Aufgaben (Teil B)

Aufgabe 1

Der Verlauf des Tiexonas-Flusses kann beschrieben werden mit der Funktion $f(x) = 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$ mit $-5 \le x \le 2$. Dabei steht eine Längeneinheit für 100 m.

Die x-Achse stellt eine von West nach Ost verlaufende Straße (Autobahn 1) und die y-Achse eine von Süd nach Nord verlaufende Straße (Autobahn 2) dar.

a) Berechne die Koordinaten aller Punkte, wo die Straßen den Tiexonas überqueren.

b) Bestimme rechnerisch die Koordinaten des am weitesten südlich und die Koordinaten des am weitesten nördlich gelegenen Punktes des Flusslaufs.

c) Bestimme rechnerisch den Bereich, in dem sich der Flusslauf nach rechts krümmt.

d) Bestimme rechnerisch die Größe der Fläche zwischen dem Fluss und den beiden Straßen.

e) Gegeben sind die Geraden g mit y = 1 und h mit y = a mit $1 \leqslant a \leqslant 2$ (die jeweils parallel zur y-Achse verlaufen)

Die Geraden g, h, der Fluss und Autobahn 1 schließen eine Fläche ein.

Bestimme rechnerisch den Wert von a, für den diese Fläche eine Größe von 1 ha hat.

f) Vom Punkt A (−3 / f(−3)) aus führt ein Wasserkanal Wasser aus dem Tiexonas nach Nordosten. Der Kanal kann mit Hilfe der Tangente an f durch den Punkt A beschrieben werden.

(I) Bestimme eine Gleichung, die den Verlauf des Kanals beschreibt

(II) Gib die Koordinaten des Punktes an, wo Autobahn 2 den Kanal überquert

(III) Der Wasserkanal und der Fluss schließen eine Fläche ein.
Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt dieser Fläche.

Aufgabe 2

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von g in der Anlage.
Die Graphen von f und g begrenzen für $1 \leq x \leq 3$ einen See. Der Graph von f bildet modellhaft die nördliche und die zu g gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.
Die x-Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.
[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.]

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1|0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und g ist. Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

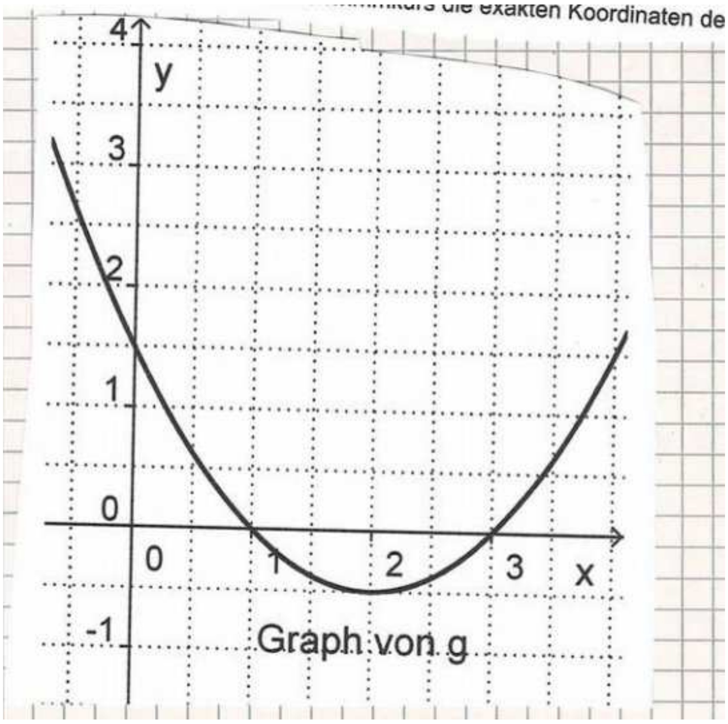
c) Bestimmen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte. Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in der Anlage ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern.

e) Berechnen Sie die Größe der Seefläche.

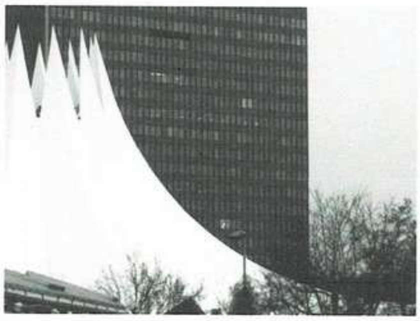
f) Im Punkt $P(3|0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft.
Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.

…kurs die exakten Koordinaten de



Aufgabe 3

Aufgabe 1.2: Dachformen



Auf dem Foto sehen Sie einen Teil des Daches eines Berliner Veranstaltungsortes.
Das Dach ist aus mehreren gleichartigen Dachelementen zusammengesetzt.
Für ein anderes Gebäude wird ein ähnliches Dach geplant. Die äußere Kante des geplanten Dachelementes lässt sich im Intervall $[0;2]$ annähernd durch die Funktion f mit $f(x)=(x^2-2x+1)\cdot e^{-x}$ beschreiben, $1\,\text{LE}=10\text{ m}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.
Ermitteln Sie Art und Lage aller Extrempunkte des Graphen von f.
[Zur Kontrolle: $f'(x)=(-x^2+4x-3)\cdot e^{-x}$]

b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im oben angegebenen Intervall.

c) Im Intervall $[0;2]$ gibt es eine Stelle x_P, an der der Graph von f die maximale positive Steigung hat.
Bestimmen Sie den Wert von x_P und die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle.
Hinweis: Es genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.

d) Für eine Veranstaltung soll unter einem Dachelement eine Trennwand errichtet werden. Diese Trennwand wird im Intervall $[0;1]$ durch den Funktionsgraphen und die x-Achse begrenzt.
Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x)=(-x^2-1)\cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Trennwand, $1\,\text{LE}=10\text{ m}$.

e) Es wird vorgeschlagen, statt der Trennwand eine kleinere Wand zu verwenden, die begrenzt ist durch die Koordinatenachsen und die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R(0\,|\,1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Tangente.
Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Wandfläche durch den Vorschlag eingespart werden.

f) Der Graph einer quadratischen Funktion p soll in den Punkten $R(0|1)$ und $S(1|0)$ tangential zum Graphen von f verlaufen.
Geben Sie vier Bedingungen an, die p erfüllen muss und untersuchen Sie, ob es eine solche Funktion p gibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	11	3	5	5	9	7	40

Aufgabe 4

Wassergraben

Abbildung 1 zeigt den Querschnitt eines Wassergrabens mit seinen Uferlinien. Seine Böschung verläuft auf einer Seite sanft (knickfrei) von einer horizontal verlaufenden Uferlinie ($Ufer_1$) nach unten, auf der anderen Seite mit einem scharfen Knick zur Uferlinie ($Ufer_2$).
Das Koordinatensystem wurde so gelegt, dass sich der Querschnitt des Grabens zwischen den x-Werten -4 und 2 durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben lässt, die in $T(0|0)$ ihren Tief- und in $H(-4|3,2)$ ihren Hochpunkt hat.
Eine Einheit auf jeder Achse entspricht jeweils 1 m.

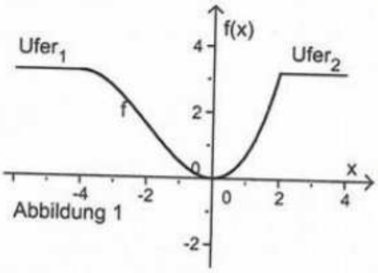


Abbildung 1

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

In Abbildung 2 blickt man aus der entgegen gesetzten Richtung auf den Querschnitt. Zwischen den x-Werten -2 und 4 beschreibt die Funktion h mit $h(x) = -0{,}1 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2$ für das hier gewählte Koordinatensystem ebenfalls den Querschnitt des Grabens ohne die Uferlinien.
Eine Einheit auf jeder Achse entspricht wie in a) jeweils 1 m.

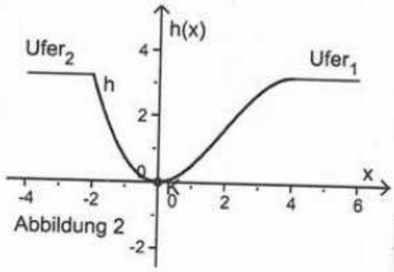


Abbildung 2

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

In Abbildung 2 blickt man aus der entgegen gesetzten Richtung auf den Querschnitt. Zwischen den x-Werten -2 und 4 beschreibt die Funktion h mit $h(x) = -0{,}1 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2$ für das hier gewählte Koordinatensystem ebenfalls den Querschnitt des Grabens ohne die Uferlinien.
Eine Einheit auf jeder Achse entspricht wie in a) jeweils 1 m.

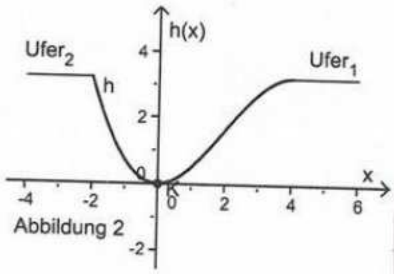


Abbildung 2

b) Skizzieren Sie, ausgehend vom Graphen von h, den Graphen der Ableitungsfunktion h' in ein neues Koordinatensystem.
Begründen Sie den Verlauf des Graphen von h' aus dem Verlauf des Graphen von h.

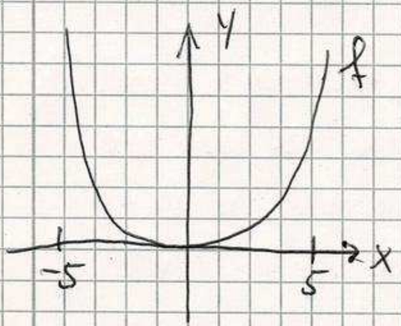
c) Ein Käfer befindet sich im Punkt $K(0/0)$. Er möchte aus dem Graben hinauskrabbeln. Er schafft höchstens eine Steigung von $1{,}5 = 150\%$. Kann er aus dem Graben zum $Ufer_1$ gelangen? Begründen Sie Ihre Antwort.

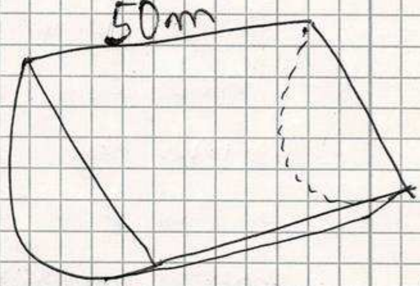
Aufgabe 5

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge von 50 m gleich und kann beschrieben werden mit der Funktion

$f(x) = \frac{1}{125} x^4$ mit $-5 \leq x \leq 5$.

Eine Längeneinheit entspricht 1 m.





a) Bestimme rechnerisch die Tiefe des Laderaums in der Mitte

b) Bestimme rechnerisch die Breite des Laderaums in 3 m Höhe

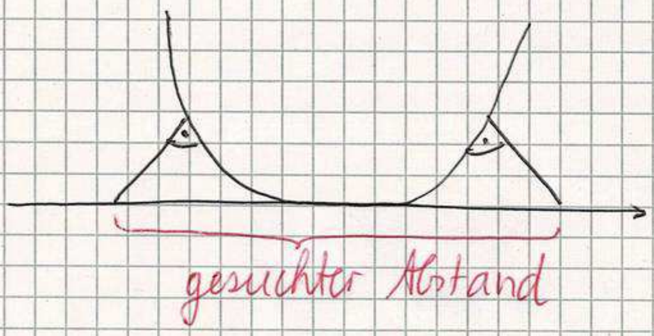
c) Berechne das Volumen des Laderaums

d) Bestimme rechnerisch den Bereich, in dem der Boden des Laderaums eine Neigung von weniger als 3° hat.

e) Zur Wartung steht der Lastkahn an Land auf einer ebenen Plattform.

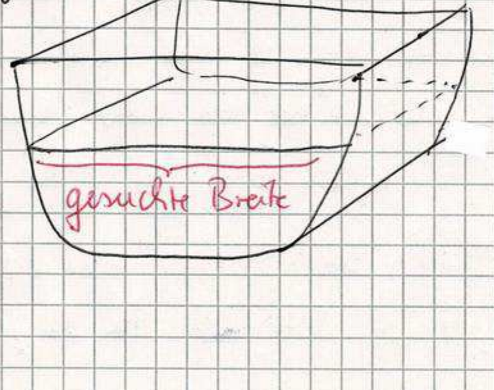
Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte an der Außenwand $P_1(-4 / f(-4))$ und $P_2(4 / f(4))$ sind.

Bestimme rechnerisch den Abstand, mit dem die Stützen auf der Plattform enden



f) Der Laderaum kann durch eine horizontale Zwischendecke der Länge 50 m in zwei Teilräume geteilt werden. Das Volumen des unteren Teilraums beträgt 500 m^3.

Berechne die Breite der Zwischendecke.



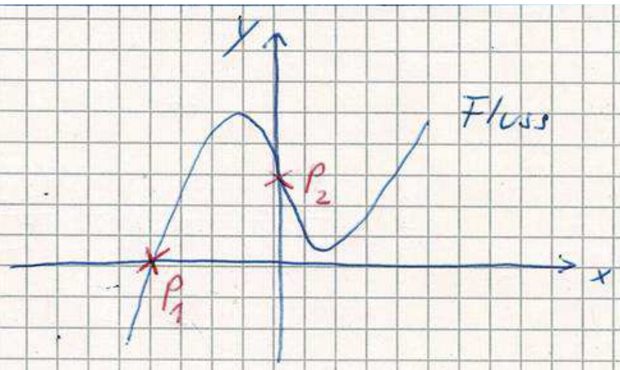
Aufgabe 6

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(4x^2+10x+11)\cdot e^{2x}$. Ihre Stammfunktion ist von der Gestalt $F(x)=(ax^2+bx+c)\cdot e^{2x}$. Bestimme rechnerisch a, b und c.

Lösungen (Teil B)

Aufgabe 1

1a)



Achsenabschnitt:

$f(0) = 2$

$\Rightarrow P_2\ (0/2)$

Autobahn 2 überquert den Fluss im Punkt $P_2\ (0/2)$

Nullstellen:

$f(x) = 0$

$1{,}2\,x^3 + 4\,x^2 - 5x + 2 = 0$

GTR...

$x = -4{,}37$

$\Rightarrow P_1\ (-4{,}37\ /\ 0)$

Autobahn 1 überquert den Fluss im Punkt $P_1\ (-4{,}37\ /\ 0)$

b) $f(x) = 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2$
$f'(x) = 3{,}6x^2 + 8x - 5$
$f''(x) = 7{,}2x + 8$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$
$3{,}6x^2 + 8x - 5 = 0$
GTR...
$x_1 = -2{,}73$
$x_2 = 0{,}51$

Hinr. Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f''(-2{,}73) = -11{,}656$ HP
$f''(0{,}51) = 11{,}672$ TP

y-Werte und Ränder:
$f(-5) = -23$
$f(-2{,}73) = 21{,}05$
$f(0{,}51) = 0{,}65$
$f(2) = 17{,}6$

$\Rightarrow$ nördlichste Stelle $P_1(-2{,}73 / 21{,}05)$
südlichste Stelle $P_2(-5 / -23)$

c) Krümmung nach rechts $\Leftrightarrow f''(x) < 0$
$f''(x) = 7{,}2x + 8$
Nullstelle von f'':

$f''(x) = 0$

$7{,}2\,x + 8 = 0$

$7{,}2\,x = -8$

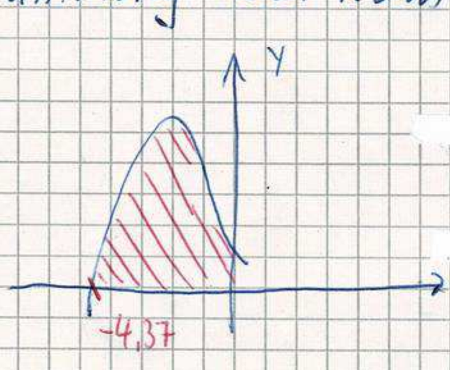
$x = -1{,}11$

$f''(-2) = -6{,}4$ (also f'' negativ links von $x = -1{,}11$)

$f''(0) = 8$ (also f'' positiv rechts von $x = -1{,}11$

$\Rightarrow$ Krümmung nach rechts für $-5 < x < -1{,}11$

d)



$$A = \int_{-4{,}37}^{0} f(x)\,dx$$

$$= \int_{-4{,}37}^{0} 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2\;dx$$

$$= \left[0{,}3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x\right]_{-4{,}37}^{0}$$

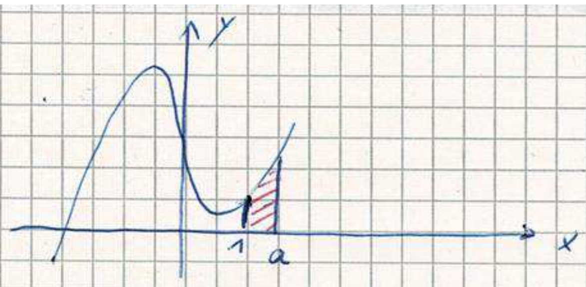
GTR...

$\approx 58{,}35$ FE

1 FE = 1 Hektar (100 m x 100 m)

$\Rightarrow A = 58{,}35$ ha

e)



$$A = \int_1^a 1{,}2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 \, dx$$

$$= \left[0{,}3x^4 + \frac{4}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 2x \right]_1^a$$

$$= 0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \left(0{,}3 + \frac{4}{3} - \frac{5}{2} + 2\right)$$

$$= 0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \frac{17}{15}$$

$$0{,}3a^4 + \frac{4}{3}a^3 - \frac{5}{2}a^2 + 2a - \frac{17}{15} = 1$$

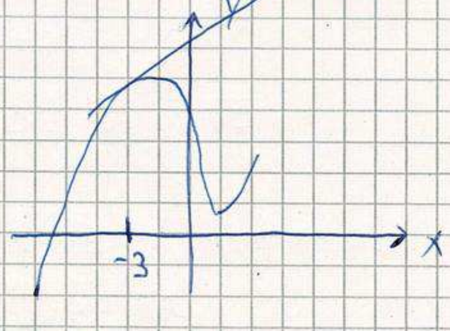
GTR...

$a_1 \approx -6{,}04$ (außerhalb Def. bereich)

$a_2 \approx 1{,}29$

$\Rightarrow a \approx 1{,}29$

f) ①



$f(-3) = 20,6 \Rightarrow A(-3/20,6)$

$f'(x) = 3,6x^2 + 8x - 5$

$f'(-3) = 3,4$

$\Rightarrow t(x) = 3,4x + b$

$A(-3/20,6)$ auf $t \Rightarrow t(-3) = 20,6$

$3,4 \cdot (-3) + b = 20,6$

$-10,2 + b = 20,6$

$b = 30,8$

$\Rightarrow t(x) = 3,4x + 30,8$

(II) Achsenabschnitt: 30,8

$\Rightarrow P(0/30,8)$

(III) Schnittpunkte:

$f(x) = t(x)$

$1,2x^3 + 4x^2 - 5x + 2 = 3,4x + 30,8$

GTR...

$x_1 = -3$

$x_2 = 2,\overline{6} = \frac{8}{3}$

$$A = \int_{-3}^{8/3} t(x) - f(x)\,dx = \int_{-3}^{8/3} 3,4x + 30,8 - (1,2x^3 + 4x^2 - 5x + 2)\,dx$$

$$= \int_{-3}^{8/3} 3,4x + 30,8 - 1,2x^3 - 4x^2 + 5x - 2\,dx$$

$$= \int_{-3}^{8/3} -1{,}2x^3 - 4x^2 + 8{,}4x + 28{,}8 \, dx$$

$$= \left[-0{,}3x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 4{,}2x^2 + 28{,}8x \right]_{-3}^{8/3}$$

GTR ...

$\approx 103{,}11$ FE

$= 103{,}11$ ha

Aufgabe 2

a) Scheitelpunkt $S(2 \mid -0{,}5)$

weiterer Punkt des Graphen $A(1/0)$

$$g(x) = a \cdot (x-2)^2 - 0{,}5$$

$A(1/0)$ auf $g \Rightarrow g(1) = 0$

$$a(1-2)^2 - 0{,}5 = 0$$
$$a \cdot 1 - 0{,}5 = 0$$
$$a - 0{,}5 = 0$$
$$a = 0{,}5$$

$$\Rightarrow g(x) = 0{,}5 \cdot (x-2)^2 - 0{,}5$$
$$= 0{,}5 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 0{,}5$$
$$= 0{,}5x^2 - 2x + 2 - 0{,}5$$
$$= 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$$

b) ① zu zeigen: $S(1/0)$ gemeinsamer Punkt

$f(1) = -1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1 + 4 - 3 = 0$

$g(1) = 0{,}5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1{,}5 = 0{,}5 - 2 + 1{,}5 = 0$

$\Rightarrow$ Behauptung

② restliche gemeinsame Punkte:

$f(x) = g(x)$

$-x^3 + 4x^2 - 3x = 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$

GTR...

$x_1 = -0{,}5$

$x_2 = 1$

$x_3 = 3$

y-Werte: $f(-0{,}5) = -(-0{,}5)^3 + 4 \cdot (-0{,}5)^2 - 3 \cdot (-0{,}5)$

$= 2{,}625$

$f(1) = 0$

$f(3) = -3^3 + 4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3$

$= 0$

$\Rightarrow S_1(-0{,}5/2{,}625)$

$S_2(1/0)$

$S_3(3/0)$

c) ① lokale Extrempunkte

$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$
$f'(x) = -3x^2 + 8x - 3$
$f''(x) = -6x + 8$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$-3x^2 + 8x - 3 = 0 \quad | : (-3)$

$x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0$

$x = \frac{8}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{6}\right)^2 - 1}$

$x_1 = 2,22$
$x_2 = 0,45$

Hinreichende Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

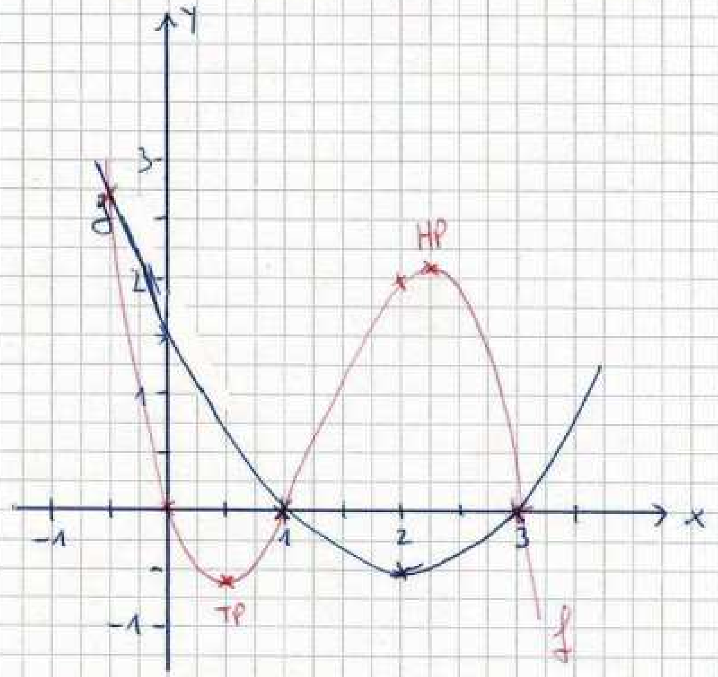
$f''(2,22) = -6 \cdot 2,22 + 8 = -5,32$ HP
$f''(0,45) = -6 \cdot 0,45 + 8 = 5,3$ TP

y-Werte:

$f(2,22) = 2,11$
$f(0,45) = -0,63$

$\Rightarrow$ HP $(2,22 \mid 2,11)$
TP $(0,45 \mid -0,63)$

② Zeichnung



$f(0)=0$

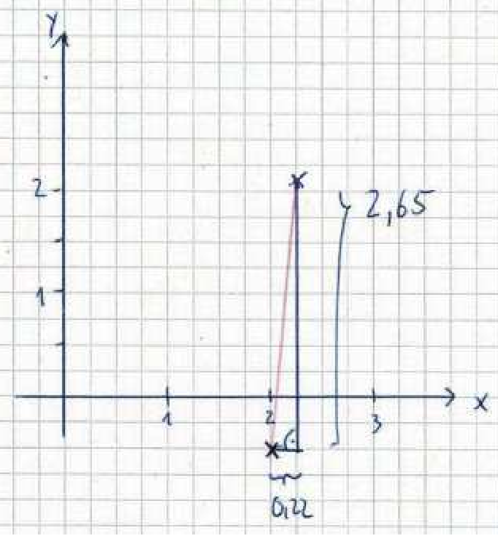
$f(0{,}5)=-0{,}625$

$f(1)=0$ $\quad f(1{,}5)=1{,}125$

$f(2)=2$

d) nördlichster Punkt: HP von f $\quad HP(2{,}22/2{,}11)$

südlichster Punkt: Scheitelpunkt von g
$S(2|-0{,}5)$



Satz des Pythagoras:

$$\text{Abstand}^2 = 2{,}65^2 + 0{,}22^2$$
$$\text{Abstand}^2 = 7{,}0709 \quad |\sqrt{\ }$$
$$\text{Abstand} = 2{,}6591\ldots\ km$$
$$= 2659{,}1\ m$$

$\Rightarrow$ Abstand $2659{,}1\ m$

e) $A = \int_1^3 f(x) - g(x)\,dx$

$$= \int_1^3 -x^3 + 4x^2 - 3x - (0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5)\,dx$$

$$= \int_1^3 -x^3 + 4x^2 - 3x - 0{,}5x^2 + 2x - 1{,}5\,dx$$

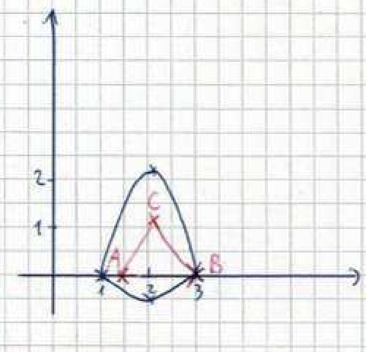
$$= \int_1^3 -x^3 + 3{,}5x^2 - x - 1{,}5\,dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3{,}5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1{,}5x\right]_1^3$$

$$= -\frac{1}{4}\cdot 3^4 + \frac{3{,}5}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 - 1{,}5\cdot 3 - \left(-\frac{1}{4}\cdot 1^4 + \frac{3{,}5}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1{,}5\cdot 1\right)$$

$$= 3{,}33\ km^2$$

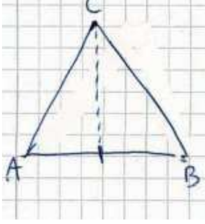
f)



gleichseitiges Dreieck: alle Seiten gleich lang

Umfang insgesamt 5 km

$\Rightarrow$ eine Seite ist $5/3$ km lang



B (3|0)

$5/3$ km nach Westen: $3 - \frac{5}{3} = \frac{15}{3} - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

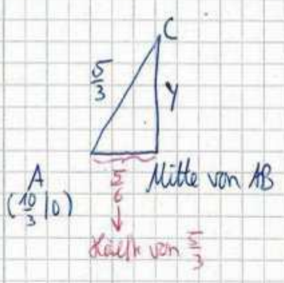
A $\left(\frac{10}{3}\middle|0\right)$

In einem gleichseitigen Dreieck muss C auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ liegen

$\Rightarrow C\left(\frac{25}{6} \,\middle|\, y\right)$

Mitte zwischen $\frac{10}{3}$ und 3

bzw. $\frac{10}{3}$ und $\frac{15}{3}$: $\frac{12{,}5}{3} = \frac{25}{6}$



$$y^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$y^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$y^2 = 2{,}08\overline{3} \qquad | \sqrt{}$$

$$y = 1{,}44$$

$\Rightarrow C\left(\frac{25}{6} \,\middle|\, 1{,}44\right)$

Aufgabe 3

a) Schnittpunkte mit den Achsen

y-Achse: $f(0) = (0^2 - 2 \cdot 0 + 1) \cdot e^{-0}$

$= 1 \cdot e^0$

$= 1$

$\Rightarrow S_y(0/1)$

x-Achse: $(x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x} = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ oder $e^{-x} = 0$

$\lightning$

$x = 1 \pm \sqrt{1-1}$

$x = 1$

$\Rightarrow N(1/0)$

Extrempunkte

$f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x}$

$f'(x) = (2x - 2) \cdot e^{-x} + (x^2 - 2x + 1) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$

$= (2x - 2) \cdot e^{-x} + (-x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x}$

$= (-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x}$

$f''(x) = (-2x + 4) \cdot e^{-x} + (-x^2 + 4x - 3) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$

$= (-2x + 4) \cdot e^{-x} + (x^2 - 4x + 3) \cdot e^{-x}$

$= (x^2 - 6x + 7) \cdot e^{-x}$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$(-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x} = 0$

$-x^2+4x-3=0$ oder $e^{-x}=0$

$\lightning$

$x^2-4x+3=0$

$x=2\pm\sqrt{4-3}$

$x=2\pm\sqrt{1}$

$x_1=1$

$x_2=3$

Hinr. Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$f''(1)=(1-6+7)\cdot e^{-1}=2e^{-1}>0$ TP

$f''(3)=(9-18+7)\cdot e^{-3}=-2\cdot e^{-3}<0$ HP

y-Werte:

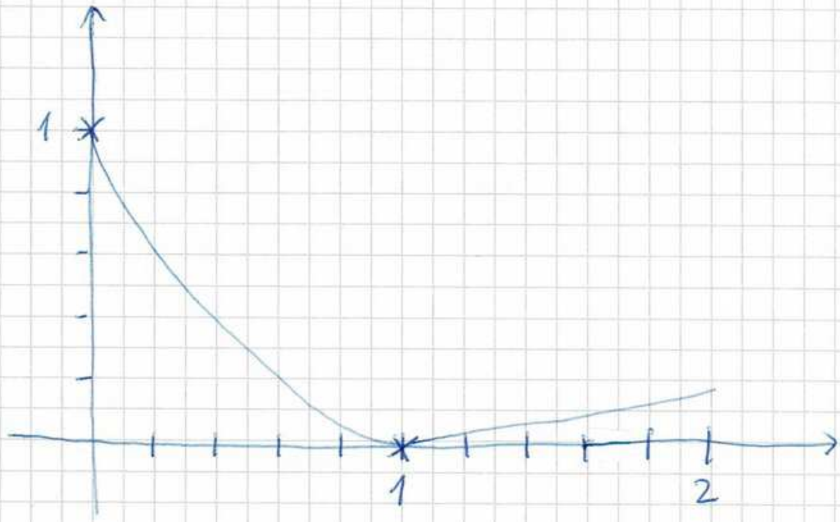
$f(1)=(1-2+1)\cdot e^{-1}=0$

$f(3)=(9-6+1)\cdot e^{-3}=4e^{-3}$

$\Rightarrow$ TP$(1|0)$

HP$(3|4e^{-3})$

b)



c) gesucht: maximale positive Steigung von f
$\Leftrightarrow$ Maximum von f'
(Wendestelle oder Randwert)

Notw. Bed.: $f''(x) = 0$

$(x^2 - 6x + 7) \cdot e^{-x} = 0$

$x^2 - 6x + 7 = 0$ oder $e^{-x} = 0$

$x = 3 \pm \sqrt{9-7}$ $\quad$ $\lightning$

($x_1 = 3 + \sqrt{2}$ außerhalb Def. bereich)

$x_2 = 3 - \sqrt{2}$

Hinr. Bed.: (laut Aufgabenstellung nicht notwendig)

$f'(0) = (-0^2 + 4 \cdot 0 - 3) \cdot e^0 = -3 < 0$

$f'(3-\sqrt{2}) \approx f'(1{,}59)$
$= (-1{,}59^2 + 4 \cdot 1{,}59 - 3) \cdot e^{-1{,}59}$
$= 0{,}8319 \cdot e^{-1{,}59} = 0{,}1696$
$\approx 0{,}17$

$f'(2) = (4 - 12 + 7) \cdot e^{-2}$
$= -1 \cdot e^{-2} < 0$

$\Rightarrow x \approx 1{,}59$ mit $f'(x) \approx 0{,}17$

d) $F'(x) = (-2x) \cdot e^{-x} + (-x^2 - 1) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$
$= -2x \cdot e^{-x} + (x^2 + 1) \cdot e^{-x}$
$= (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x} = f(x)$

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2-2x+1)\cdot e^{-x}\,dx$$

$$= \left[(-x^2-1)\cdot e^{-x}\right]_0^1$$

$$= (-1-1)\cdot e^{-1} - (0-1)\cdot e^{0}$$

$$= -2e^{-1} + 1$$

$$= 1-2e^{-1}$$

$$\approx 0{,}2642 \text{ FE}$$

$$= 26{,}42 \text{ m}^2$$

10m

10m $\boxed{1FE}$ 1FE = 10m · 10m

e) $f'(0) = -3$

$\Rightarrow t(x) = -3x + b$

$R(0|1)$ auf $t \Rightarrow t(0) = 1$

$-3\cdot 0 + b = 1$

$b = 1$

$\Rightarrow t(x) = -3x + 1$

Schnittpunkte von t mit den Koordinatenachsen:

y-Achse

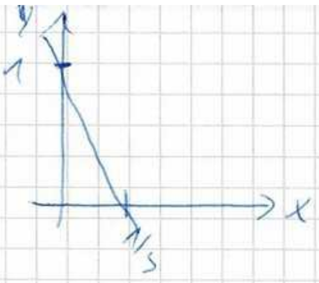
$S_Y(0|1)$

x-Achse

$-3x+1=0$

$1=3x$

$1/3 = x$



$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ FE

$= 16{,}67\ m^2$

Einsparung: $26{,}42\ m^2 - 16{,}67\ m^2 = 9{,}75\ m^2$

$\Rightarrow$ Einsparung $9{,}75\ m^2$

f) gesucht: $p(x) = ax^2 + bx + c \qquad p'(x) = 2ax + b$

$R(0|1)$ auf $p \Rightarrow c = 1$

p tangential zu f bei R $\Rightarrow p'(0) = f'(0) = -3$

$\Rightarrow b = -3$

$S(1|0)$ auf $p \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$

$a + b + c = 0$

$a - 3 + 1 = 0$

$a - 2 = 0$

$a = 2$

p tangential zu f bei S $\Rightarrow p'(1) = f'(1) = 0$

$\Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0$

$2a - 3 = 0$

$2a = 3$

$a = 1{,}5$ ↯

NR: $f'(1) = (-1+4-3) \cdot e$
$= 0$

$\Rightarrow$ Es gibt die gesuchte Funktion p nicht

Aufgabe 4

4a) $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

HP $(-4 \mid 3{,}2)$ $\Rightarrow$ $f(-4) = 3{,}2$ $\Rightarrow$ $-64a + 16b - 4c + d = 3{,}2$

$f'(-4) = 0$ $\Rightarrow$ $48a - 8b + c = 0$

TP $(0 \mid 0)$ $\Rightarrow$ $f(0) = 0$ $\Rightarrow$ $d = 0$

$f'(0) = 0$ $\Rightarrow$ $c = 0$

$\Rightarrow$ I. $-64a + 16b = 3{,}2$

II. $48a - 8b = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -64 & 16 & 3{,}2 \\ 48 & -8 & 0 \end{array}\right)$$

GTR...

$a = 0{,}1$

$b = 0{,}6$

$\Rightarrow f(x) = 0{,}1x^3 + 0{,}6x^2$

Kontrolle der H.B.:

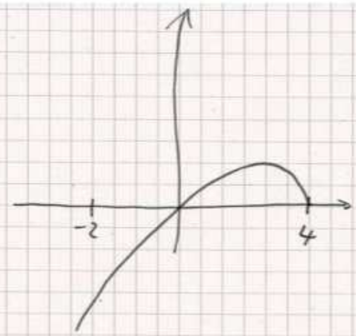
$f'(x) = 0{,}3x^2 + 1{,}2x$

$f''(x) = 0{,}6x + 1{,}2$

$f''(-4) = 0{,}6 \cdot (-4) + 1{,}2 = -1{,}2$ $\Rightarrow$ HP

$f''(0) = 1{,}2$ $\Rightarrow$ TP ✓

b)



h ist streng mo. fallend für $-2 < x < 0$

$\Rightarrow h'$ negativ

h ist streng mo. wachsend für $0 < x < 4$

$\Rightarrow h'$ positiv

c) Die größte Steigung liegt beim Wendepunkt vor.

$f(x) = -0{,}1x^3 + 0{,}6x^2$

$f'(x) = -0{,}3x^2 + 1{,}2x$

$f''(x) = -0{,}6x + 1{,}2$

$f'''(x) = -0{,}6$

N.B.: $f''(x) = 0$

$-0{,}6x + 1{,}2 = 0$

$\Rightarrow x = 2$

H.B.: $f''(x) = 0 \land f'''(x) \neq 0$

$f'''(2) = -0{,}6 < 0 \Rightarrow$ HP bei f'

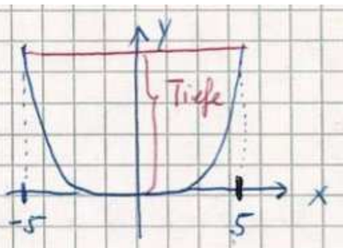
Steigung: $f'(2) = -0{,}3 \cdot 4 + 1{,}2 \cdot 2 = 1{,}2$

$\hat{=}\ 120\%$

$\Rightarrow$ Der Käfer kann es schaffen.

Aufgabe 5

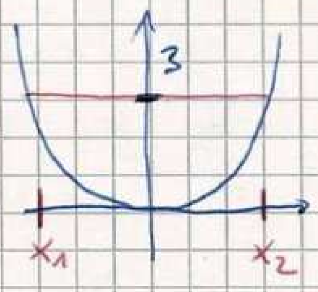
a)



$f(5) = 5$

$\Rightarrow$ Tiefe 5 m

b)



$f(x) = 3$

$\frac{1}{125} x^4 = 3$

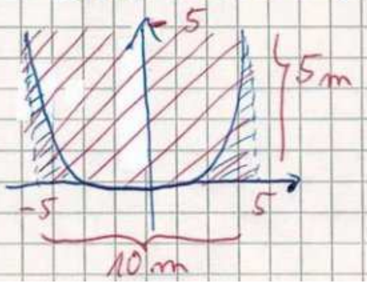
GTR...

$x_1 = -4{,}4$

$x_2 = 4{,}4$

$\Rightarrow$ Breite 8,8 m

c) Flächeninhalt der Querschnittsfläche:



$A_{///} = 10 \cdot 5 = 50 m^2$

$A_{\text{Querschnitt}} = A_{///} - A_{///}$

$= 50 - \int_{-5}^{5} \frac{1}{125} x^4 \, dx$

$= 50 - \left[\frac{1}{625} x^5 \right]_{-5}^{5}$

GTR...

$= 50 - 10$

$= 40 \ m^2$

Volumen:

$V = G \cdot h$

$= 40 \cdot 50$

$= 2000 \ m^3$

d) $\tan \alpha = f'(x)$

$\tan 3° = f'(x)$

$0{,}0524 = f'(x)$

$f(x) = \frac{1}{125} x^4$

$f'(x) = \frac{4}{125} x^3$

$f'(x) = 0{,}0524$

$\frac{4}{125} x^3 = 0{,}0524$

GTR ...

$x \approx 1{,}18$

$f'(x) = -0{,}0524$

$\frac{4}{125} x^3 = -0{,}0524$

GTR ...

$x \approx -1{,}18$

$f'(-2) = -0{,}256 \qquad \alpha = \tan^{-1}(-0{,}256) = -14{,}36°$

$f'(0) = 0 \qquad \alpha = \tan^{-1}(0) = 0°$

$f'(2) = 0{,}256 \qquad \alpha = \tan^{-1}(0{,}256) = 14{,}36°$

$\Rightarrow$ Der gesuchte Bereich ist $-1{,}18 < x < 1{,}18$

e) $f(4) = 2{,}048 \Rightarrow P_1(-4/2{,}048)$

$f(-4) = 2{,}048 \Rightarrow P_2(4/2{,}048)$

Der Verlauf der Stützen wird von den Normalen an f durch P_1 bzw. P_2 beschrieben

Wir bestimmen die Normale an f durch P_2:

Wir bestimmen die Normale an f durch P_2:

$f(x) = \frac{1}{125} x^4$

$f'(x) = \frac{4}{125} x^4$

$f'(4) = 2{,}048$

$n(x) = m x + b$

Steigung der Tangente mal Steigung der Normale gleich -1

$m \cdot 2{,}048 = -1$

$m \approx -0{,}4883$

$\Rightarrow n(x) = -0{,}4883 x + b$

$P_2 (4 / 2{,}048)$ auf $n \Rightarrow n(4) = 2{,}048$

$-0{,}4883 \cdot 4 + b = 2{,}048$

$-1{,}9532 + b = 2{,}048$

$b = 4{,}0012 \approx 4$

$\Rightarrow n(x) = -0{,}4883 x + 4$

Ende der Stütze auf dem Boden:
Nullstelle von n

$-0{,}4883 x + 4 = 0$

$-0{,}4883 x = -4$

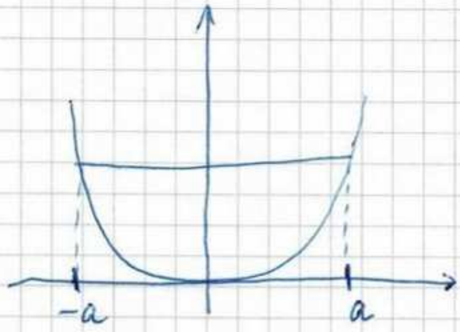
$x \approx 8{,}19$

Da f symmetrisch zur y-Achse ist, sind auch die beiden Stützen symmetrisch zur y-Achse

$\Rightarrow$ Die andere Stütze endet bei $x = -8{,}19$

$\Rightarrow$ gesuchter Abstand $= 2 \cdot 8{,}19 = \underline{16{,}38\,m}$

f) Wir betrachten den unteren Teilraum:



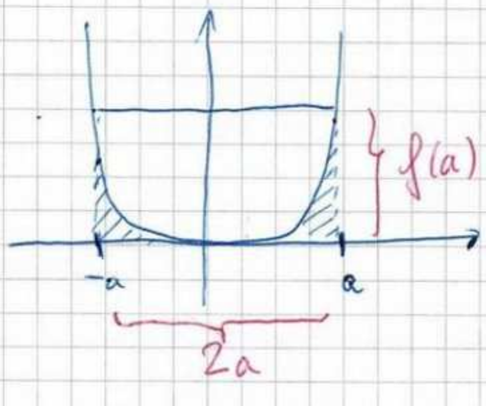
$$V_{\text{unterer Teilraum}} = G \cdot h = G \cdot 50\,m$$

$\Rightarrow 500 = G \cdot 50$

$10\,cm^2 = G$

Die untere Querschnittsfläche muss $10\,m^2$ groß sein.

D. h.:



$$10 = A_{\text{Querschnitt}} = A_{\text{Rechtecks}} - \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 2a \cdot f(a) - \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 2a \cdot \frac{1}{125} a^4 - \int_{-a}^{a} \frac{1}{125} x^4\,dx$$

$$= \frac{2}{125} a^5 - \left[\frac{1}{625} x^5\right]_{-a}^{a}$$

$$= \frac{2}{125} a^5 - \left(\frac{1}{625} a^5 - \frac{1}{625} \cdot (-a)^5\right)$$

$$= \frac{2}{125} a^5 - \left(\frac{1}{625} a^5 + \frac{1}{625} a^5\right)$$

$$= \frac{2}{125} a^5 - \frac{2}{625} a^5$$

$$= \frac{8}{625} a^5$$

$$\Rightarrow \frac{8}{625} a^5 = 10$$

GTR...

$a \approx 3{,}79$

$\Rightarrow$ Breite $= 2 \cdot 3{,}79 = \underline{7{,}58\ m}$

Aufgabe 6

Der Formansatz für die Stammfunktion lautet $F(x)=(ax^2+bx+c)\cdot e^{2x}$. Die Ableitung dieses Formansatzes ist $F'(x)=(2ax+b)\cdot e^{2x}+(ax^2+bx+c)\cdot 2\cdot e^{2x}=(2ax^2+(2b+2a)\cdot x+(2c+b))\cdot e^{2x}$. Da die Ableitung des Formansatzes der Funktion selbst entspricht, lassen sich folgende Beziehungen aufstellen.

$$2a=4$$
$$2b+2a=10$$
$$2c+b=11$$

Aus der ersten Gleichung lässt sich schlussfolgern, dass a = 2 ist. Diesen Wert kann man dann in die zweite Gleichung einsetzen. Aus dieser wird dann der Ausdruck 2b + 4 = 10. Damit ist b = 3. Diesen Wert wiederum setzen wir dann in die dritte Gleichung ein. Aus dieser wird dann der Ausdruck 2c + 3 = 11. Mit anderen Worten: c = 4.

Endergebnis: $F(x)=(2x^2+3x+4)\cdot e^{2x}$