LÖSUNGEN
(TEIL A: OHNE HILFSMITTEL)

1a) $2x^2 + 4x - 16 = 0 \quad |:2$

$x^2 + 2x - 8 = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1+8}$

$x = -1 \pm \sqrt{9}$

$x = -1 \pm 3$

$x_1 = -4 \qquad x_2 = 2$

b) $x^3 - 4x = 0$

$x \cdot (x^2 - 4) = 0$

$x_1 = 0$ oder $x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_2 = 2 \qquad x_3 = -2$

c) $2x^3 + 6x = 0 \quad |:2$

$x^3 + 3x = 0$

$x \cdot (x^2 + 3) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 + 3 = 0$

$x^2 = -3 \quad ↯$

d) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z = 2,5 \pm \sqrt{6,25 - 4}$

$z = 2,5 \pm \sqrt{2,25}$

$z = 2,5 \pm 1,5$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = 4 \quad | \cancel{\sqrt{\ }} \quad z = x^2$

$x^2 = 1 \qquad x^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$

$x_1 = 1 \qquad x_3 = 2$

$x_2 = -1 \qquad x_4 = -2$

e) $x^5 - 10x^3 + 9x = 0$

$x \cdot (x^4 - 10x^2 + 9) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$z = 5 \pm \sqrt{25-9}$

$z = 5 \pm \sqrt{16}$

$z = 5 \pm 4$

$z_1 = 1 \qquad z_2 = 9 \quad | z = x^2$

$x^2 = 1 \qquad x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 1 \qquad x_4 = 3$

$x_3 = -1 \qquad x_5 = -3$

f) $\frac{1}{3}x^2 - 3 = 0 \quad | +3$

$\frac{1}{3}x^2 = 3 \quad | \cdot 3$

$x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 3$

$x_2 = -3$

g) $\frac{1}{x} + 5 = 0 \quad | -5$

$\frac{1}{x} = -5 \quad | \cdot x$

$1 = -5x \quad | :(-5)$

$-\frac{1}{5} = x$

2a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I-II \\ I-III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -z = -1$

$z = 1$

$\Rightarrow -y + 2 = 0$

$2 = y$

$\Rightarrow x + 2 + 1 = 4$

$x = 1$

b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & -2 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I-II \\ I-III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \cdot II + III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow z = 3$

$\Rightarrow -y - 3 = -5 \quad | +3$

$-y = -2$

$y = 2$

$\Rightarrow x + 2 + 3 = 6$

$x = 1$

c)
$$\begin{array}{l}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \end{array}\right)\end{array}\begin{array}{l} \\ \underline{\mathrm{I}-\mathrm{II}} \\ \underline{2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{III}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \underline{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 0 = -1$ ↯

$\Rightarrow$ keine Lösung

d)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \underline{2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II}} \\ \underline{3\cdot\mathrm{I}-\mathrm{III}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \underline{\mathrm{II}-\mathrm{III}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 0 = 0$

$\Rightarrow$ z frei wählbar, unendlich viele Lösungen $\quad z = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow -y + 4\lambda = 3$

$-y = 3 - 4\lambda$

$y = -3 + 4\lambda$

$\Rightarrow x - 3 + 4\lambda + \lambda = 3$

$x - 3 + 5\lambda = 3$

$x = 6 - 5\lambda$

3) Wir setzen $x = y = z = 1$ ein:

$$\begin{aligned} &\text{I.} \quad 1 + 1 + 1 = 3 \ ✓ \\ &\text{II.} \quad b + 1 + a = 5 \\ &\text{III.} \quad 1 + 2 + a = 6 \end{aligned}$$

aus III folgt: $3 + a = 6$

$a = 3$

$\Rightarrow b + 1 + 3 = 5$

$b + 4 = 5$

$b = 1$

4a) $-2x^2 + 4x = 0$

$x \cdot (-2x + 4) = 0$

$x_1 = 0 \qquad -2x + 4 = 0$

$4 = 2x \quad | :2$

$2 = x_2$

b) $f'(x) = -4x + 4$

$f'(2) = -4 \cdot 2 + 4 = -4$

$\Rightarrow t(x) = -4x + b$

$P(2|0)$ auf $t \Rightarrow t(2) = 0$

$-4 \cdot 2 + b = 0$

$-8 + b = 0$

$b = 8$

$\Rightarrow t(x) = -4x + 8$

$f(2) = -2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2$

$= -8 + 8$

$= 0$

$\Rightarrow P(2|0)$

c) $$\int_1^2 -2x^2+4x\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_1^2$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot 2^3+2\cdot 2^2-\left(-\frac{2}{3}\cdot 1^3+2\cdot 1^2\right)$$

$$= -\frac{2}{3}\cdot 8+2\cdot 4-\left(-\frac{2}{3}+2\right)$$

$$= -\frac{16}{3}+8-\left(-\frac{2}{3}+2\right)$$

$$= -\frac{16}{3}+\frac{24}{3}-\left(-\frac{2}{3}+\frac{6}{3}\right)$$

$$= \frac{8}{3}-\left(\frac{4}{3}\right)$$

$$= \frac{4}{3}$$

d) $$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_0^a -2x^2+4x\,dx = \left[-\frac{2}{3}x^3+2x^2\right]_0^a = -\frac{2}{3}a^3+2a^2-0=0$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{3}a^3+2a^2=0$$

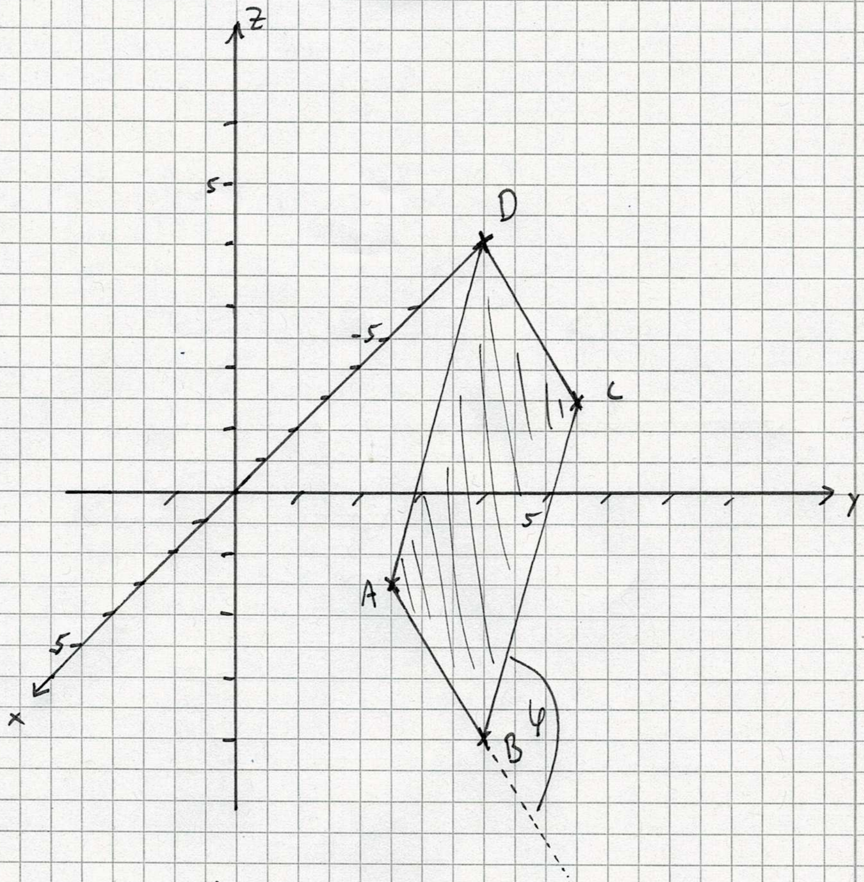
$$a^2\cdot\left(-\frac{2}{3}a+2\right)=0$$

$$\underline{\underline{a_1=0}} \qquad -\frac{2}{3}a+2=0$$

$$2=\frac{2}{3}a \quad \Big| \cdot\frac{3}{2}$$

$$\underline{\underline{3=a_2}}$$

5a)



b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-4 \\ -4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ LE

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 4-4 \\ 0-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ LE

$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 0-(-3) \\ 4-4 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ LE

$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 4-4 \\ 4-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ LE

c) $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 9-16 = -7 \neq 0$

$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = -9+16 = 7 \neq 0$

$\overrightarrow{CB} \circ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 9-16 = -7 \neq 0$

$$\vec{DC} \circ \vec{DA} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix} = -9+16 = 7 \neq 0$$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel

d) Raute

e) (siehe Zeichnung)

f)
$$g: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AC}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3-3\\4-4\\0-0\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$$

g)
$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\4\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$$

6a)
$$\begin{pmatrix}12\\2\\12\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}11\\0\\11\end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$\Rightarrow r = 11$

$\Rightarrow$ A liegt auf g

b) Die Richtungsvektoren sind keine Vielfachen voneinander $\Rightarrow$ entweder windschief oder ein Schnittpunkt

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \quad \Big| - r \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{array}\right) \quad \underline{\text{I} - \text{III}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}-1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{array}\right)$$

$\Rightarrow s = 1$

$\Rightarrow -r + 2 = 1$

$-r = -1$

$r = 1$

$$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + 1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(2/2/2)$

$\Rightarrow$ Es gibt genau einen Schnittpunkt, $S(2/2/2)$

c) xy - Ebene: $E: \vec{x} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} = s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1 & 1\end{array}\right)$$

$\Rightarrow -r = 1$

$r = -1$

$\Rightarrow t = 2$

$\Rightarrow s + 1 = 1$

$s = 0$

$$\Rightarrow \vec{OS} = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} + (-1)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(0/2/0)$

7) $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$

$$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5{,}5 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}5 & 1{,}5 & -2 & 5{,}5 \\ -3 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 2 & -3 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \mathrm{I} + \mathrm{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}5 & 1{,}5 & -2 & 5{,}5 \\ 0 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 6 & 2 & -3 \end{array}\right) \quad 2 \cdot \mathrm{II} - \mathrm{III}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1{,}5 & 1{,}5 & -2 & 5{,}5 \\ 0 & 3 & -1 & 9 \\ 0 & 0 & -4 & 21 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Es gibt einen Schnittpunkt

$\Rightarrow$ g ist nicht parallel zu E

8) $E: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB} + s \cdot \vec{AC}$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ I-II \\ I-III \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -3 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow s = -\frac{8}{3}$ und $s = -2$ ↯

$\Rightarrow$ D liegt nicht auf E

$\Rightarrow$ Punkte liegen nicht auf einer Ebene

9a) $2x^2 + ax = 0$

$x \cdot (2x + a) = 0$

$x_1 = 0$

$2x + a = 0$

$2x = -a$

$x_2 = -\frac{1}{2}a$

b) $f(x) = 2x^2 + ax$

$f'(x) = 4x + a$

$f''(x) = 4$

N.B.: $f'(x) = 0$

$4x + a = 0$

$4x = -a$

$x = -\frac{1}{4}a$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(-\frac{1}{4}a) = 4 > 0$

$\Rightarrow$ TP bei $x = -\frac{1}{4}a$

y-Wert: $f(-\frac{1}{4}a) = 2 \cdot (-\frac{1}{4}a)^2 + a \cdot (-\frac{1}{4}a)$

$= 2 \cdot \frac{1}{16}a^2 + (-\frac{1}{4})a^2$

$= \frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{4}a^2 = -\frac{1}{8}a^2$

$\Rightarrow TP(-\frac{1}{4}a \mid -\frac{1}{8}a^2)$

c) $P(1|1)$ auf $f_a \Rightarrow f_a(1) = 1$

$$2 \cdot 1^2 + a \cdot 1 = 1$$
$$2 + a = 1$$
$$a = -1$$

d) $f_1(x) = 2x^2 + x$
$f_2(x) = 2x^2 + 2x$

$$2x^2 + x = 2x^2 + 2x \quad |-2x^2$$
$$x = 2x \quad |-x$$
$$0 = x$$

$f_a(0) = 0 \Rightarrow$ $P(0|0)$ liegt auf allen Graphen

e) $$\int_0^1 f_a(x)\,dx = \int_0^1 2x^2 + ax\,dx = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}ax^2\right]_0^1$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{1}{2}a - 0 = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}a$$

f) $$\frac{2}{3}\cancel{a} + \frac{1}{2}a = 7$$
$$\frac{4}{6} + \frac{3}{6}a = 7$$
$$\frac{4+3a}{6} = 7 \quad |\cdot 6$$
$$4 + 3a = 42 \quad |-4$$
$$3a = 38 \quad |:3$$
$$a = \frac{38}{3}$$

10a) B: x-Wert wie A $\qquad$ B(3/8/0)

y-Wert wie C

z-Wert wie A

E: x-Wert wie A $\qquad$ E(3/0/4)

y-Wert wie A

z-Wert wie G

F: x-Wert wie A $\qquad$ F(3/8/4)

y-Wert wie C

z-Wert wie G

b) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ ✓

c) $|\overrightarrow{AB}| = 8 \qquad |\overrightarrow{AD}| = 3$

$A = 3 \cdot 8 = 24$ FE

d) $V = 3 \cdot 8 \cdot 4 = 96$ VE $\qquad |\overrightarrow{AE}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 4$

e) $\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_1(1{,}5/4/0)$

f) $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1{,}5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow M_2\ (1{,}5/4/2)$

g) $g: \vec{x} = \overrightarrow{OA} + r \cdot \overrightarrow{AG} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$h: \vec{x} = \overrightarrow{OD} + s \cdot \overrightarrow{DF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}-3\\8\\4\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}3\\8\\4\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix}3\\8\\4\end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix}3\\-8\\-4\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 3 & 3\\8 & -8 & 0\\4 & -4 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 3 \cdot \text{II} - 8 \cdot \text{I} \\ 3 \cdot \text{III} - 4 \cdot \text{I}\end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c}3 & 3 & 3\\0 & -48 & -24\\0 & -24 & -12\end{array}\right)$$

$\Rightarrow r = 0{,}5$

$\Rightarrow 3s + 1{,}5 = 3$

$3s = 1{,}5$

$s = 0{,}5$

$$\Rightarrow \vec{OS} = 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix}3\\8\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1{,}5\\4\\2\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow S(1{,}5/4/2)$

11a) $$\begin{pmatrix}5\\1\\2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}x\\2\\-3\end{pmatrix} = 0$$

$5x + 2 - 6 = 0$

$5x - 4 = 0$

$5x = 4$

$x = 4/5$

b) $|\vec{AB}| = 3$

$$\left|\begin{pmatrix}2-1\\4-2\\z-1\end{pmatrix}\right| = 3$$

$$\left|\begin{pmatrix}1\\2\\z-1\end{pmatrix}\right| = 3$$

$\sqrt{1+4+(z-1)^2} = 3$

$\sqrt{5+(z-1)^2} = 3 \quad |()^2$

$5+(z-1)^2 = 9 \quad |-5$

$(z-1)^2 = 4 \quad |\sqrt{\ }$

$z-1 = \pm 2 \quad |+1$

$z = 1 \pm 2$

$z_1 = -1$

$z_2 = 3$

12 a) $f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \quad P(1|3)$

$f(x) = x^2 + 2x$

$f'(x) = 2x + 2$

$f'(1) = 2 + 2 = 4$

$\Rightarrow t(x) = 4x + b$

$P(1|3)$ auf $t \Rightarrow t(1) = 3$

$4 + b = 3$

$b = -1$

$\Rightarrow t(x) = 4x - 1$

b) $f'(x) = 2x + 2$

$2x + 2 = 6 \quad |-2$

$2x = 4 \quad |:2$

$x = 2$

$f(2) = 4 + 2 \cdot 2 = 8$

$P(2|8)$

$\Rightarrow t(x) = 6x + b$

$P(2|8)$ auf $t \Rightarrow t(2) = 8$

$6 \cdot 2 + b = 8$

$12 + b = 8$

$b = -4$

$\Rightarrow t(x) = 6x - 4$ ✓

c) $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2$

$F_2(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 1$

d) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + c$

$F(1) = 2 \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot 1^3 + 1^2 + c = 2$

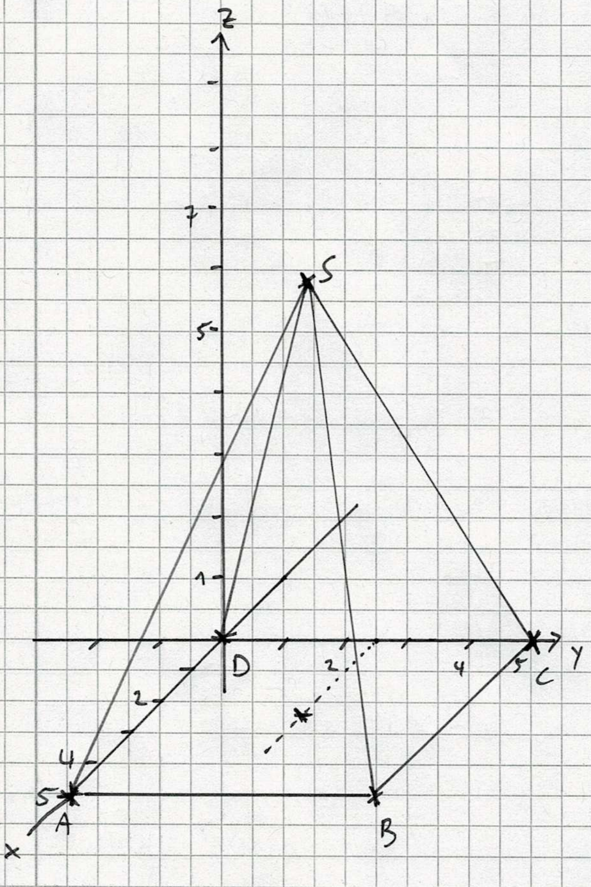
$\frac{1}{3} + 1 + c = 2$

$\frac{4}{3} + c = 2$

$c = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{2}{3}$

13a)



A(5/0/0)
B(5/5/0)
C(0/5/0)
D(0/0/0)

S(2,5/2,5/7)

↓

über der Mitte der Grundfläche

b) $V = \frac{1}{3} \cdot 5^2 \cdot 7 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 7 = \frac{175}{3}$ VE

Möglichkeit 1: A(20/0/0)
B(20/5/0)
C(0/5/0)
D(0/0/0)

$V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 5 \cdot 7 = \frac{700}{3} = 4 \cdot \frac{175}{3}$ VE

Möglichkeit 2: A(5/0/0)
B(5/5/0)
C(−15/5/0)
D(−15/0/0)

$V_{neu} = \frac{1}{3} \cdot 20 \cdot 5 \cdot 7$

14a) $\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \overrightarrow{BE}$

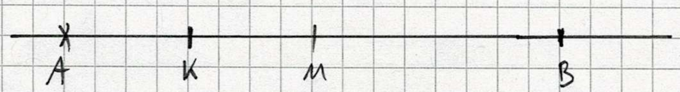
$\vec{y} = \vec{a} + \vec{c} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$

b) $\overrightarrow{FB} = \vec{f} + \vec{a}$

c) A(6/2/−4)

$\overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ 0-2 \\ 8-(-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + 4 \cdot \overrightarrow{AK} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -16 \\ -8 \\ 48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ -6 \\ 44 \end{pmatrix}$



$\Rightarrow B(-10/-6/44)$

15a) I. $2x_3 = 2 \quad |:2$

$x_3 = 1$

III. $x_2 - x_3 = 2$

$x_2 - 1 = 2$

$x_2 = 3$

II. $x_1 + x_2 + x_3 = 2$

$x_1 + 3 + 1 = 2$

$x_1 + 4 = 2$

$x_1 = -2$

b) Es gilt:

A

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \text{I+II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) 2\cdot\text{III}-\text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

lösbar mit unendlich vielen Lösungen

B

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ -1 & 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \text{I+II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) 2\cdot\text{III}-\text{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 0 = 4$ ↯

nicht lösbar

16a) 3 Punkte legen immer ein Dreieck fest

b) $|\overrightarrow{AD_a}| = 2$

$$\left|\begin{pmatrix} a & -1 \\ 2+\sqrt{2}a & -2 \\ 5+\sqrt{2} & -5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} a-1 \\ \sqrt{2}a \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}\right| = 2$$

$$\Rightarrow \sqrt{(a-1)^2 + 2a^2 + 2} = 2 \quad |()^2$$

$$(a-1)^2 + 2a^2 + 2 = 4$$

$$a^2 - 2a + 1 + 2a^2 + 2 = 4$$

$$3a^2 - 2a + 3 = 4$$

$$3a^2 - 2a - 1 = 0$$

$$a^2 - \frac{2}{3}a - \frac{1}{3} = 0$$

$$a = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}}$$

$$a = \frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9}}$$

$$a = \frac{1}{3} \pm \frac{2}{3}$$

$$a_1 = 1 \qquad a_2 = -\frac{1}{3}$$

17a)

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \leftarrow$$ Man kann keinen Wert für s wählen, so dass

$s \cdot 0 = -3$ ↯

$\Rightarrow A \notin g$

$h: \vec{x} = \vec{OA} + r \cdot \vec{AB}$

$= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} = s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -5 & b & -7 \end{array}\right) \quad 5 \cdot \mathrm{I} - \mathrm{III}$

$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5-b & 3 \end{array}\right)$

$\Rightarrow$ Wenn die Geraden einen Schnittp. haben, muss $r = 3$ sein

$\Rightarrow (5-b) \cdot r = 3$

$(5-b) \cdot 3 = 3 \quad | :3$

$5-b = 1 \quad | -5$

$-b = -4$

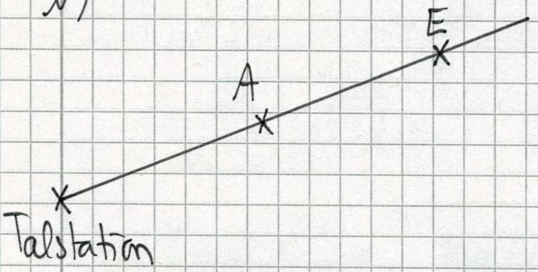
$b = 4$

18a) Weg der Standseilbahn von A nach E

Für $\lambda = 0$ ergibt sich A.

Für $\lambda = 1$ ergibt sich E

b)



$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AE}| = \left| \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{400 + 3600 + 900}$$

$$= \sqrt{4900}$$

$$= 70 \mathrel{\hat=} 700\ m$$

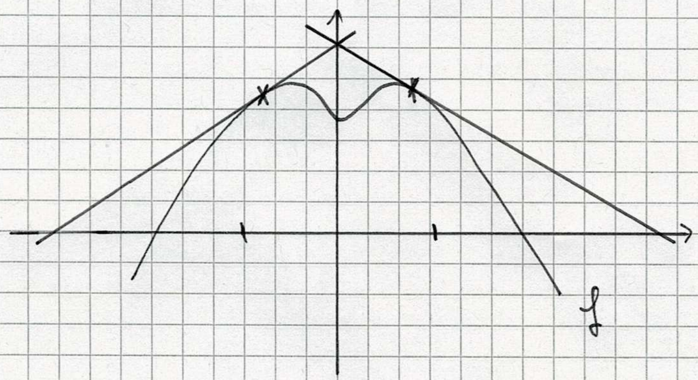
$140\ m$ von $700\ m \mathrel{\hat=} 2/7$

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \frac{2}{7} \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -40/7 \\ 120/7 \\ 60/7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 4 + \frac{60}{7} = \frac{28}{7} + \frac{60}{7} = \frac{88}{7}$$

$$\Rightarrow \frac{88}{7} \cdot 10 = \frac{880}{7}\ m$$

19a)



Die Tangenten sind auch symmetrisch zur y-Achse. Der Achsenabschnitt ist identisch. Die Steigung hat das entgegengesetzte Vorzeichen

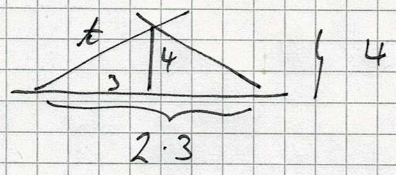
$$t_2(x) = -\frac{4}{3}x + 4$$

b) $\frac{4}{3}x + 4 = 0$

$$\frac{4}{3}x = -4$$

$$4x = -12 \quad |:4$$

$$x = -3$$



$$t^2 = 3^2 + 4^2$$

$$t^2 = 9 + 16$$

$$t^2 = 25$$

$$t = 5$$

$$\Rightarrow U = 5 + 5 + 6 = 16$$

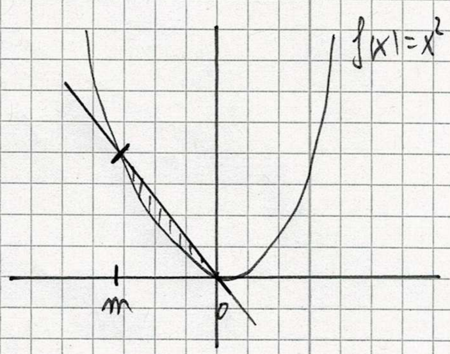
20)

$$x^2 = mx$$

$$x^2 - mx = 0$$

$$x \cdot (x - m) = 0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = m$$



$$\int_m^0 mx - x^2\,dx = \left[\frac{m}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_m^0 = 0 - \left(\frac{m}{2}\cdot m^2 - \frac{1}{3}m^3\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2}m^3 - \frac{1}{3}m^3\right) = -\frac{1}{6}m^3$$

$$-\frac{1}{6}m^3 = 36 \quad |\cdot(-6)$$

$$m^3 = -216 \quad |\sqrt[3]{\ }$$

$$\underline{m = -6}$$