Aufgabe 8

a) Scheitelpunkt $S(2|-0{,}5)$
weiterer Punkt des Graphen $A(1/0)$

$g(x) = a \cdot (x-2)^2 - 0{,}5$

$A(1|0)$ auf $g \Rightarrow g(1) = 0$

$a(1-2)^2 - 0{,}5 = 0$

$a \cdot 1 - 0{,}5 = 0$

$a - 0{,}5 = 0$

$a = 0{,}5$

$\Rightarrow g(x) = 0{,}5 \cdot (x-2)^2 - 0{,}5$

$= 0{,}5 \cdot (x^2 - 4x + 4) - 0{,}5$

$= 0{,}5x^2 - 2x + 2 - 0{,}5$

$= 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$

b) (1) zu zeigen: $S(1/0)$ gemeinsamer Punkt

$f(1) = -1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -1 + 4 - 3 = 0$

$g(1) = 0{,}5 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 + 1{,}5 = 0{,}5 - 2 + 1{,}5 = 0$

$\Rightarrow$ Behauptung

② restliche gemeinsame Punkte:

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^3 + 4x^2 - 3x = 0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5$$

GTR...

$$x_1 = -0{,}5$$
$$x_2 = 1$$
$$x_3 = 3$$

y-Werte: $f(-0{,}5) = -(-0{,}5)^3 + 4\cdot(-0{,}5)^2 - 3\cdot(-0{,}5)$
$= 2{,}625$

$f(1) = 0$

$f(3) = -3^3 + 4\cdot 3^2 - 3\cdot 3$
$= 0$

$\Rightarrow S_1(-0{,}5 / 2{,}625)$
$S_2(1/0)$
$S_3(3/0)$

c) ① lokale Extrempunkte

$$f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$$
$$f'(x) = -3x^2 + 8x - 3$$
$$f''(x) = -6x + 8$$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$$-3x^2 + 8x - 3 = 0 \quad | : (-3)$$
$$x^2 - \frac{8}{3}x + 1 = 0$$
$$x = \frac{8}{6} \pm \sqrt{\left(\frac{8}{6}\right)^2 - 1}$$
$$x_1 = 2{,}22$$
$$x_2 = 0{,}45$$

Hinreichende Bed.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2{,}22) = -6 \cdot 2{,}22 + 8 = -5{,}32$ HP

$f''(0{,}45) = -6 \cdot 0{,}45 + 8 = 5{,}3$ TP

y-Werte:

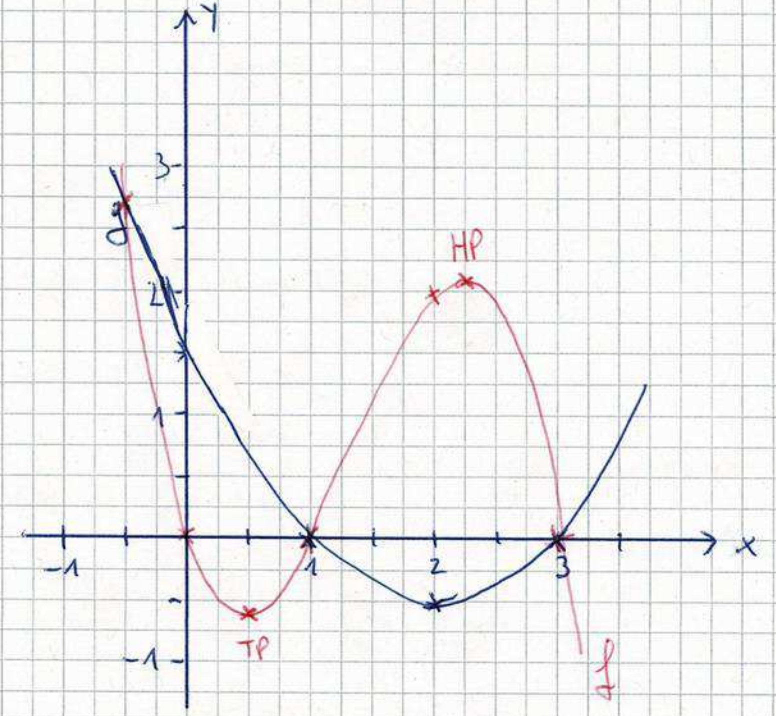
$f(2{,}22) = 2{,}11$

$f(0{,}45) = -0{,}63$

$\Rightarrow$ HP $(2{,}22 \mid 2{,}11)$

TP $(0{,}45 \mid -0{,}63)$

② Zeichnung



$f(0) = 0$

$f(0{,}5) = -0{,}625$

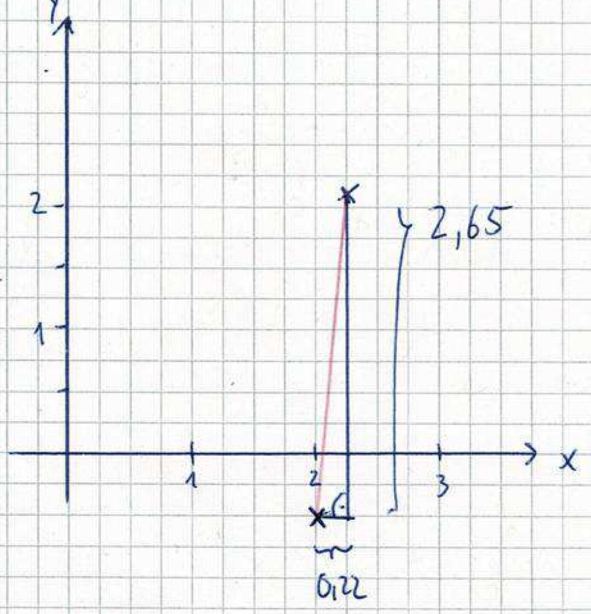
$f(1) = 0$ $\quad f(1{,}5) = 1{,}125$

$f(2) = 2$

d) nördlichster Punkt: HP von f $HP(2{,}22/2{,}11)$

südlichster Punkt: Scheitelpunkt von g

$S(2/-0{,}5)$



Satz des Pythagoras:

$$\text{Abstand}^2 = 2{,}65^2 + 0{,}22^2$$
$$\text{Abstand}^2 = 7{,}0709 \quad |\sqrt{\ }$$
$$\text{Abstand} = 2{,}6591\ldots \text{ km}$$
$$= 2659{,}1 \text{ m}$$

$\Rightarrow$ Abstand $2659{,}1$ m

e) $$A = \int_1^3 f(x) - g(x)\,dx$$
$$= \int_1^3 -x^3 + 4x^2 - 3x - (0{,}5x^2 - 2x + 1{,}5)\,dx$$
$$= \int_1^3 -x^3 + 4x^2 - 3x - 0{,}5x^2 + 2x - 1{,}5\,dx$$

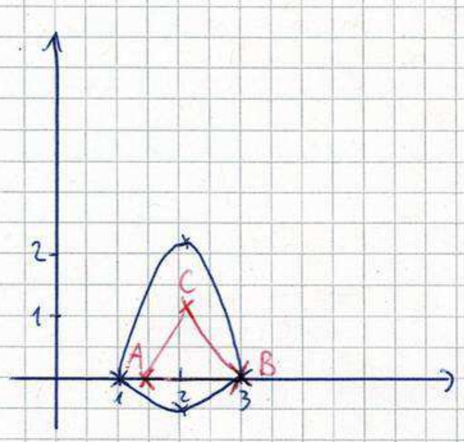
$$= \int_1^3 -x^3 + 3{,}5x^2 - x - 1{,}5 \, dx$$

$$= \left[-\frac{1}{4}x^4 + \frac{3{,}5}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 1{,}5x \right]_1^3$$

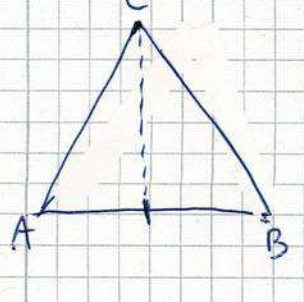
$$= -\frac{1}{4}\cdot 3^4 + \frac{3{,}5}{3}\cdot 3^3 - \frac{1}{2}\cdot 3^2 - 1{,}5\cdot 3 - \left(-\frac{1}{4}\cdot 1^4 + \frac{3{,}5}{3}\cdot 1^3 - \frac{1}{2}\cdot 1^2 - 1{,}5\cdot 1\right)$$

$$= 3{,}33 \text{ km}^2$$

f)



gleichseitiges Dreieck: alle Seiten gleich lang
Umfang insgesamt 5 km
$\Rightarrow$ eine Seite ist $5/3$ km lang



$B(3|0)$

$5/3$ km nach Westen: $3 - \frac{5}{3} = \frac{15}{3} - \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$

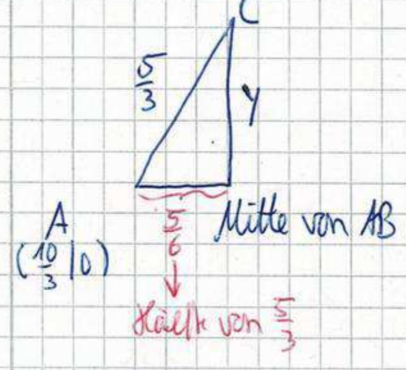
$A(\frac{10}{3}|0)$

In einem gleichseitigen Dreieck muss C auf der Mittelsenkrechten zu $\overline{AB}$ liegen

$\Rightarrow C\left(\frac{25}{6} \middle| y\right)$

Mitte zwischen $\frac{10}{3}$ und 3

bzw. $\frac{10}{3}$ und $\frac{15}{3}$: $\frac{12{,}5}{3} = \frac{25}{6}$



$$y^2 + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$y^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$y^2 = 2{,}08\overline{3} \quad | \sqrt{\ }$$

$$y = 1{,}44$$

$\Rightarrow C\left(\frac{25}{6} \middle| 1{,}44\right)$

9a) I $f(0) = (0+3)\cdot(0^2-2) = 3\cdot(-2) = -6$

$\Rightarrow S_y\,(0|-6)$

Schnittpunkt mit der y-Achse

$f(x)=0$

$(x+3)\cdot(x^2-2)=0$

$x+3=0$ oder $x^2-2=0$

$x_1=-3$ $\qquad x^2=2 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2=\sqrt{2}$

$x_3=-\sqrt{2}$

$\Rightarrow N_1(-3|0) \quad N_2(-\sqrt{2}|0) \quad N_3(\sqrt{2}/0)$

Schnittpunkte mit der x-Achse

II $f(x)=(x+3)\cdot(x^2-2) = x^3-2x+3x^2-6$

$= x^3+3x^2-2x-6$

Es gibt sowohl gerade als auch ungerade Exponenten

$\Rightarrow$ keine Standardsymmetrie

III $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} x^3+3x^2-2x-6 = \infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3+3x^2-2x-6 = -\infty$

b) $f(x) = x^3+3x^2-2x-6$

$f'(x) = 3x^2+6x-2$

$f''(x) = 6x+6$

N.B.: $f'(x) = 0$

$3x^2 + 6x - 2 = 0$

GTR ...

$x_1 = -2,29$

$x_2 = 0,29$

H.B: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(-2,29) = 6 \cdot (-2,29) + 6 < 0$ HP

$f''(0,29) = 6 \cdot 0,29 + 6 > 0$ TP

y-Werte und Ränder:

$f(-\sqrt{2}) = 0$

$f(-3) = 0$

$f(-2,29) = 2,3$

$f(-\sqrt{2}) = 0$

$f(0,29) = -6,3$

$f(\sqrt{2}) = 0$

$\Rightarrow$ größte Tiefe: 6,3 m

maximale Höhe: 2,3 m

c)
$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(x)\,dx = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} x^3 + 3x^2 - 2x - 6\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + x^3 - x^2 - 6x\right]_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} = -11,31$$

$\Rightarrow A = 11{,}31\ m^2$

d) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$

$f'(-1) = 3\cdot(-1)^2 + 6\cdot(-1) - 2$

$= 3 - 6 - 2 = -5 \Rightarrow t(x) = -5x + b$

$W(-1/-2)$ liegt auf $t \Rightarrow t(-1) = -2$

$-5\cdot(-1) + b = -2$

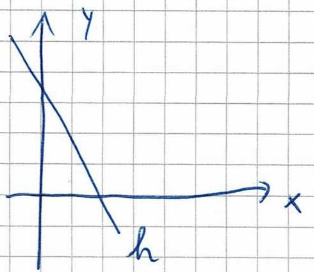
$5 + b = -2$

$b = -7$

$\Rightarrow t(x) = -5x - 7$

e) Wenn wir t in y-Richtung verschieben verändern wir den Achsenabschnitt

$h(x) = -5x + b$



Nullstelle:

$-5x + b = 0$

$b = 5x$

$0{,}2b = x$ bzw. $x = \frac{1}{5}$

$$\int_0^{0{,}2b} -5x + b\,dx = 2{,}5$$

$$\left[-\frac{5}{2}x^2 + bx\right]_0^{0{,}2b} = 2{,}5$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}b\right)^2 + b\cdot\frac{1}{5}b = 0{,}25$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{1}{25}b^2+\frac{1}{5}b^2=0{,}25$$

$$-\frac{1}{10}b^2+\frac{1}{5}b^2=0{,}25$$

$$\frac{1}{10}b^2=0{,}25$$

$$b^2=2{,}5 \quad |\sqrt{}$$

$$b_1=1{,}58$$

$(b_2=-1{,}58$

Achsenab. muss im 1. Quadranten sein)

$$\Rightarrow b=1{,}58$$

$$\Rightarrow h(x)=-5x+1{,}58$$

10a) ① Richtung = Vektor $\overrightarrow{SA}$

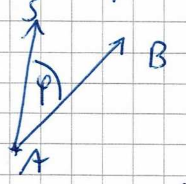
$$\overrightarrow{SA}=\begin{pmatrix}73-45\\-16-10\\-24-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}28\\-26\\-24\end{pmatrix}$$

② Länge = Betrag $\overrightarrow{SA}$

$$|\overrightarrow{SA}|=\left|\begin{pmatrix}28\\-26\\-24\end{pmatrix}\right|=\sqrt{28^2+26^2+24^2}=\sqrt{2036}\approx 45{,}12$$

$\Rightarrow 45{,}12$ m

③



$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{AS}\circ\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AS}|\cdot|\overrightarrow{AB}|}$$

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}7-73\\17-(-16)\\-2-(-24)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-66\\33\\22\end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{66^2+33^2+22^2}=\sqrt{5929}=77$$

$$\overrightarrow{AS}=\begin{pmatrix}-28\\26\\24\end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AS}|=\sqrt{2036}\approx 45{,}12$$

$$\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix}-28\\26\\24\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-66\\33\\22\end{pmatrix}}{\sqrt{2036}\cdot\sqrt{5929}}$$

$$= \frac{3234}{\sqrt{2036}\cdot\sqrt{5929}}$$

$$\Rightarrow \varphi = \cos^{-1}\left(\frac{3234}{\sqrt{2036}\cdot\sqrt{5929}}\right) \approx 21{,}44^\circ$$

b) Tunnel: $g: \vec{x} = \vec{OA} + r\cdot\vec{AB}$

$$= \begin{pmatrix}73\\-16\\-24\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-66\\33\\22\end{pmatrix}$$

entspricht:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix}73\\-16\\-24\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix}$$

2. Stollen: $h: \vec{x} = \vec{OS} + s\cdot\vec{u}$

$$= \begin{pmatrix}45\\10\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3{,}5\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}73\\-16\\-24\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-6\\3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}45\\10\\0\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3{,}5\\-4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}28\\-26\\-24\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3{,}5\\-4\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}28\\-26\\-24\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}6\\-3\\-2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}1\\-3{,}5\\-4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}6 & 1 & 28\\-3 & -3{,}5 & -26\\-2 & -4 & -24\end{array}\right)\begin{array}{l}\\2\cdot II + I\\3\cdot III + I\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}6 & 1 & 28\\0 & -6 & -24\\0 & -11 & -44\end{array}\right)$$

$\Rightarrow \quad -6s = -24$ und $-11s = -44$

$\Rightarrow \quad s = 4$

$\Rightarrow \quad 6r + 4 = 28$

$6r = 24$

$r = 4$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ -4 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P(49/-4/-16)$

c) Die kürzeste Verbindung ist die, wo der Abstand ein Minimum hat

Punkt des Tunnels: $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit einem bestimmten r

$$= \begin{pmatrix} 73 - 6r \\ -16 + 3r \\ -24 + 2r \end{pmatrix}$$

Abstand: $|\overrightarrow{SQ}|$

$$|\overrightarrow{SQ}| = \left| \begin{pmatrix} 73-6r - 45 \\ -16+3r - 10 \\ -24+2r - 0 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 28-6r \\ -26+3r \\ -24+2r \end{pmatrix} \right|$$

$$= \sqrt{(28-6r)^2 + (-26+3r)^2 + (-24+2r)^2}$$

$$= \sqrt{784 - 336r + 36r^2 + 676 - 156r + 9r^2 + 576 - 96r + 4r^2}$$

$$= \sqrt{49r^2 - 588r + 2036}$$

Das Minimum von $f(x) = \sqrt{49r^2 - 588r + 2036}$ entspricht dem Minimum von $g(x) = 49r^2 - 588r + 2036$

$g(x) = 49r^2 - 588r + 2036$

$g'(x) = 98r - 588$

$g''(x) = 98$

N.B.: $g'(x) = 0$

$98r - 588 = 0$

$98r = 588$

$r = 6$

H.B.: $g'(x) = 0$ und $g''(x) \neq 0$

$g''(6) = 98$ TP

$\Rightarrow r = 6$

$\Rightarrow \overrightarrow{OK} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + 6 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 73 \\ -16 \\ -24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -36 \\ 18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 37 \\ 2 \\ -12 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow K(37/2/-12)$

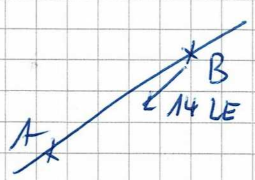
d) gesucht: der 140 m von B auf $\overline{AB}$ entfernte Punkt

$\Rightarrow$ 140 m = 14 LE

$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} \right| = 77$ (siehe Teil a)

$\Rightarrow$ $\overline{AB}$ ist 770 m lang

$\frac{14}{77} \cdot \begin{pmatrix} -66 \\ 33 \\ 22 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$



$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} - \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 7 \\ 17 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -12 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 \\ 11 \\ -6 \end{pmatrix}$

Man geht senkrecht hoch bis $z=0$

$\Rightarrow$ gesuchter Punkt $D(19/11/0)$