x+4$$

Aufgabe 5

Gegeben ist die Wertetabelle einer linearen Funktion.

x	-1	0	1	2	5	8
f(x)	7	9	11	13	19	25

Wenn man oben einen Wert weitergeht, wird unten +2 addiert. Die Steigung dieser Funktion ist also 2. Der Funktionswert, der zu x=0 gehört ist 9. Dies ist der Achsenabschnitt. Daraus ergibt sich die Funktiongslgeichung $f(x)=2x+9$.

Nun füllen wir die Lücken:

$$f(2)=2\cdot 2+9=4+9=13$$
$$f(5)=2\cdot 5+9=10+9=19$$

$$\begin{aligned} f(x)&=25 \\ 2x+9&=25 \qquad |-9 \\ 2x&=16 \qquad |:2 \\ x&=8 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Gegeben ist eine quadratische Funktion der Gestalt $f(x)=ax^2+c$. Auf ihrem Graphen liegen die Punkte A (0 / 8) und B (3 / 24).

$$\begin{aligned} A(0/8)\, auf\, f \Rightarrow f(0)&=8 \\ a\cdot 0^2+c&=8 \\ c&=8 \\ \Rightarrow f(x)&=ax^2+8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(3/24)\, auf\, f \Rightarrow f(3)&=24 \\ a\cdot 3^2+8&=24 \\ 9a+8&=24 \qquad |-8 \\ 9a&=16 \qquad |:9 \\ a&=\frac{16}{9} \\ \Rightarrow f(x)&=\frac{16}{9}x^2+8 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Gegeben ist eine lineare Funktion f. Ihr Achsenabschnitt liegt bei y = 2. Die Gleichung hat also die Form $f(x)=mx+2$. Anschließend kann man ein Steigungsdreieck einzeichnen: 3 nach rechts und 1 nach oben. Die Steigung ist also 1/3.

Endergebnis: $f(x)=\frac{1}{3}x+2$

Aufgabe 8

Gegeben ist die Exponentialfunktion $f(x)=4\cdot 3^x$.

a)

$$f(0)=4\cdot 3^0=4\cdot 1=4$$
$$\Rightarrow S(0/4)$$

b)

$$f(2)=4\cdot 3^2=4\cdot 9=36 \quad \Rightarrow y=36$$

c)

$$4\cdot 3^x=18 \qquad |:4$$
$$3^x=4{,}5$$
$$x=\log_3(4{,}5)$$
$$x=1{,}37$$

d)

$$4\cdot 3^x=10\cdot 2^x \qquad |:4$$
$$3^x=2{,}5\cdot 2^x \qquad |:2^x$$
$$\frac{3^x}{2^x}=2{,}5$$
$$\left(\frac{3}{2}\right)^x=2{,}5$$
$$1{,}5^x=2{,}5$$
$$x=\log_{1{,}5}(2{,}5)=2{,}26$$

$$\textit{Bestimmung } y-\textit{Wert}:$$
$$f(2{,}26)=4\cdot 3^{2{,}26}=47{,}9$$

$$\Rightarrow S(2{,}26/47{,}9)$$

Aufgabe 9

Gegeben: Größe einer Bakterienkultur $f(x)=12\cdot 1{,}2^x$ beschrieben werden. Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 10 Uhr und f(x) gibt die Größe in cm² an.

a)

12 cm²

b)

20 %

c)

14:30 Uhr bedeutet x = 4,5

$$f(4{,}5)=12\cdot 1{,}2^{4{,}5}=27{,}26$$

Antwort: etwa 27,26 cm²

d)

9 Uhr bedeutet: x = – 1

$$f(-1)=12\cdot 1,2^{-1}=10$$

Antwort: 10 cm²

e)

$$f(x)=20$$
$$12\cdot 1,2^{x}=20 \qquad |:12$$
$$1,2^{x}=\frac{5}{3}$$
$$x=\log_{1,2}\left(\frac{5}{3}\right)=2,8$$

$$2,8h=2h+0,8h=2h+48min$$

Antwort: Die 20 cm² werden um 12:48 Uhr erreicht.

f)

$$12\cdot 1,2^{x}=24$$
$$1,2^{x}=2$$
$$x=\log_{1,2}(2)=3,8$$

Antwort: Es sind 3,8 Stunden.

g) (i)

15 Uhr entspricht x = 5

$$f(5)=12\cdot 1,2^{5}=29,86$$
$$nach\,dem\,Unfall: 19,86\,cm^2$$
$$neue\,Funktion: g(x)=19,86\cdot 1,2^{x}\left(x: Zeit\,ab\,15\,Uhr\right)$$
$$g(2)=19,86\cdot 1,2^{2}=28,60$$

Antwort: 28,6 cm²

(ii)

$$g(x)=29,86$$
$$19,86\cdot 1,2^{x}=29,86 \qquad |:19,86$$
$$1,2^{x}=1,5$$
$$x=\log_{1,2}(1,5)=2,22$$

$$2,22h=2h+0,22h=2h+13,2min$$

Antwort: Die Größe wird um 17:13 Uhr wieder erreicht.