Aufgaben
Teil B: mit Hilfsmitteln

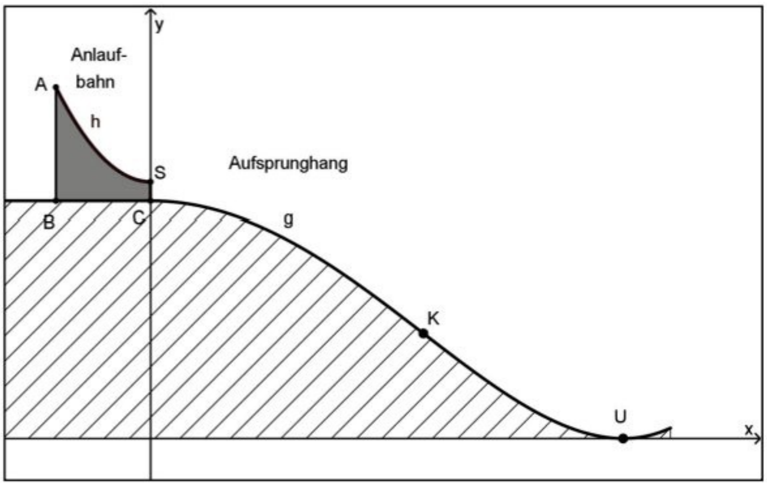
Aufgabe 1 (Berlin 2018)

Aufgabe 1.1: Skisprunganlage

Die Abbildung zeigt das Profil einer Skisprunganlage.

Die Anlaufbahn ist die Oberseite des Bauwerks *ABCS*. Sie wird von *A* bis *S* durch den Graphen der Funktion *h* beschrieben. Die Punkte *S* und *C* liegen auf der *y*-Achse. Die Strecke von *B* nach *C* liegt waagerecht und ist 20 m lang.

Der Aufsprunghang beginnt am Punkt *C* und wird durch den Graphen der Funktion *g* beschrieben.



Die Funktionen *g* und *h* sind gegeben durch

$$g(x)=\frac{1}{1000}\cdot\left(\frac{1}{2000}x^4-10x^2+50\,000\right) \quad \text{und} \quad h(x)=0{,}05x^2+54\,.$$

Maßstab: $1\,\text{LE}=1\text{ m}$

a) Berechnen Sie, wie viel höher der Punkt S als der Punkt C liegt.
Berechnen Sie den Abstand zwischen den Punkten A und B.

b) Ermitteln Sie den Inhalt der Querschnittsfläche des Bauwerks *ABCS.*

c) Der Punkt U liegt an der tiefsten Stelle des Aufsprunghangs *g*.
Ermitteln Sie rechnerisch Lage und Art aller lokalen Extrempunkte des Graphen von g und entscheiden Sie, welcher der Extrempunkte dem Punkt U entspricht.
[Kontrollergebnis: $g'(x)=\frac{1}{1000}\cdot\left(\frac{1}{500}x^3-20x\right)$]

d) Von besonderer Bedeutung für die Konstruktion einer Skisprunganlage ist der Punkt *K*, in dem der Aufsprunghang sein stärkstes Gefälle aufweist.
Berechnen Sie die Koordinaten von *K*. Für die Ermittlung der *x*-Koordinate von *K* genügt die Verwendung der notwendigen Bedingung.

e) Die Flugbahn eines Skispringers wird durch eine quadratische Funktion f beschrieben. Im Punkt S geht die Anlaufbahn h ohne Knick in diese Flugbahn über. Bei $x = 60$ m hat der Springer eine vertikale Höhe von 4,72 m über dem Aufsprunghang.

Bestimmen Sie rechnerisch die Funktionsgleichung der Flugbahn.

[Zur Kontrolle: $f(x) = -0{,}008\,x^2 + 54$]

f) Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes L, in dem der Springer auf dem Aufsprunghang landet.

Skizzieren Sie die Flugbahn in dem gegebene Koordinatensystem (siehe unten).

[Zur Kontrolle: $L(73{,}9 \mid 10{,}3)$]

g) Aus Sicherheitsgründen darf der vertikale Abstand des Springers zum Aufsprunghang während des Sprunges nicht zu groß werden.

Weisen Sie nach, dass der maximale vertikale Abstand zum Hang während des Fluges höchstens 6 m beträgt.

Auf die Verwendung einer hinreichenden Bedingung kann verzichtet werden.

Aufgabe 2 (Berlin 2018)

Aufgabe 2.1: Brücke

Die Abbildung zeigt die Seitenansicht einer Brücke über die Autobahn.

Der Verlauf der seitlichen Streben kann modellhaft im Koordinatensystem durch die Punkte $A(0\,|\,0\,|\,5)$, $B(4{,}4\,|\,44\,|\,5)$, $C(0{,}2\,|\,2\,|\,7)$ und $D(4{,}8\,|\,48\,|\,9)$ beschrieben werden.
Die Fahrbahn unterhalb der Brücke liegt in der *x*-*y*-Ebene. [1 Längeneinheit = 1 m]

a) Die Punkte *A*, *B* und *C* liegen in der Ebene *E*.
Bestimmen Sie eine Gleichung für die Ebene E.

b) Weisen Sie nach, dass der Punkt D auch in der Ebene E liegt.

c) Die Punkte *A* und *B* liegen auf der Geraden *g*, die Punkte *C* und *D* liegen auf der Geraden *h*.
Begründen Sie, dass die Geraden *g* und *h* einen Schnittpunkt haben müssen.
Berechnen Sie den Winkel unter dem sich die Geraden *g* und *h* schneiden.

Ein Fahrzeug bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer geradlinigen Bahn auf die Brücke zu. Zunächst befindet es sich im Punkt $P\,(\,82\,|\,40\,|\,0\,)$ und 1,5 s später im Punkt $Q\,(\,42\,|\,36\,|\,0\,)$.

d) Berechnen Sie, welche Strecke das Fahrzeug in diesen 1,5 s zurückgelegt hat.
Berechnen Sie die Geschwindigkeit des Fahrzeugs und geben Sie diese in $\frac{km}{h}$ an.

e) Das Fahrzeug fährt unverändert geradlinig weiter.
Ermitteln Sie, wie lange das Fahrzeug benötigt, um vom Punkt *Q* bis zu dem Punkt zu gelangen, der genau vertikal unter der Strebe durch *A* und *B* liegt.

Aufgabe 3 (Berlin 2017)

Aufgabe 2.1: Startbahn Ost

Bei östlichen Winden wird vom Flughafen in Berlin-Tegel von einer Startbahn gestartet, die in eine nordöstliche Richtung zeigt.

Ein Jet hebt im Punkt $P_0(1140 \mid 240 \mid 0)$ von der Startbahn ab und erreicht eine Sekunde später die Position $P_1(1200 \mid 251 \mid 30)$.

Der Jet verändert seine Richtung beim Starten nicht nach rechts oder links.

Der Jet fliegt geradlinig und verändert seine Geschwindigkeit zunächst nicht.

Der Flughafen und Berlin liegen in der *x*-*y*-Ebene. Es gilt $1\,\text{LE} = 1\,\text{m}$.

a) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{r} = \overrightarrow{P_0P_1}$ und eine Gleichung der Geraden g an, auf der der Jet unmittelbar nach dem Start fliegt.

Berechnen Sie die Länge der Strecke, die der Jet in einer Sekunde zurücklegt.

Berechnen Sie die Startgeschwindigkeit des Jets in der Einheit $\frac{\text{km}}{\text{h}}$.

b) In gerader Verlängerung der Startbahn liegt 7 km vom Punkt $P_0(1140 \mid 240 \mid 0)$ entfernt das Rathaus Pankow.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Rathauses.
Runden Sie auch Zwischenergebnisse ganzzahlig.
[Kontrollergebnis: $R(8040 \mid 1505 \mid 0)$]

c) 10 Sekunden nach dem Start ändert der Jet im Punkt $P_{10}(1740 \mid 350 \mid 300)$ seine Geschwindigkeit und fliegt weniger steil mit der Richtung $\vec{r}_{neu} = \begin{pmatrix} 90 \\ 16{,}5 \\ 4{,}5 \end{pmatrix}$ weiter.

Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Jet das Rathaus überfliegt.

Bestimmen Sie die Höhe, in der das Rathaus überflogen wird.

In der Ebene E mit $E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1560 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ befindet sich die untere Begrenzung einer dichten Wolkendecke.

d)

Weisen Sie nach, dass die neue Flugbahn parallel zu der unteren Begrenzung der Wolkendecke verläuft.

Der Bürgermeister schaut vom Rathaus im dem Moment nach oben, in dem sich der Jet genau über dem Rathaus befindet. Untersuchen Sie, ob der Bürgermeister den Jet sehen kann oder nur die Wolkendecke.

Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x)=x^3+6ax^2$ mit $a\in\mathbb{R}$.

a) Bestimme rechnerisch die Nullstellen der Funktionenschar in Abhängigkeit von a.
b) Bestimme rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte der Funktionenschar in Abhängigkeit von a.
c) Bestimme rechnerisch die Koordinaten der Wendepunkte der Funktionenschar.
d) Es gibt einen Punkt, der auf allen Funktionen der Funktionsschar liegt. Bestimme rechnerisch seine Koordinaten.

e) (i) Berechne das folgende Integral in Abhängigkeit von a:

$$\int_0^1 f_a(x)\,dx$$

(ii) Bestimme rechnerisch den Wert von a, für den gilt:

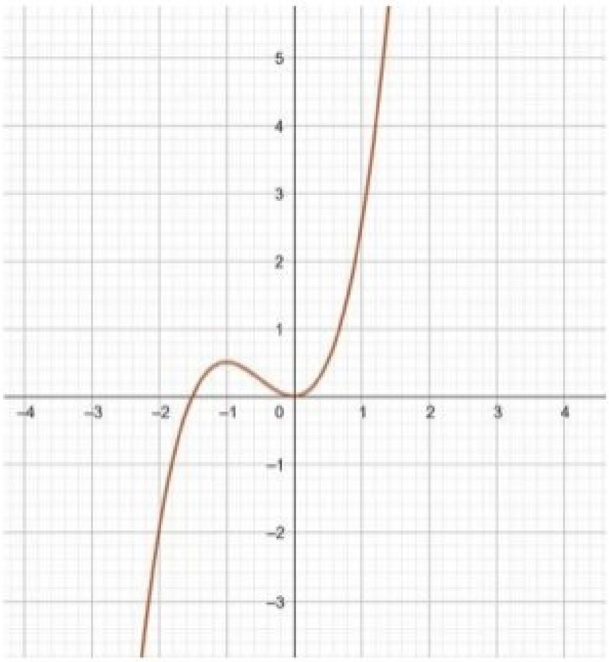
$$\int_0^1 f_a(x)\,dx=1$$

(iii) Bestimme rechnerisch den Wert von a, für den gilt:

$$\int_0^1 f_a(x)\,dx=a$$

f) Der nachfolgend abgebildete Graph gehört zu einer Funktion der Funktionenschar. Bestimme rechnerisch den zu ihr gehörenden Wert von a.
g) Die Funktion g(x) = 15 x – 8 ist eine Tangente durch den Punkt $P(1/f_a(1))$ an den Graphen einer Funktion f_a für ein bestimmtes a. Bestimme rechnerisch den Wert von a.

Graph:
(zu Aufgabenteil f)



Aufgabe 5 (Berlin 2012)

Aufgabe 1.1: Sonnenblumen

Gegeben ist die Funktion h mit $h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 21t + 10;\ t \in I\!R$. Sie beschreibt ab dem Zeitpunkt $t = 0$ für einen gewissen Zeitraum die Höhe einer Sonnenblume, wobei t in Wochen nach Beobachtungsbeginn und $h(t)$ in cm angegeben werden.

a) Berechnen Sie die Koordinaten aller Extrempunkte des Graphen von h und bestimmen Sie deren Art. Skizzieren Sie den Graphen von h mindestens für $-6 \leq t \leq 9$ in ein geeignetes Koordinatensystem. Erläutern Sie, in welchem Intervall von t der Graph von h sinnvolle Werte für das Wachstum der Sonnenblume liefert.

b) Geben Sie die Höhe der Sonnenblume zu Beginn des Beobachtungszeitpunktes in Zentimetern an. Ermitteln Sie die durchschnittliche Wachstumsrate im Zeitraum von $t = 1$ bis $t = 6$ sowie die momentane Wachstumsrate zum Zeitpunkt $t = 6$.

c) Ermitteln Sie rechnerisch, zu welchem Zeitpunkt eine momentane Wachstumsrate von $15\ \frac{\text{cm}}{\text{Woche}}$ erreicht ist.

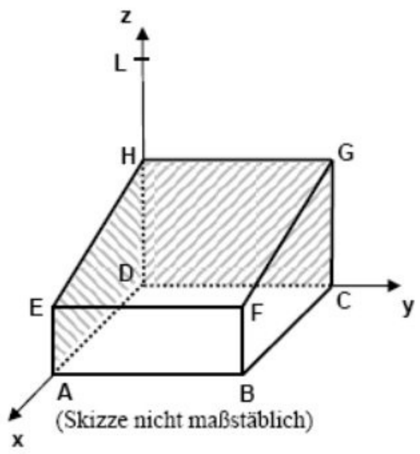
d) Ein Verkäufer wirbt mit dem Versprechen: „Meine Pflanzen erreichen eine Wachstumsrate von $27\ \text{cm}$ pro Woche. Da können Sie beim Wachsen zusehen!“. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die versprochene Wachstumsrate erreicht werden kann, indem Sie die größte erreichte momentane Wachstumsrate der Pflanze ermitteln.

e) Von einer zweiten Sonnenblumenart ist nur die Funktion v der momentanen Wachstumsrate bekannt. Ihre Gleichung lautet $v(t) = -2t^2 + 3t + 52$, wobei t in Wochen und $v(t)$ in $\frac{\text{cm}}{\text{Woche}}$ angegeben werden. Zum Zeitpunkt $t = 2$ ist eine Sonnenblume dieser Art $120\ \text{cm}$ hoch.
Ermitteln Sie rechnerisch die Gleichung der Funktion g, die die Höhe dieser Sonnenblume in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt (mit t in Wochen und $g(t)$ in cm).

Aufgabe 6

Die rechteckige Terrasse eines Hauses soll zu einem verglasten Wintergarten mit Pultdach umgebaut werden. Die Seitenflächen $ADHE$ und $CGHD$ liegen an der Außenmauer des Hauses (dessen Grundriss L-förmig ist).

Gegeben sind $B(5|3,5|0)$, $E(5|0|2)$ und $H(0|0|3)$.
(Angabe in Metern)



(Skizze nicht maßstäblich)

Teilaufgabe 1.1 (10 BE)

Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte A, C, F und G.

Teilaufgabe 1.2

Berechnen Sie den Flächeninhalt der zu verglasenden Außenfläche.

Teilaufgabe 1.3

Ermitteln Sie den Rauminhalt des prismenförmigen Wintergartens.

Teilaufgabe 2.1 (8 BE)

Ermitteln Sie eine Gleichung für die Ebene E_1, in der die Dachfläche liegt.
Bestimmen Sie rechnerisch den Schnittpunkt der Ebene E_1 mit der Geraden durch die Punkte A und D.

An der Hauswand befindet sich im Punkt L eine Lampe, die 6 m vertikal über dem Punkt D liegt. Der Wintergarten wirft im Licht der Lampe einen Schatten auf den ebenen Garten.

Teilaufgabe 3.1 (12 BE)

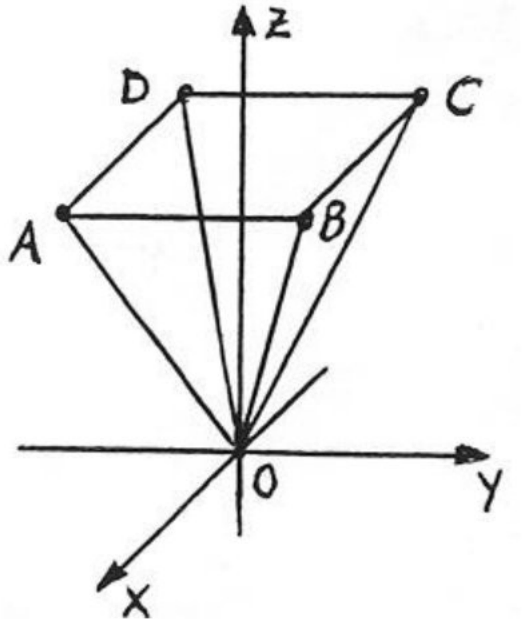
Im Garten befindet sich ein quadratischer Sandkasten mit den Eckpunkten $P(9|1|0)$, $Q(9|3|0)$, $R(7|3|0)$ und $S(7|1|0)$. Untersuchen Sie, ob der Sandkasten vollständig oder nur teilweise im direkten Lampenlicht liegt.

Teilaufgabe 3.2

Erläutern Sie ausführlich, jedoch ohne Rechnung, wie der Flächeninhalt der im Schatten liegenden Gartenfläche ermittelt werden kann. (Nehmen Sie an, dass die Gartengrenze in der Verlängerung der Strecken $\overline{DA}$ und $\overline{DC}$ verläuft.)

Aufgabe 7

Ein Regenauffangbehälter zur Messung von Niederschlägen hat die Form einer auf der Spitze stehenden, oben offenen geraden Pyramide (siehe Skizze).



Die Eckpunkte haben folgende Koordinaten: $A(5;-5;24)$, $B(5;5;24)$, $C(-5;5;24)$, $D(-5;-5;24)$, $O(0;0;0)$.
(1 LE entspricht 1 cm)

a) Zeige rechnerisch, dass das Viereck ABCD ein Quadrat ist.
Und berechne den Flächeninhalt des Quadrats.

b) Bestimme den Mittelpunkt des Quadrats ABCD.
Und zeige, dass die Verbindung zwischen diesem Mittelpunkt und dem Punkt O senkrecht auf der Diagonalen des Quadrats steht.

c) Gegeben ist ein weiterer Punkt E(0; 0; 40).
Ermitteln Sie eine Gleichung der Geraden g, die durch die Punkte E und B verläuft!
Die Gerade g durchstößt die x-y-Ebene im Punkt F. Berechnen Sie die Koordinaten dieses Punktes!

d) Berechnen Sie die Größe des Winkels, den die Seitenkante $\overline{OB}$ und die Strecke $\overline{BF}$ einschließen!

e) Der Behälter läuft mit Wasser voll. Berechne (in cm³), wie viel Wasser in dem Behälter ist.

f) Im Inneren der Pyramide existiert ein Punkt R, der von allen Eckpunkten der Pyramide den gleichen Abstand besitzt.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes R!

g) Geben Sie eine Gleichung der Ebene ε an, die die Punkte O, A und B enthält!

Eine Gerade h ist durch die Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} a \\ -10 \\ 12 \end{pmatrix}$

$(a, r \in R)$ gegeben und verläuft parallel zur Ebene ε.
Ermitteln Sie den Wert des Parameters a! [

Aufgabe 8

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von g in der Anlage.

Die Graphen von f und g begrenzen für $1 \leq x \leq 3$ einen See. Der Graph von f bildet modellhaft die nördliche und die zu g gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.

Die x-Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.

[Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.]

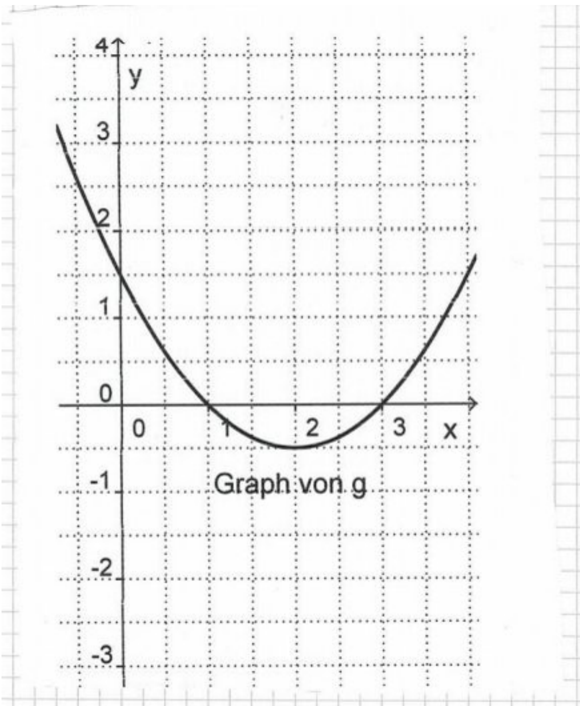
b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1 \mid 0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und g ist. Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

c) Bestimmen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte.
Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in der Anlage ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern.

e) Berechnen Sie die Größe der Seefläche.

f) Im Punkt $P(3 \mid 0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft.
Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.

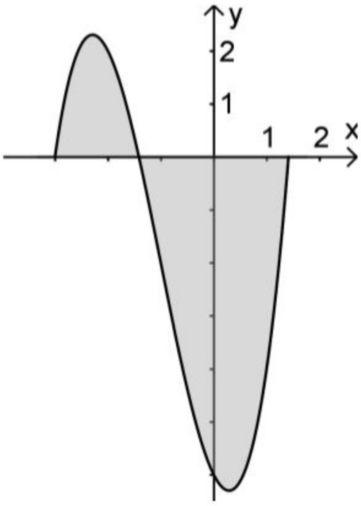


Aufgabe 9 (Berlin 2013)

Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = (x+3) \cdot (x^2 - 2)$; $x \in IR$.
Der Graph dieser Funktion ist G.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen G mit den Koordinatenachsen und weisen Sie nach, dass G weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Koordinatenursprung ist.
Geben Sie das Verhalten der Funktionswerte von f für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$ an.

b) Der Graph der Funktion f beschreibt modellhaft das Profil eines Kanals $\left(-\sqrt{2} \le x \le +\sqrt{2}\right)$ sowie die links angrenzende Uferböschung mit Erhebung, $1 \text{ LE} = 1 \text{ m}$.
Die x-Achse befindet sich auf der Höhe der Kanalwasseroberfläche (siehe Skizze).
Berechnen Sie die größte Tiefe des Kanals und die maximale Höhe der linken Uferböschung relativ zur Wasseroberfläche.
[Zur Kontrolle: $f'(x) = 3x^2 + 6x - 2$]



c) Berechnen Sie die Querschnittsfläche des Kanals.

d) Der Graph von G besitzt genau einen Wendepunkt $W(-1|-2)$.
Ermitteln Sie rechnerisch eine Gleichung für die Wendetangente an G.
[Zur Kontrolle: t_W : $y = -5x - 7$]
Wendetangente: Tangente durch den Wendepunkt

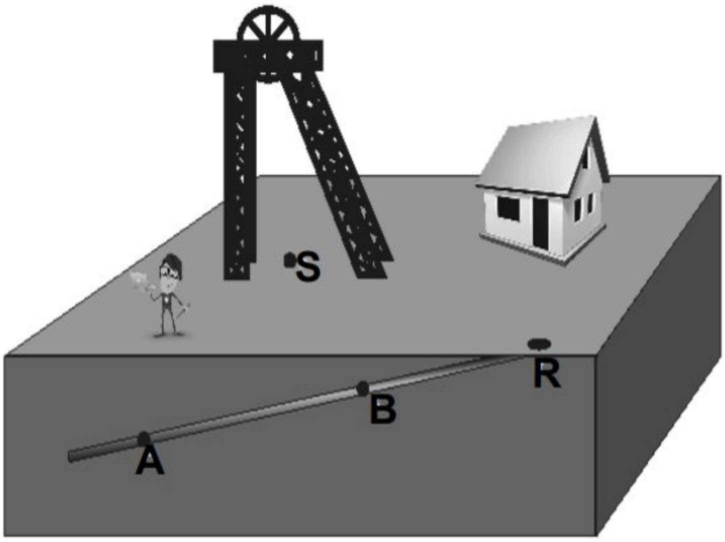
e)
Durch Parallelverschiebung der Wendetangente in y-Richtung erhält man eine Gerade h, die im ersten Quadranten mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 2,5 FE einschließt.
Ermitteln Sie eine Gleichung für h.

Aufgabe 10 (Berlin 2013)

Aufgabe 2.2: Bergwerk

In einem Bergwerk befindet sich ein Tunnel, der geradlinig durch die Punkte $A(73\,|\,-16\,|\,-24)$ und $B(7\,|\,17\,|\,-2)$ zum Ausgang R verläuft. Vom Punkt $S(45\,|\,10\,|\,0)$ werden geradlinig Stollen gegraben, die auf den Tunnel treffen.

Die Erdoberfläche befindet sich in der x-y-Ebene, $1\,\text{LE} = 10\,\text{m}$.



a) Bestimmen Sie die Richtung, in die von S aus gegraben werden muss, damit ein Stollen den Punkt A trifft. Berechnen Sie die Länge des Stollens und die Größe des Winkels, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft.

b) Ein zweiter Stollen verläuft vom Punkt S in Richtung $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3{,}5 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P, in dem dieser Stollen auf den Tunnel trifft.

c) Vom Punkt S aus soll der kürzeste Stollen gegraben werden, der zum Tunnel führt. Bestimmen Sie die Richtung, in welche gegraben werden muss, und den Punkt K, in dem der Stollen auf den Tunnel trifft.

d) In 140 m Entfernung vom Punkt B auf der Stecke $\overline{AB}$ soll ein zur Erdoberfläche senkrechter Notausstieg enden.
Berechnen Sie die Koordinaten des Punktes, an dem die Bohrung an der Erdoberfläche beginnen muss.