AUFGABEN

TEIL A: OHNE HILFSMITTEL

AUFGABE 1

Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 2x^2 + 4x - 16$

b) $f(x) = x^3 - 4x$

c) $f(x) = 2x^3 + 6x$

d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$

e) $f(x) = x^5 - 10x^3 + 9$

f) $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

g) $f(x) = \frac{1}{x} + 5$

AUFGABE 2

Löse die folgenden linearen Gleichungssysteme:

a)
$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & x + y + z = 4 \\ \text{II.} \quad & x + 2y - z = 4 \\ \text{III.} \quad & x + y + 2z = 5 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & x + y + z = 6 \\ \text{II.} \quad & x + 2y + 2z = 11 \\ \text{III.} \quad & x - y - 2z = -7 \end{aligned}$$

c) I. $x + y + z = 3$
II. $x - 2y + 2z = 1$
III. $2x - y + 3z = 3$

d) I. $x + y + z = 3$
II. $2x + 3y - 2z = 3$
III. $3x + 4y - z = 6$

AUFGABE 3

Bestimme, was man für a und b einsetzen muss, damit $x = 1$, $y = 1$ und $z = 1$ die Lösung des linearen Gleichungssystems ist:

I. $x + y + z = 3$
II. $b \cdot x + y + a \cdot z = 5$
III. $x + 2y + a \cdot z = 6$

AUFGABE 4

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^2 + 4x$.

a) Berechne die Nullstellen von f.

b) Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f durch den Punkt $P(1 \,/\, f(1))$.

c) Berechne den folgenden Ausdruck:

$$\int_1^2 -2x^2 + 4x \, dx$$

d) Bestimme den Wert von a, für den gilt:

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0$$

AUFGABE 5

Gegeben ist das Viereck ABCD mit A(3|4|0), B(0|4|-4), C(-3|4|0) und D(0|4|4).

a) Zeichne das Viereck in ein dreidimensionales Koordinatensystem

b) Bestimme die Länge aller 4 Seiten des Vierecks.

c) Bestimme rechnerisch, ob es in diesem Viereck rechte Winkel gibt.

d) Gib an, ob es sich um ein besonderes Viereck handelt. Wenn ja, dann gib an, um welches.

e) Mit dem Term $\cos\varphi = \frac{\vec{AB} \circ \vec{BC}}{|\vec{AB}| \cdot |\vec{BC}|}$ kann man einen bestimmten Winkel bestimmen. Trage diesen Winkel in die Zeichnung ein.

f) Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und C. Bestimme eine Gleichung für g.

g) Gib eine Gleichung für eine beliebige Gerade h an, welche echt parallel zu g ist (also keinen Schnittpunkt mit ihr hat)

AUFGABE 6

Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Bestimme rechnerisch, ob der Punkt A (12/2/12) auf der Geraden g liegt.

b) Gegeben ist eine zweite Gerade mit der Gleichung $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Bestimme die gegenseitige Lage von g und h und bestimme gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunkts.

c) Bestimme die Koordinaten des Schnittpunkts von g mit der xz-Ebene.

AUFGABE 7

Die Ebene E geht durch die Punkte A(1,5 /0 /0), B (0|3|0) und C (0/0/6).

Bestimme rechnerisch, ob die Gerade

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallel zur Ebene E verläuft.

AUFGABE 8

Gegeben sind die Punkte A(2/4/1), B (0/2/-1), C (4/-2/1) und D (-1/9/0).
Überprüfe rechnerisch, ob diese 4 Punkte auf einer gemeinsamen Ebene liegen.

AUFGABE 9

Gegeben ist die Funktionenschar
$f_a(x) = 2x^2 + ax$ mit $a > 0$

a) Gib die Nullstellen der Funktionen der Funktionenschar in Abhängigkeit von a an.

b) Bestimme die Koordinaten und die Art der Extempunkte von f_a in Abhängigkeit von a an.

c) Bestimme, welchen Wert man für a einsetzen muss, damit $P(1/1)$ auf dem Graphen von a liegt.

d) Bestimme die Koordinaten aller Punkte, die auf allen Funktionen der Funktionenschar liegen.

e) Rechne den folgenden Ausdruck aus (in Abhängigkeit von a):

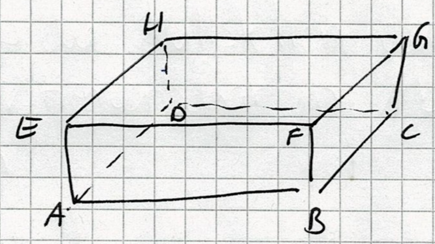
$$\int_0^1 f_a(x)\,dx$$

f) Bestimme das a mit

$$\int_0^1 f_a(x)\,dx = 7$$

AUFGABE 10

Gegeben ist ein Quader mit den Eckpunkten
A (3/0/0), B, C (0/8/0), D (0/0/0), E, F,
G (0/8/4) und H (0/0/4)



a) Bestimme die Koordinaten von B, E und F

b) Zeige rechnerisch, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ senkrecht zueinander sind

c) Bestimme den Flächeninhalt der Fläche ABCD

d) Bestimme das Volumen des Quaders

e) Bestimme die Koordinaten des Punktes, der genau in der Mitte der Fläche ABCD liegt.

f) Bestimme die Koordinaten des Punktes, der genau in der Mitte des Quaders liegt.

g) Die Gerade g verläuft durch die Punkte A und G. Die Gerade h verläuft durch die Punkte D und F.
Bestimme Gleichungen für g und h.
Untersuche die gegenseitige Lage von g und h und bestimme gegebenenfalls die Koordinaten des Schnittpunktes.

AUFGABE 11

a) Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$. Bestimme, wie man x wählen muss, damit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander sind.

b) Gegeben sind die Punkte $A(1|2|1)$ und $B(2|4|z)$.
Bestimme, wie man z wählen muss, damit A und B 3 LE voneinander entfernt sind.

AUFGABE 12

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 2x$

a) Bestimme die Gleichung der Tangente an f durch $P(1 / f(1))$.

b) Die Gerade g hat die Gleichung $g(x) = 6x - 4$.
Zeige rechnerisch, dass es sich um eine Tangente an f durch einen Punkt $P(x_1 / y_1)$ handelt. Und bestimme die Koordinaten von P.

c) Gib zwei verschiedene Stammfunktionen von f an.

d) Bestimme die Stammfunktion von f, für die $F(1) = 2$ gilt.

Aufgabe 13 (IQB)

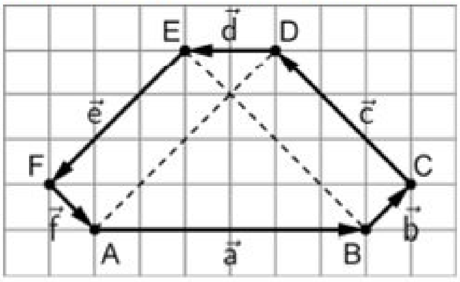
In einem kartesischen Koordinatensystem ist die gerade Pyramide ABCDS gegeben. Die Kantenlänge der quadratischen Grundfläche ist 5, die Höhe der Pyramide 7.

a Geben Sie mögliche Koordinaten der Eckpunkte der Pyramide an.

b Mindestens einer der Eckpunkte soll so verschoben werden, dass sich das Volumen der Pyramide vervierfacht. Dafür gibt es mehrere Möglichkeiten. Geben Sie für zwei dieser Möglichkeiten jeweils die Koordinaten der verschobenen Eckpunkte an und begründen Sie Ihre Angabe.

Aufgabe 14 (IQB)

Im abgebildeten Sechseck ABCDEF sind jeweils zwei Seiten parallel zueinander.



a Stellen Sie die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ jeweils mithilfe der Eckpunkte des Sechsecks dar.

$$\vec{x} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} \qquad\qquad \vec{y} = \vec{a} + \vec{c}$$

b Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{FB}$ mithilfe von drei der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{e}$ und $\vec{f}$ dar.

c Der Punkt A hat in einem kartesischen Koordinatensystem die Koordinaten $x_1 = 6$, $x_2 = 2$ und $x_3 = -4$. Der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$ wird mit M bezeichnet. Der Punkt $K(2|0|8)$ ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AM}$. Ermitteln Sie die Koordinaten von B.

Aufgabe 15 (IQB)

a Bestimmen Sie die Lösung des folgenden Gleichungssystems:

$$\text{I}\quad 2x_3 = 2 \qquad \text{II}\quad x_1 + x_2 + x_3 = 2 \qquad \text{III}\quad x_2 - x_3 = 2$$

b Gegeben sind die Gleichungssysteme A und B:

$$\text{A}\quad \begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ \text{II} & -x_1 + x_2 = -8 \\ \text{III} & x_2 + x_3 = 2 \end{array} \qquad\qquad \text{B}\quad \begin{array}{ll} \text{I} & x_1 + x_2 + 2x_3 = 12 \\ \text{II} & -x_1 + x_2 = -8 \\ \text{III} & x_2 + x_3 = 4 \end{array}$$

Entscheiden Sie, welches der Gleichungssysteme A und B nicht lösbar ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Aufgabe 16 (IQB)

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(1|2|5)$, $B(2|7|8)$ und $C(-3|2|4)$ gegeben.

a Weisen Sie nach, dass A, B und C Eckpunkte eines Dreiecks sind.

b Für jede reelle Zahl a ist ein Punkt $D_a\left(a\,|\,2+a\sqrt{2}\,|\,5+\sqrt{2}\right)$ gegeben. Bestimmen Sie alle Werte von a, für die die Strecke von A nach D_a die Länge 2 hat.

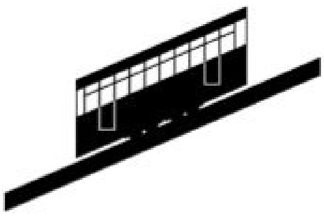
Aufgabe 17 (IQB)

Gegeben sind die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ mit $s \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade h durch die Punkte $A(4|0|0)$ und $B(5|1|b)$ mit einer reellen Zahl b.

a Begründen Sie, dass A nicht auf g liegt.

b Die Geraden g und h haben einen gemeinsamen Punkt. Ermitteln Sie den Wert von b.

Aufgabe 18 (IQB)



Betrachtet wird ein geradliniger Abschnitt der Strecke der abgebildeten Standseilbahn. In einem Koordinatensystem werden der Anfang und das Ende dieses Abschnitts durch die Punkte $A(-13|9|4)$ bzw. $E(-33|69|34)$ dargestellt, die Talstation der Seilbahn durch den Koordinatenursprung. Die x_1x_2-Ebene beschreibt die Horizontale. Eine Längeneinheit im Koordinatensystem entspricht 10 Metern in der Realität.

a Geben Sie die Bedeutung der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -13 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -20 \\ 60 \\ 30 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in [0;1]$ im Sachzusammenhang an.

b Ermitteln Sie die Höhe der Seilbahn über der Talstation, wenn die Seilbahn im beschriebenen Streckenabschnitt 140 Meter vom Anfang dieses Abschnitts entfernt ist.

Aufgabe 19 (IQB)

Betrachtet wird eine Funktion f, deren Graph symmetrisch bezüglich der y-Achse ist. Die Tangente t_1 an den Graphen von f im Punkt $(1|f(1))$ hat die Gleichung $y = \frac{4}{3}x + 4$.

a Geben Sie eine Gleichung der Tangente t_2 an den Graphen von f im Punkt $(-1|f(-1))$ an und begründen Sie Ihre Angabe.

b Die Tangenten t_1 und t_2 schließen mit der x-Achse ein Dreieck ein. Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks.

Aufgabe 20 (IQB)

Gegeben ist die in IR definierte Funktion f mit $f(x) = x^2$. Bestimmen Sie diejenige reelle Zahl m mit $m < 0$, für die der Graph von f und die Gerade mit der Gleichung $y = m \cdot x$ eine Fläche mit dem Inhalt 36 einschließen.