Lösungen (Teil A)

Aufgabe 1

a) $5^0=1$

b) $9^{\frac{1}{2}}=\sqrt{9}=3$

c) $81^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{81^{\frac{1}{2}}}=\frac{1}{\sqrt{81}}=\frac{1}{9}$

d) $27^{\frac{2}{3}}=(\sqrt[3]{27})^2=3^2=9$

e) $\log_2(4)=2$, denn $2^2=4$

f) $\log_{10}(1000)=3$, denn $10^3=1000$

g) $\log_9(3)=\log_9(\sqrt{9})=\log_9(9^{\frac{1}{2}})=\frac{1}{2}$

h) $7^2=49$

i) $\log_2(-4)$ nicht lösbar (da in der Klammer eine negative Zahl steht)

j) $3^{-3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}$

k) $\log_a(a^4)=4$

l) $17^1=17$

m) $\log_{\sqrt{2}}(4)=\log_{\sqrt{2}}((\sqrt{2})^4)=4$

Aufgabe 2

a) Wir rechnen alle Ausdrücke aus:

Zahl 1: 8

Zahl 2: $2^0=1$

Zahl 3: $\log_2(16)=4$ denn $2^4=16$

Zahl 4: $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

Zahl 5 : 0

Daraus ergibt sich die folgende Reihenfolge:
Zahl 5 – Zahl 4 – Zahl 2 – Zahl 3 – Zahl 1

b) Wir rechnen alle Ausdrücke aus:

Zahl 1: $3^2=9$

Zahl 2: $3^{-1}=\frac{1}{3}$

Zahl 3: $\log_3(3)=1$ denn $3^1=3$

Zahl 4: $\sqrt[3]{27}=3$

Zahl 5: - 1

Daraus ergibt sich die folgende Reihenfolge:
Zahl 5 – Zahl 2 – Zahl 3 – Zahl 4 – Zahl 1

Aufgabe 3

a)

$$2x^2+4x-16=0 \qquad |:2$$
$$x^2+2x-8=0$$
$$x=-1\pm\sqrt{1+8}$$
$$x=-1\pm 3$$
$$x_1=-4 \qquad x_2=2$$

b)

$$x^2-6x+4=4 \qquad |-4$$
$$x^2-6x=0$$
$$x\cdot(x-6)=0$$
$$x=0 \quad oder \quad x-6=0$$
$$x_1=0 \qquad x_2=6$$

c)

$$8x+10=26 \qquad |-10$$
$$8x=16 \qquad |:8$$
$$x=2$$

d)

$$\log_2(32)=x$$
$$\log_2(32)=5 \qquad denn\, 2^5=32$$
$$\Rightarrow x=5$$

e)

$$\log_2(x)=2 \Leftrightarrow x=2^2=4$$

f)

$$\log_x(81)=2 \Leftrightarrow x^2=81$$
$$x=9$$

g)

$$x^3=64 \qquad |dritte\, Wurzel$$
$$x=4$$

h)

$$x^3=-64 \qquad |dritte\, Wurzel$$
$$x=-4$$

i)

$$x^2-10x=0$$
$$x\cdot(x-10)=0$$
$$x=0 \quad oder \quad x-10=0$$
$$x_1=0 \qquad x_2=10$$

j)

$$x^2-25=0 \qquad |+25$$
$$x^2=25 \qquad |Quadratwurzel$$
$$x_1=5 \qquad x_2=-5$$

k)

$$x^2-4x-12=0$$
$$x=2\pm\sqrt{4+12}$$
$$x=2\pm\sqrt{16}$$
$$x=2\pm 4$$
$$x_1=-2 \qquad x_2=6$$

l)

$$x^3-4x^2=0$$
$$x^2\cdot(x-4)=0$$
$$x^2=0 \quad oder \quad x-4=0$$
$$x_1=0 \qquad x_2=4$$

m)

$$2\cdot 3^x=18 \qquad |:2$$
$$3^x=9$$
$$x=\log_3(9)=2$$

n)

$$x\cdot 2^3=48$$
$$x\cdot 8=48 \qquad |:8$$
$$x=6$$

Aufgabe 4

Die Funktion $i(x)=2x+2$ ist eine lineare Funktion, ihr Graph muss einer Gerade sein. Von den vier Graphen ist nur der braune eine Gerade. Also gehören die Funktion i und der braune Graph zusammen.
Die Funktion $f(x)=x^2+2x+4$ ist eine quadratische Funktion, ihr Graph muss eine Parabel sein. Von den vier Graphen ist nur der orangene eine Parabel. Also gehören die Funktion f und der orangene Graph zusammen.
Die Funktionen $g(x)=2\cdot 1{,}5^x$ und $h(x)=2\cdot 0{,}8^x$ sind beides Exponentialfunktionen. Bei g ist der Wachstumsfaktor größer als 1, die Funktionswerte müssen nach rechts hin also wachsen. Bei h ist der Wachstumsfaktor zwischen 0 und 1, die Funktionswerte müssen nach rechts hin also schrumpfen. Nur der grüne Graph wächst nach rechts hin und zeigt den für eine Exponentialfunktion typischen Verlauf. Also gehören die Funktionen g und der grüne Graph zusammen. Am Ende müssen die Funktion h und der blaue Graph zusammengehören.

Aufgabe 5

Die Funktion $g(x)=2\cdot 1{,}6^x$ ist eine Exponentialfunktion mit einem Wachstumsfaktor größer als 1. Der Graph müsste sich also nach links hin der x-Achse annähern, dann durch den Punkt P(0/2) verlaufen und dann immer weiter steigen. Das ist beim roten Graphen der Fall. Die Funktion g und der rote Graph gehören zusammen.
Die Funktion $f(x)=x^3$ ist eine Potenzfunktion mit ungeradem Exponenten, der Graph müsste also links von der y-Achse immer weiter nach unten fallen und rechts von der y-Achse immer weiter nach oben wachsen. Diese Beschreibung passt auf den grünen Graphen. Die Funktion f und der grüne Graph gehören zusammen.
Die beiden Funktionen $h(x)=x^2+x+2$ und $i(x)=-x^2+x+2$ sind beides quadratische Funktionen, ihre Graphen sind Parabeln. Bei h ist der Faktor vor dem x^2 positiv (eine unsichtbare 1), der Graph müsste also nach oben geöffnet sein. Bei i ist der Faktor vor dem x^2 negativ (gleich -1), der Graph müsste also nach unten geöffnet sein. Der blaue und der orangene Graph sind beides Parabeln, aber der blaue ist nach oben geöffnet, der orangene nach unten. Also gehört Funktion h zum blauen Graphen und Funktion i zum orangenen Graphen.

Aufgabe 6

Die Funktionen $f(x)=2\cdot 1{,}5^x$ und $g(x)=1{,}5^x$ sind beides Exponentialfunktionen, die beide einen Wachstumsfaktor größer als 1 haben. Die Graphen müssten sich also nach links hin der x-Achse annähern und nach rechts hin immer stärker wachsen. Der Schnittpunkt mit der y-Achse ist bei der Funktion f der Punkt S (0 / 2) und bei der Funktion g der Punkt T (0/1). Der violette Graph verläuft durch den Punkt S, gehört also zur Funktion f. Der graue Graph verläuft durch den Punkt T, gehört also zur Funktion g.
Die beiden Funktionen $h(x)=0{,}2x^2+x$ und $i(x)=-x^2+2$ sind beides quadratische Funktionen, deren Graphen Parabeln sind. Allerdings hat h einen positiven Vorfaktor (nämlich 0,2), der entsprechende Graph muss also nach oben geöffnet sein. Die Funktion i hat einen negativen Vorfaktor (die -1), der Graph muss nach unten geöffnet sein. Der braune und grüne Graph sind beides Parabeln, aber der braune ist nach oben geöffnet, der grüne nach unten. Also gehört die Funktion h zum grauen Graphen, die Funktion i zum grünen Graphen.

Aufgabe 7

a)

x	-1	0	1	2
f(x)	8	10	12	14

Immer dann, wenn man oben einen Wert weitergeht, wird unten + 2 gerechnet. Deshalb handelt es sich um eine lineare Funktion mit der Steigung 2 (1 nach rechts und 2 nach oben). Der Funktionswert bei x = 0 ist f() = 10. Deshalb ist der y-Achsenabschnitt gleich 10.
Die Funktionsgleichung lautet daher $f(x)=2x+10$

b)

x	-1	0	1	2
f(x)	8	16	32	64

Immer dann, wenn man oben einen Wert weitergeht, wird unten mal 2 genommen. Deshalb handelt es sich um eine Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor 2. Der Funktionswert bei x = 0 ist f(0) = 16. Dies ist der Anfangswert.
Die Funktionsgleichung lautet daher $f(x)=16\cdot 2^x$

c)

x	-1	0	1	2
f(x)	80	20	5	1,25

Immer dann, wenn man oben einen Wert weitergeht, wird unten mal 0,25 (bzw. durch 4) gerechnet. Deshalb handelt es sich um eine Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor 0,25. Der Funktionswert bei x = 0 ist f(0) = 20. Dies ist der Anfangswert.
Die Funktionsgleichung lautet daher $f(x)=20\cdot 0{,}25^x$

d)

x	1	2	3	4
f(x)	8	80	800	8000

Wenn man oben einen Wert weitergeht, wird unten mal 10 gerechnet. Deshalb handelt es sich um eine Exponentialfunktion mit dem Wachstumsfaktor 10. Der Funktionswert bei x = 0 fehlt zunächst. Diesen kann man aber ermitteln, wenn man mit durch 10 von rechts nach links weiterrechnet, aber 8 durch 10 ergibt 0,8. Dies ist der Anfangswert.
Die Funktionsgleichung lautet daher $f(x)=0{,}8\cdot 10^x$

Aufgabe 8

a) $\log_2(9)+\log_2(3)=\log_2(9\cdot3)=\log_2(27)$

b) $[2\cdot\log_2(7)]+\log_2(3)=\log_2(7^2)+\log_2(3)=\log_2(49)+\log_2(3)=\log_2(49\cdot3)=\log_2(147)$

c) $7^2\cdot7^3=7^{2+3}=7^5$

d) $[3^2]^3\cdot3^4=3^{2\cdot3}\cdot3^4=3^6\cdot3^4=3^{6+4}=3^{10}$

e) $2\cdot[\log_2(50)-\log_2(10)]=2\cdot\log_2(50:10)=2\cdot\log_2(5)=\log_2(5^2)=\log_2(25)$

f) $-1\cdot\log_2(9)=\log_2(9^{-1})=\log_2(\frac{1}{9})$

g) $(2^3\cdot2^2)^2=(2^{3+2})^2=(2^5)^2=2^{5\cdot2}=2^{10}$

Aufgabe 9

Die Funktionen sind alles Potenzfunktionen. Potenzfunktionen mit einem ungeraden Exponenten verlaufen links von der y-Achse immer weiter im negativen Bereich. Dies ist beim Graphen nicht vorhanden. Also kann der Graph nicht zur Funktion g gehören (ungerader Exponent 3).
Für die beiden anderenf(Funktionen gilt: f(2) = 2^2 = 4 und h(2) = 16. Wenn der Graph derjenige von f wäre, müsste der Punkt P(2/4) auf dem Graphen sein. Dies ist aber nicht der Fall. Es kann sich daher auch nicht um die Funktion f handeln.
Daher muss der Graph zur Funktion h gehören.

Aufgabe 10

x	0	1	2	4	
f(x)	20	40	80		1280

Wenn man oben einen Wert weitergeht, so wird unten mit 2 multipliziert. Es handelt sich also um eine Exponentialfunktion mit Wachstumsfaktor 2. Der Funktionswert bei x=0 beträgt 20. Dies ist der Anfangswert. Die Gleichung lautet $f(x)=20\cdot2^x$

Nun rechnen wir den Funktionswert bei x = 4 aus:
$f(4)=20\cdot2^4=20\cdot16=320$

Nun bestimmen wir den x-Wert von y=1280:
$20\cdot2^x=1280 \quad |:20$
$2^x=64$
$x=6$

Aufgabe 11

Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^2-6x+8$.

a) Nullstellen

$$x^2-6x+8=0$$
$$x=3\pm\sqrt{9-8}$$
$$x=3\pm 1$$
$$x_1=4 \qquad x_2=2$$

b) Bestimme den Scheitelpunkt von f.

$$f(x)=x^2-6x+8$$
$$f(x)=(x-3)^2+8-9$$
$$f(x)=(x-3)^2-1$$
$$\Rightarrow S(3/-1)$$

c) Gib die Koordinaten des Schnittpunktes von f mit der y-Achse an.

f(0) = 8. Also: S_y (0/8)

Aufgabe 12

a)

$I.\ 3x+y=7$
$II.\ 2x+3y=7$

Umformen von I: $y=7-3x$
Einsetzen:

$2x+3\cdot(7-3x)=7$
$2x+21-9x=7$
$-7x+21=7 \qquad |-21$
$-7x=-14 \qquad |:(-7)$
$x=2$

Bestimmung von y:
$y=7-3\cdot 2=1$

b)

$I.\ 2x+5y=28$
$II.\ -2x+3y=4 \qquad I+II$

neue Gleichung:
$8y=32 \qquad |:8$
$y=4$

Bestimmung von x:
$2x+5\cdot 4=28$
$2x+20=28 \qquad |-20$
$2x=8 \qquad |:2$
$x=2$

c)

$I.\ 4x-3y=-5$
$II.\ 2x+y=5$

Umformen von II: $y=5-2x$
Einsetzen:

$4x-3\cdot(5-2x)=-5$
$4x-15+6x=-5$
$10x-15=-5 \qquad |+15$
$10x=10 \qquad |:10$
$x=1$

Bestimmung von y:
$y=5-2\cdot 1=3$

Aufgabe 13

Wir definieren: x als Preis von Produkt A und y als Preis von Produkt B

Damit ergeben sich zwei Gleichungen:

I. $x + 2y = 5$
II. $2x + y = 4$

Damit haben wir ein lineares Gleichungssystem, das wir nun lösen:

$$\mathit{Umformen\,von\,I}: x=5-2y$$
$$\mathit{Einsetzen}:$$

$$\begin{aligned}
&2\cdot(5-2y)+y=4 \\
&10-4y+y=4 \\
&10-3y=4 && |-10 \\
&-3y=-6 && |:(-3) \\
&y=2
\end{aligned}$$

$$\mathit{Bestimmung\,von\,x}:$$
$$x=5-4=1$$

Antwort: Ein Exemplar von Produkt A kostet 1 Euro, ein Exemplar von B kostet 2 Euro.