AUFGABEN (Teil A)

Aufgabe 1
Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = 2x^3 + 6x$

d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

e) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 9x$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

g) $f(x) = \frac{1}{x} + 5$

Aufgabe 2
Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (2x - 6) \cdot e^{3x}$

b) $f(x) = (4x + 8) \cdot e^{2x+4}$

c) $f(x) = (x^2 + 2x - 3) \cdot e^{2x+5}$

d) $f(x) = (x^3 + 5x^2) \cdot e^{2x-1}$

e) $f(x) = (x^3 - 4x) \cdot e^{2x+3}$

f) $f(x) = (x^4 - 10x^2 + 9) \cdot e^{2x}$

g) $f(x) = (x^5 - 8x^3 + 16x) \cdot e^{3x-5}$

h) $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 4$

i) $f(x) = 2e^x - \frac{4}{e^x}$

Aufgabe 3

Berechne jeweils x:

a) $\log_2(8) = x$

b) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = x$

c) $\log_x(16) = 2$

d) $\log_2(x) = 5$

e) $\log_3(1) = x$

f) $\ln(e^5) = x$

g) $\ln(x) = 2$

h) $e^x - 1 = 0$

i) $e^x - \frac{1}{e} = 0$

Aufgabe 4

Bestimme jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=e^x$

b) $f(x)=(2x+1)\cdot e^x$

c) $f(x)=(5x+3)\cdot e^{2x+1}$

d) $f(x)=(x^2+4x+2)\cdot e^{x^2+3}$

e) $f(x)=(x^2+x-4)\cdot e^{2x^2+5x+1}$

f) $f(x)=x^2\cdot\sin(x)$

g) $f(x)=(\sin(x))^2$

h) $f(x)=\frac{x^2+4x+2}{4x+5}$

i) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$

j) $f(x)=(3+\cos(x))^4$

Aufgabe 5

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 4 \\ \text{II.}\quad & x + 2y - z = 4 \\ \text{III.}\quad & x + y + 2z = 5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 6 \\ \text{II.}\quad & x + 2y + 2z = 11 \\ \text{III.}\quad & x - y - 2z = -7 \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Bestimme, was man für a und b einsetzen muss, damit $x = 1$, $y = 1$ und $z = 1$ die Lösung des linearen Gleichungssystems ist:

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & x + y + z = 3 \\ \text{II.}\quad & b \cdot x + y + a \cdot z = 5 \\ \text{III.}\quad & x + 2y + a \cdot z = 6 \end{aligned}$$

Aufgabe 7

Löse das folgende nichtlineare (!) Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & a^2 + b = 10 \\ \text{II.}\quad & 2a + b = 7 \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int_{2}^{3} 2x+3 \, dx$

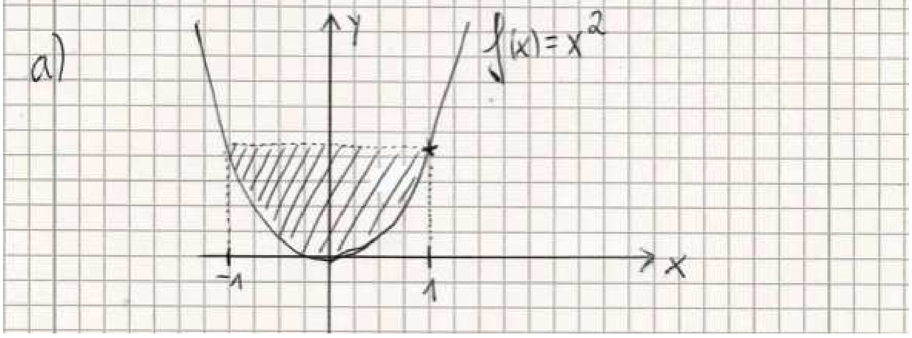
b) $\int_{1}^{4} 6x^2+2x \, dx$

c) $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} \, dx$

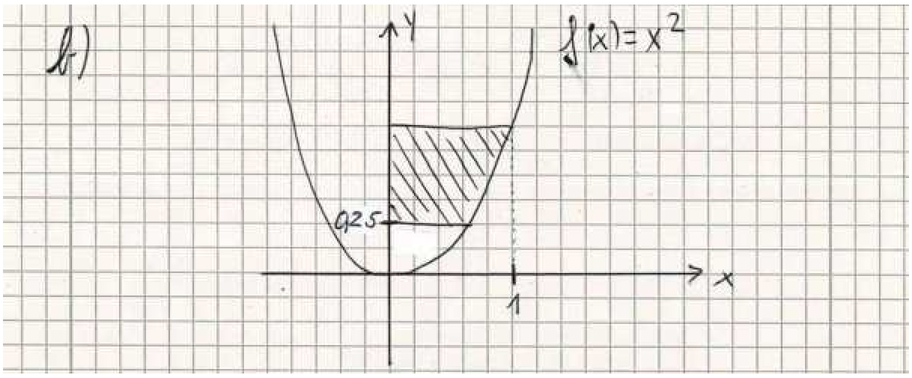
Aufgabe 9

Berechne jeweils den Flächeninhalt der schraffierten Fläche:

a)



b)



Aufgabe 10

Bestimme a: $\int_{1}^{a} 3x^2 \, dx = 26$

Aufgabe 11

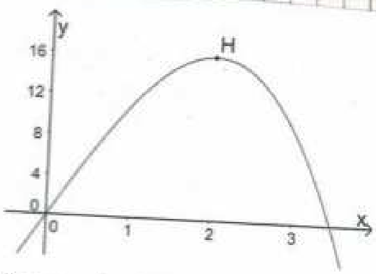
) Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x^2 + 2x) \cdot e^x$

a) Bestimme die Nullstellen

b) Zeige, dass die Funktion $F(x) = x^2 \cdot e^x$ eine Stammfunktion von f ist. Gib die Gleichung einer weiteren Stammfunktion G von f an, für die $G(1) = 2e$ gilt

Aufgabe 12

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.



a) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen für $0 \le x \le 2$ eine Fläche ein. Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

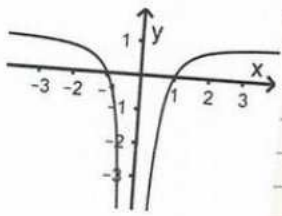
b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen für $0 \le x \le 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein. Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y-Achse.

Aufgabe 13

Gegeben ist die in $IR \setminus \{0\}$ definierte Funktion

$f: x \mapsto 1 - \frac{1}{x^2}$,

die die Nullstellen $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ hat. Die Abbildung zeigt den Graphen von f, der symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Weiterhin ist die Gerade g mit der Gleichung $y = -3$ gegeben.



a Zeigen Sie, dass einer der Punkte, in denen g den Graphen von f schneidet, die x-Koordinate $\frac{1}{2}$ hat.

b Bestimmen Sie rechnerisch den Inhalt der Fläche, die der Graph von f, die x-Achse und die Gerade g einschließen.

Aufgabe 14

) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 10x \cdot e^{-0{,}5x}$

a) Bestimme die erste, zweite und dritte Ableitung.

b) Bestimme die Nullstelle von f

c) Bestimme die Extremstelle von f
(Auf die y-Koordinate wird verzichtet)

d) Bestimme die Wendestelle von f
(Auf die y-Koordinate wird verzichtet)

e) Für jedes $u > 0$ sind $A(0/0)$, $B(u/0)$, und $C(u/f(u))$ die Eckpunkte eines Dreiecks. Gib den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit von u an.

Aufgabe 15

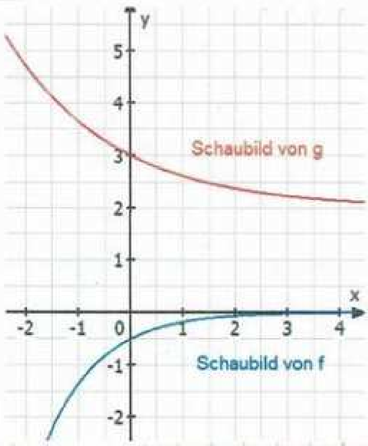
Gegeben sind die Schaubilder zweier Funktionen f und g. Eine der beiden Funktionen ist die Ableitungsfunktion der anderen Funktion.

a) Begründen Sie, dass die Funktion f die Ableitung der Funktion g ist.

b) Die Funktion g hat die Funktionsgleichung

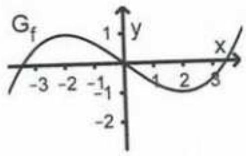
$g(x) = e^{ax} + b$.

Bestimmen Sie a und b.

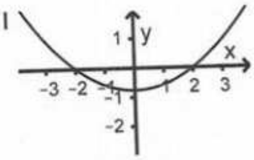


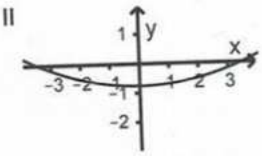
Aufgabe 16

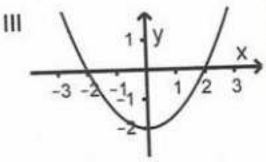
Der abgebildete Graph G_f stellt eine Funktion f dar.



a Einer der folgenden Graphen I, II und III gehört zur ersten Ableitungsfunktion von f. Geben Sie diesen Graphen an und begründen Sie, dass die beiden anderen Graphen dafür nicht infrage kommen.







b Die Funktion F ist eine Stammfunktion von f. Geben Sie das Monotonieverhalten von F im Intervall $[1;3]$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Lösungen (Teil A)

1a) $2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad | :2$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1+8}$

$x = -1 \pm \sqrt{9}$

$x = -1 \pm 3$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2$

b) $x^3 - 4x = 0$

$x \cdot (x^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0$ oder $x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 2 \qquad x_3 = -2$

c) $2x^3 + 6x = 0 \quad | :2$

$x^3 + 3x = 0$

$x \cdot (x^2 + 3) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -3 \quad ↯$

d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$

$z = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}$

$z = 2{,}5 \pm 1{,}5$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = 4 \quad | \cancel{\sqrt{\ }} \quad z = x^2$

$x^2 = 1 \qquad x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 1 \qquad x_3 = 2$

$x_2 = -1 \qquad x_4 = -2$

e) $x^5 - 10x^3 + 9x = 0$

$x \cdot (x^4 - 10x^2 + 9) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$z = 5 \pm \sqrt{25-9}$

$z = 5 \pm \sqrt{16}$

$z = 5 \pm 4$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = 9 \quad | z = x^2$

$x^2 = 1 \qquad x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 1 \qquad x_4 = 3$

$x_3 = -1 \qquad x_5 = -3$

f) $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0 \quad | +3$

$\frac{1}{3}x^2 = 3 \quad | \cdot 3$

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 3$

$x_2 = -3$

g) $\frac{1}{x} + 5 = 0 \quad | -5$

$\frac{1}{x} = -5 \quad | \cdot x$

$1 = -5x \quad | :(-5)$

$-\frac{1}{5} = x$

Aufgabe 2

a) $(2x-6)\cdot e^{3x}=0$

$2x-6=0$ oder $e^{3x}=0$

$2x=6$ ↯

$x=3$

b) $(4x+8)\cdot e^{2x+4}=0$

$4x+8=0$ oder $e^{2x+4}=0$

$4x=-8$ ↯

$x=-2$

c) $(x^2+2x-3)\cdot e^{2x+5}=0$

$x^2+2x-3=0$ oder $e^{2x+5}=0$

$x=-1\pm\sqrt{1+3}$ ↯

$x=-1\pm\sqrt{4}$

$x=-1\pm 2$

$x_1=-3$

$x_2=1$

d) $(x^3+5x^2)\cdot e^{2x-1}=0$

$x^3+5x^2=0$ oder $e^{2x-1}=0$

$x^2\cdot(x+5)=0$ ↯

$x^2=0$ oder $x+5=0$

$x_1=0$ $x_2=-5$

e) $(x^3-4x)\cdot e^{2x+3}=0$

$x^3-4x=0$ oder $e^{2x+3}=0$

$x\cdot(x^2-4)=0$ ↯

$x=0$ oder $x^2-4=0$

$x_1=0$ $x^2=4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2=-2$

$x_3=2$

f) $(x^4 - 10x^2 + 9) \cdot e^{2x} = 0$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ oder $e^{2x} = 0$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \mid$ Subst. $\quad$ ↯

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$z = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$

$z = 5 \pm \sqrt{16}$

$z = 5 \pm 4$

$z_1 = 9 \qquad z_2 = 1 \mid$ Resubst.

$x^2 = 9 \qquad x^2 = 1 \mid \sqrt{\ }$

$x_1 = 3 \qquad x_3 = 1$

$x_2 = -3 \qquad x_4 = -1$

g) $(x^5 - 8x^3 + 16x) \cdot e^{3x-5} = 0$

$x^5 - 8x^3 + 16x = 0$ oder $e^{3x-5} = 0$

$x \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) = 0$ $\quad$ ↯

$x = 0$ oder $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \mid$ Subst.

$x_1 = 0 \qquad z^2 - 8z + 16 = 0$

$z = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

$z = 4 \mid$ Resubst.

$x^2 = 4$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

h) $e^{2x} - 4e^{x} + 4 = 0 \quad | \text{Subst.}$

Beachte: $e^{2x} = (e^{x})^2$

$z^2 - 4z + 4 = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$z = 2 \quad | \text{Resubst.}$

$e^{x} = 2 \quad | \ln$

$x = \ln(2)$

i) $2e^{x} - \frac{4}{e^{x}} = 0 \quad | \cdot e^{x}$

$2e^{x} \cdot e^{x} - 4 = 0$

$2e^{2x} - 4 = 0$

$2e^{2x} = 4 \quad | :2$

$e^{2x} = 2 \quad | \ln$

$2x = \ln(2)$

$x = \frac{\ln(2)}{2}$

Aufgabe 3

a) $x = 3$, denn $2^3 = 8$

b) $x = -1$, denn $2^{-1} = \frac{1}{2}$

c) $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

d) $x = 2^5 = 32$

e) $x = 0$, denn $3^0 = 1$

f) $x = 5$, denn $e^5 = e^5$

g) $\ln(x) = 2 \Leftrightarrow e^2 = x$

h) $e^{x} - 1 = 0$

$e^{x} = 1$

$x = 0$

i) $e^{x} - \frac{1}{e} = 0$

$e^{x} = \frac{1}{e}$

$e^{x} = e^{-1}$

$\Rightarrow x = -1$

Aufgabe 4

a) $f(x) = e^{x} \Rightarrow f'(x) = e^{x}$

b) $f(x) = (2x+1) \cdot e^{x}$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^{x} + (2x+1) \cdot e^{x}$

$= (2x+3) \cdot e^{x}$

c) $f(x) = (5x+3) \cdot e^{2x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = 5 \cdot e^{2x+1} + (5x+3) \cdot 2 \cdot e^{2x+1}$

$= 5 \cdot e^{2x+1} + (10x+6) \cdot e^{2x+1}$

$= (10x+11) \cdot e^{2x+1}$

e) $f(x) = (x^2+x-4) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (x^2+x-4) \cdot (4x+5) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (4x^3+4x^2-16x+5x^2+5x-20) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (4x^3+9x^2-11x-20) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (4x^3+9x^2-9x-19) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

g) $f(x) = (\sin(x))^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 2}{4x+5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot(4x+5) - (x^2+4x+2)\cdot 4}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{8x^2 + 10x + 16x + 20 - 4x^2 - 16x - 8}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 10x + 12}{(4x+5)^2}$$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} = (x^2 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}\cdot(x^2+4x)^{-\frac{1}{2}}\cdot(2x+4)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x}}\cdot(2x+4)$$

$$= \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$$

j) $f(x) = (3 + \cos(x))^4$

$$\Rightarrow f'(x) = 4\cdot(3+\cos(x))^3\cdot(-\sin(x))$$

$$= -4\cdot\sin(x)\cdot(3+\cos(x))^3$$

<u>Aufgabe 5</u>

a)

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow -z = -1$$
$$z = 1$$
$$\Rightarrow -y + 2 = 0$$
$$2 = y$$
$$\Rightarrow x + 2 + 1 = 4$$
$$x = 1$$

b)

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & -2 & -7 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{cl} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot\mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow z = 3$$
$$\Rightarrow -y - 3 = -5 \quad | +3$$
$$-y = -2$$
$$y = 2$$
$$\Rightarrow x + 2 + 3 = 6$$
$$x = 1$$

Aufgabe 6

Wir setzen $x = y = z = 1$ ein:

I. $1 + 1 + 1 = 3$ ✓
II. $b + 1 + a = 5$
III. $1 + 2 + a = 6$

aus III folgt: $3 + a = 6$
$a = 3$

$\Rightarrow b + 1 + 3 = 5$
$b + 4 = 5$
$b = 1$

Aufgabe 7

Wir haben ein nichtlineares System. Daher können wir das Gauß-Verfahren nicht verwenden.

I. $a^2 + b = 10 \Rightarrow b = 10 - a^2$
II. $2a + b = 7 \Rightarrow b = 7 - 2a$

$\Rightarrow 10 - a^2 = 7 - 2a$
$-a^2 + 2a + 3 = 0$
$a^2 - 2a - 3 = 0$
$a = 1 \pm \sqrt{1 + 3}$
$a = 1 \pm \sqrt{4}$
$a = 1 \pm 2$
$a_1 = -1$
$a_2 = 3$

Fall 1: $a_1 = -1$

$b = 7 - 2 \cdot (-1)$
$= 7 + 2$
$= 9$

Fall 2: $a_2 = 3$

$b = 7 - 2 \cdot 3$
$= 7 - 6$
$= 1$

Lösung: $a_1 = -1$, $b_1 = 9$; $a_2 = 3$, $b_2 = 1$

Aufgabe 8

a)

$$\int_2^3 2x+3\,dx = \left[x^2+3x\right]_2^3 = 3^2+3\cdot3-(2^2+3\cdot2)$$

$$= 9+9-(4+6) = 18-10 = 8$$

b)

$$\int_1^4 6x^2+2x\,dx = \left[2x^3+x^2\right]_1^4 = 2\cdot4^3+4^2-(2\cdot1^3+1^2)$$

$$= 128+16-(2+1) = 144-3 = 141$$

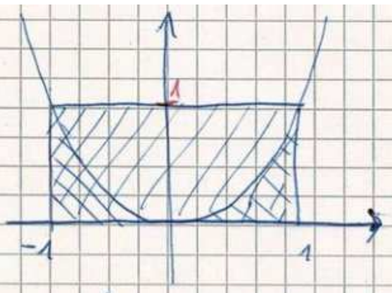
c)

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_1^2 x^{-2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^2 = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^2$$

$$= -\frac{1}{2}-\left(\frac{-1}{1}\right) = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

Aufgabe 9

a)



$f(1) = 1$

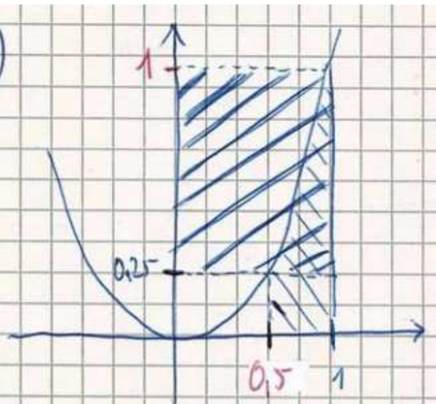
$f(-1) = 1$

$$A_{///} = 1\cdot2 = 2 \text{ FE}$$

$$A_{\backslash\backslash\backslash} = \int_{-1}^1 x^2\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^1 = \frac{1}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3} \text{ FE}$$

$$A_{gesucht} = A_{///} - A_{\backslash\backslash\backslash}$$
$$= 2 - \frac{2}{3}$$
$$= \frac{4}{3} \text{ FE}$$

b)



$f(1) = 1$

$f(x) = 0{,}25$

$x^2 = 0{,}25$

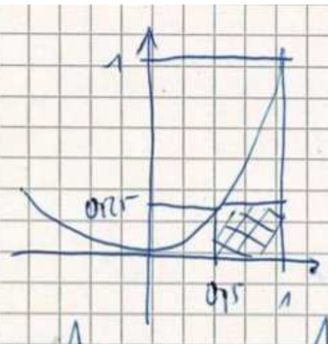
$x = \pm 0{,}5$

(hier: $x = 0{,}5$)

$$A_{///} = 0{,}75 \cdot 1 = 0{,}75 \text{ FE}$$

$$A_{\backslash\backslash\backslash} = \int_{0,5}^{1} x^2 \, dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{1/2}^{1} = \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3\right)$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{12} = \frac{4}{12} - \frac{1}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \text{ FE}$$



$$A_{\#} = 0{,}5 \cdot 0{,}25 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \text{ FE}$$

$$A_{gesucht} = A_{///} - A_{\backslash\backslash\backslash} + A_{\#} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$$
$$= \frac{6}{8} - \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8} \text{ FE}$$

Aufgabe 10

$$\int_1^a 3x^2\,dx = 26$$

$$\left[x^3\right]_1^a = 26$$

$$a^3 - 1^3 = 26$$

$$a^3 - 1 = 26$$

$$a^3 = 27$$

$$\underline{a = 3}$$

Aufgabe 11

a) $(x^2 + 2x) \cdot e^x = 0$

$x^2 + 2x = 0$ oder $e^x = 0$ ↯

$x \cdot (x+2) = 0$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$

b) $F'(x) = 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x$

$= (2x + x^2) \cdot e^x$

$= f(x)$

$\Rightarrow$ F Stammfunktion von f

alle Stammfunktionen:

$F(x) = x^2 e^x + c$

Aufgabe 12

a)

$$A = \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_0^2 -x^3 + 12x\,dx$$

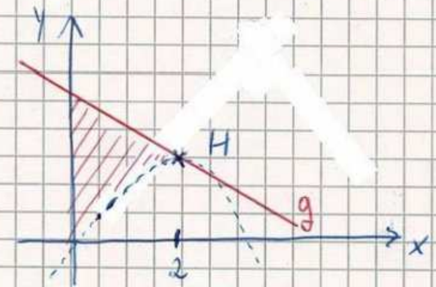
$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + 6x^2\right]_0^2$$

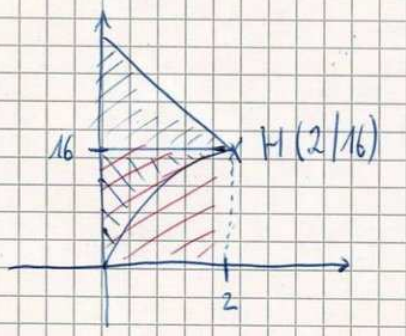
$$= -\frac{1}{4}\cdot 2^4 + 6\cdot 2^2 - 0$$

$$= -4 + 24$$

$$= 20 \checkmark$$

b)





$$A_{//} = 2\cdot 16 = 32$$

$$A_{\backslash\backslash\backslash} = A_{//} - \int_0^2 f(x)\,dx$$

$$= 32 - 20$$

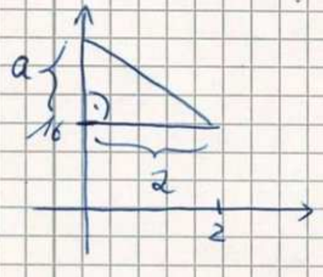
$$= 12$$

Es gilt: $A_{//} + A_{\backslash\backslash\backslash} = 20$

(laut Aufgabenstellung: Fläche zwischen g, f und y-Achse gleich 20 FE)

$$\Rightarrow A_{III} = 20 - A_{IIII}$$
$$= 20 - 12$$
$$= 8 \text{ FE}$$

Es gilt aber auch:



$$A_{III} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot a$$
$$8 = 0{,}5 \cdot 2 \cdot a$$
$$8 = a$$

Der Achsenabschnitt muss 8 LE über der Markierung 16 liegen

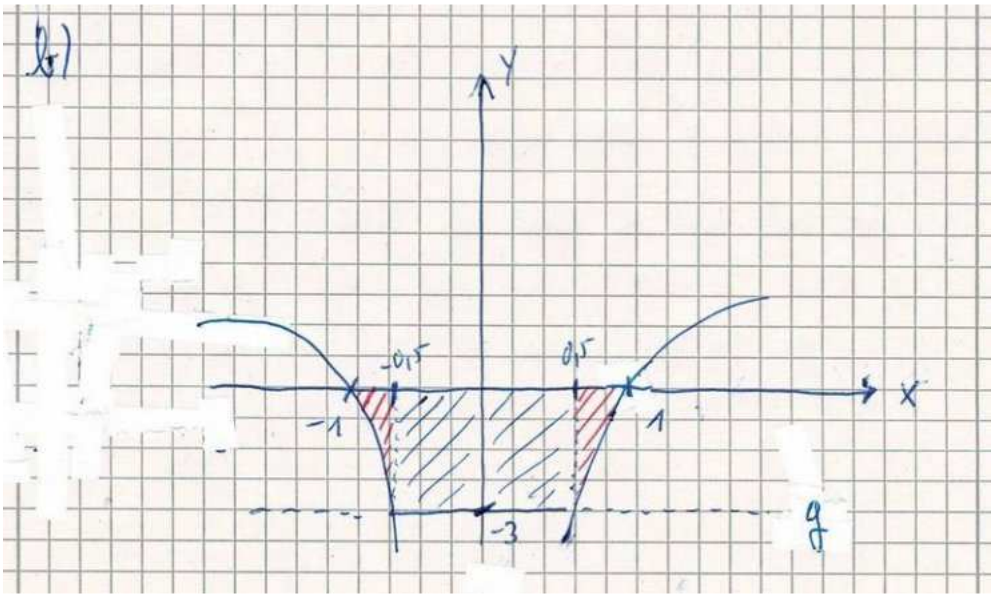
$\Rightarrow$ bei 24

Aufgabe 13

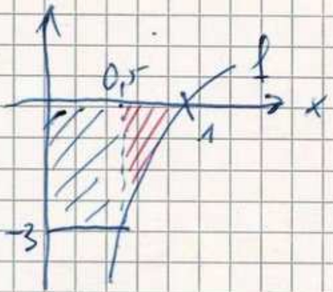
a) Schnittpunkte:

$$1 - \frac{1}{x^2} = -3 \qquad | -1$$
$$-\frac{1}{x^2} = -4 \qquad | \cdot (-x^2)$$
$$1 = 4x^2 \qquad | :4$$
$$\frac{1}{4} = x^2$$
$$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$
$$x_2 = -\frac{1}{2}$$

b)



Da der Graph symmetrisch ist besteht die zu bestimmende Fläche aus 2 gleich großen zueinander symmetrischen Teilen. Es reicht eine der Hälften (z. B. $x>0$) auszurechnen



$A_{/\!/} = 0{,}5 \cdot 3 = 1{,}5$ FE

$-A_{/\!/} = \int_{0,5}^{1} f(x)\,dx$

$= \int_{0,5}^{1} 1 - \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \int_{1/2}^{1} 1 - x^{-2}\,dx = \left[1x + x^{-1}\right]_{1/2}^{1} = \left[x + \frac{1}{x}\right]_{1/2}^{1}$

$= 1 + \frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = 2 - (0{,}5 + 2) = 2 - 2{,}5$

$= -0{,}5$

$\Rightarrow A_{///} = 0{,}5$ FE

$\Rightarrow A_{gesucht} = 2 \cdot (A_{//} + A_{///}) = 2 \cdot (1{,}5 + 0{,}5)$

$= 4$ FE

<u>Aufgabe 14</u>

a) $f'(x) = 10 \cdot e^{-0{,}5x} + (10x) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= 10 \cdot e^{-0{,}5x} + (-5x) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= (-5x + 10) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f''(x) = -5 \cdot e^{-0{,}5x} + (-5x + 10) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= -5 \cdot e^{-0{,}5x} + (2{,}5x - 5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= (2{,}5x - 10) \cdot e^{-0{,}5x}$

$f'''(x) = 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} + (2{,}5x - 10) \cdot (-0{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= 2{,}5 \cdot e^{-0{,}5x} + (-1{,}25x + 5) \cdot e^{-0{,}5x}$

$= (-1{,}25x + 7{,}5) \cdot e^{-0{,}5x}$

b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 10x \cdot e^{-0{,}5x} = 0 \quad | : e^{-0{,}5x}$

$10x = 0$

$x = 0$

$\Rightarrow N(0|0)$

c) N.B.: $f'(x)=0$

$(-5x+10)\cdot e^{-0,5x}=0$

$-5x+10=0$ oder $e^{-0,5x}=0$ ↯

$5x=10$

$x=2$

H.B.: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$f''(2)=(2,5\cdot 2-10)\cdot e^{-0,5\cdot 2}$

$=-5\cdot e^{-1}<0$

$\Rightarrow$ lok. Max. bei $x=2$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Extremstelle liegt bei $x=2$

d) N.B.: $f''(x)=0$

$(2,5x-10)\cdot e^{-0,5x}=0$

$2,5x-10=0$ oder $e^{-0,5x}=0$ ↯

$2,5x=10$

$x=4$

H.B.: $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$

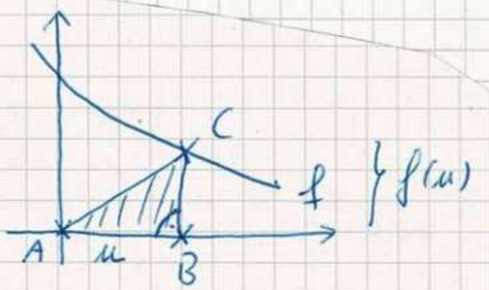
$f'''(4)=(-1,25\cdot 4+7,5)\cdot e^{-0,5\cdot 4}$

$=2,5\cdot e^{-2}>0$

$\Rightarrow$ WS bei $x=4$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Wendestelle liegt bei $x=4$

e)



$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot u \cdot f(u)$$

Länge der Strecke $\overline{AB}$

Länge der Strecke $\overline{BC}$

$$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot u \cdot 10u \cdot e^{-0{,}5u}$$
$$= 5u^2 \cdot e^{-0{,}5u}$$

Aufgabe 15

a) f wächst zwar monoton, aber es nähert sich für $x \to \infty$ immer mehr dem Grenzwert 0 an.

f' müsste positiv sein, sich aber für $x \to \infty$ selbst 0 annähern, da f immer weniger wächst

Es gilt aber $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 2$ ↯

$\Rightarrow f'(x) \neq g(x)$

$\Rightarrow g'(x) = f(x)$

b) A(0|3) auf g ⇒ $g(0) = 3$

$$e^{a \cdot 0} + b = 3$$
$$e^{0} + b = 3$$
$$1 + b = 3$$
$$b = 2$$

⇒ $g(x) = e^{ax} + 2$

B(1,5|2,5) auf g ⇒ $g(1,5) = 2,5$

$$e^{1,5a} + 2 = 2,5$$
$$e^{1,5a} = 0,5 \quad | \ln$$
$$1,5a = \ln(0,5)$$
$$a = \frac{\ln(0,5)}{1,5}$$

⇒ $g(x) = e^{\frac{\ln(0,5)}{1,5}x} + 2$

Aufgabe 16

a) f wächst bis x≈-2, fällt dann bis x≈2 und wächst dann wieder

⇒ f' muss positiv sein bis x≈-2, negativ von ca. -2 bis x≈2 und dann wieder positiv

⇒ Graph II kommt nicht in Frage (negativ von ca. -3 bis ca. 3)

f verläuft um x=0 herum mit relativ konstanter Steigung
Der Graph verläuft mehr oder weniger von $P_1(0|0)$ nach $P_2(1|-1)$

⇒ Steigung -1

⇒ Graph III kommt nicht in Frage (bei x=0 Steigung ca. -2, nicht -1)

b) f ist im gesamten Bereich $1 \leq x \leq 3$ negativ

$\Rightarrow$ F muss im gesamten Bereich streng monoton fallend sein