Lösungen
(Teil A: ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1

a) $3^2 = 9$ b) $2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ c) $5^0 = 1$

d) $2^{-1} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$ e) $25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5$ f) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

g) $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$ h) $36^{0,5} = \sqrt{36} = 6$ i) 0^0 (nicht definiert)

j) $1^3 = 1$ k) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}$ l) $8^{\frac{2}{3}} = (\sqrt[3]{8})^2 = 2^2 = 4$

m) $10^3 = 1000$ n) $(-1)^3 = -1$

o) $(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = 16$ p) $10^7 = 10.000.000$

Aufgabe 2

a) 2^0 gleich 1 b) $5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$ kleiner als 1

c) 2^1 = 2 größer als 1 d) $0,5^2 = 0,25$ kleiner als 1

e) $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ Die Wurzel einer Zahl, die größer ist als 1, muss selbst auch größer als 1 sein.

f) $8^{-\frac{2}{5}} = \frac{1}{8^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{8})^2}$ Die Wurzel einer Zahl, die größer ist als 1, muss selbst auch größer als 1 sein. Und das Quadrat davon ist auch mit Sicherheit größer als 1. Wenn ich 1 durch eine solche Zahl teile, so erhalte ich mit Sicherheit eine Zahl kleiner als 1.

Aufgabe 3

a)

Zahl 1: $3^0=1$ Zahl 2: $3^{-5}=\frac{1}{3^5}$ Zahl 3: $3^{-4}=\frac{1}{3^4}$

Zahl 4: $3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$ Zahl 5: $3^2=9$ Zahl 6: $\frac{1}{3}=3^{-1}$

Reihenfolge: Zahl 2, Zahl 3, Zahl 6, Zahl 1, Zahl 4, Zahl 5

b)

Zahl 1: $2^0=1$ Zahl 2: $2^{-5}=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$ Zahl 3: $2^4=16$

Zahl 4: $32=2^5$ Zahl 5: $0{,}25=\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$ Zahl 6: $\frac{1}{8}=\frac{1}{2^3}=2^{-3}$

Reihenfolge: Zahl 2, Zahl 6, Zahl 5, Zahl 1, Zahl 3, Zahl 4

c)

Zahl 1: $100^{\frac{1}{2}}=\sqrt{100}=10$ Zahl 2: $0{,}25$ Zahl 3: $10^{-1}=\frac{1}{10}=0{,}1$

Zahl 4: $10^{-2}=\frac{1}{10^2}=\frac{1}{100}=0{,}01$ Zahl 5: $\frac{1}{1000}=0{,}001$ Zahl 6: 0

Reihenfolge: Zahl 6, Zahl 5, Zahl 4, Zahl 3, Zahl 2, Zahl 1

Aufgabe 4

a) $3^4\cdot 3^5=3^{4+5}=3^9$

b) $2^3\cdot 2^{-4}=2^{3+(-4)}=2^{-1}$

c) $(3^4)^5=3^{4\cdot 5}=3^{20}$

d) $5^4\cdot 5^4\cdot 5^7=5^{4+4}\cdot 5^7=5^8\cdot 5^7=5^{8+7}=5^{15}$

e) $\frac{3^2\cdot 2^2}{6^{10}}=\frac{(3\cdot 2)^2}{6^{10}}=\frac{6^2}{6^{10}}=6^{2-10}=6^{-8}$

f) $x^6\cdot x^8=x^{6+8}=x^{14}$

g) $x^3\cdot x^4\cdot x^{-5}=x^{3+4}\cdot x^{-5}=x^7\cdot x^{-5}=x^{7-5}=x^2$

h) $\frac{x^3\cdot x^5}{x^2}=\frac{x^{3+5}}{x^2}=\frac{x^8}{x^2}=x^{8-2}=x^6$

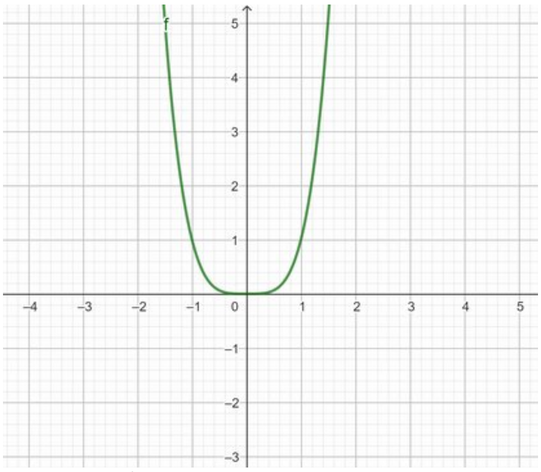
i) $(12x^6):(-3x^3)=\frac{12x^6}{-3x^3}=\frac{12}{-3}\cdot\frac{x^6}{x^3}=-4\cdot x^{6-3}=-4x^3$

Aufgabe 5

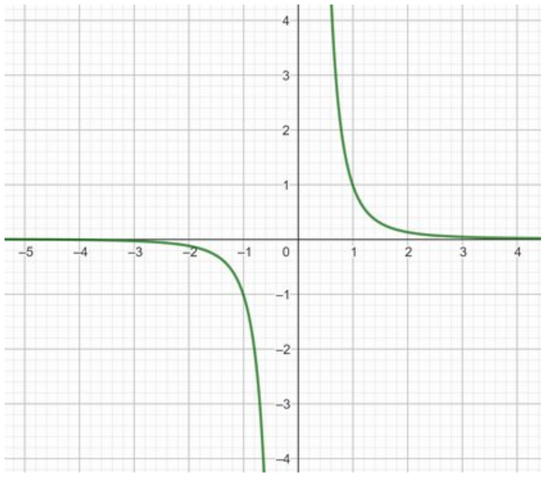
a) $1.200.000.000.000 = 1{,}2 \cdot 10^{12}$ b) $0{,}000012 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$

c) $4.500.000 = 4{,}5 \cdot 10^{6}$ d) $7.000.000.000.000.000.000.000 = 7 \cdot 10^{21}$

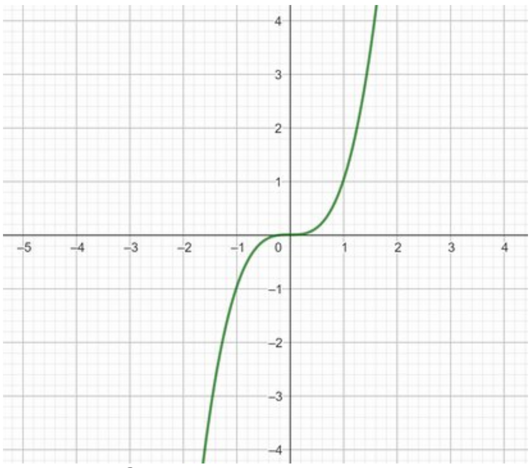
Aufgabe 6



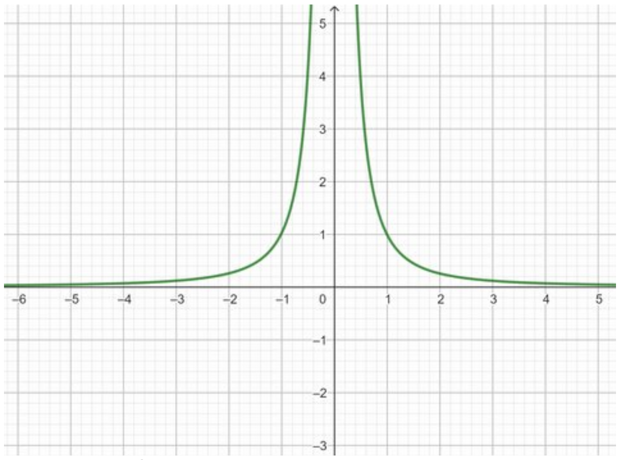
$g(x) = x^4$



$h(x) = x^{-3}$



$f(x) = x^3$



$i(x) = x^{-2}$

Aufgabe 7

Der Graph hat keine Lücke bei x = 0 und verläuft nicht unterhalb der x-Achse. Daher muss der Exponent positiv und gerade sein. Deshalb kommen nur $h(x) = x^2$ und $i(x) = x^4$ in Betracht. Bei x = 2 hat h den y-Wert $h(2) = 2^2 = 4$ und i hat den y-Wert $i(2) = 2^4 = 16$. Im Koordinatensystem kann man sehen, dass der Punkt P (2 / 4) nicht auf dem Graphen liegt. Daher scheidet h aus. Damit bleibt nur i übrig.

Die Funktion i ist die gesuchte Funktion.

Aufgabe 8

Gegeben sind die Fun

Der Graph hat keine Lücke bei x = 0 und verläuft zum Teil oberhalb und zum Teil unterhalb der x-Achse. Daher muss der Exponent positiv und ungerade sein. Deshalb kommen nur die Funktionen $f(x)=x^3$ und $k(x)=x^5$ in Frage. Für x = 2 hat die Funktion f den y-Wert $f(2)=2^3=8$ und die Funktion k den y-Wert $k(2)=2^5=32$. Im Koordinatensystem kann man sehen, dass der Punkt P (2 / 8) nicht auf dem Graphen liegt. Daher scheidet die Funktion f aus. Damit muss k die gesuchte Funktion sein.

Lösungen (Teil B: mit Hilfsmitteln)

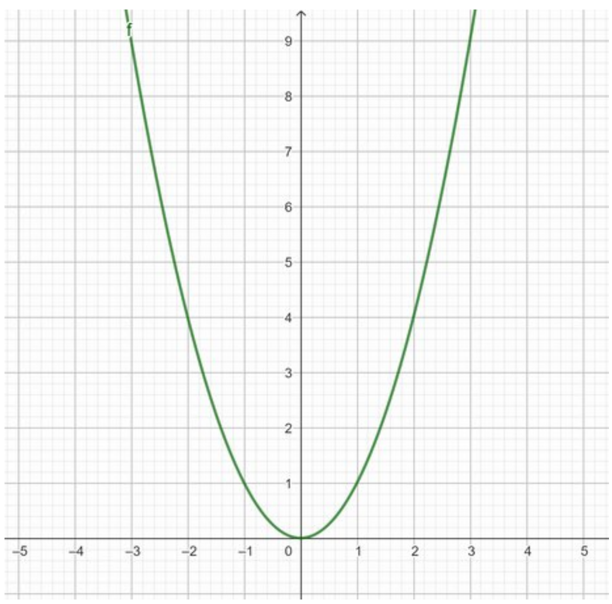
Aufgabe 1

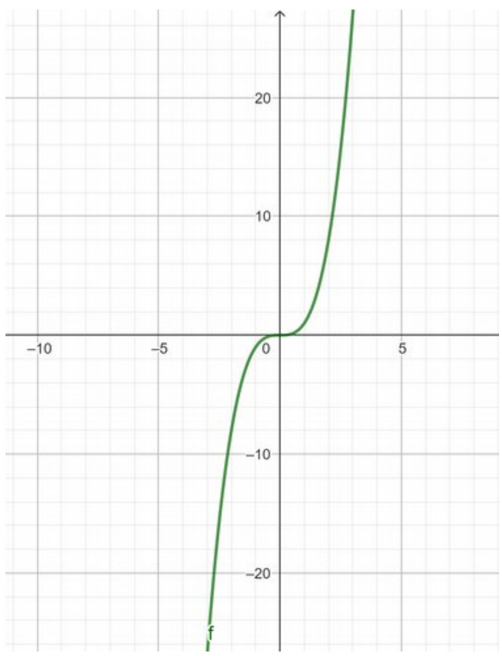
a)

y	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
x	9	4	1	0,25	0	0.25	1	4	9

b)

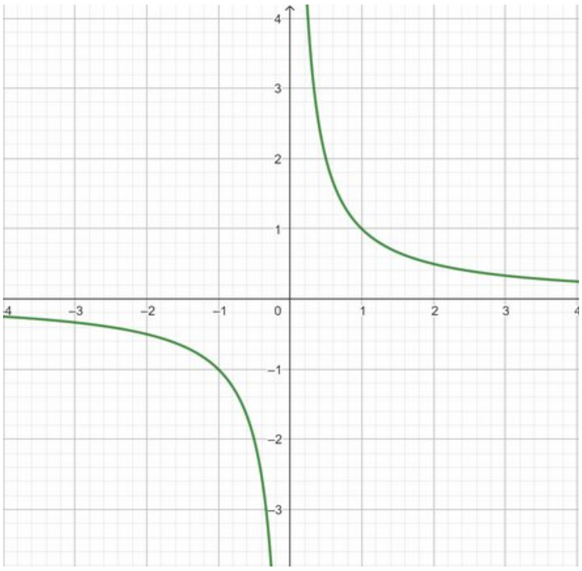
y	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
x	-27	-8	-1	-1/8	0	1/8	1	8	27





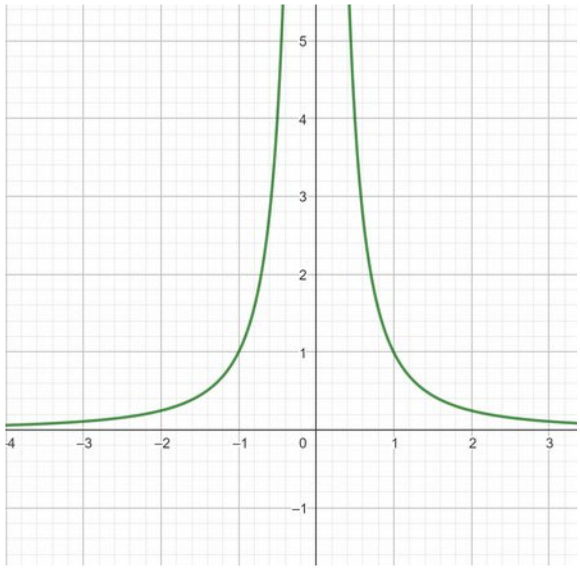
c)

y	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
x	-1/3	-1/2	-1	-2	-	2	1	1/2	1/3



d)

y	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
x	1/9	1/4	1	4	-	4	1	1/4	1/9



Aufgabe 2

a) $y=f(4)=4^6=4096$

b)

$f(x)=1000$

$x^6=1000$

$x=\pm\sqrt[6]{1000}=\pm 3,16$

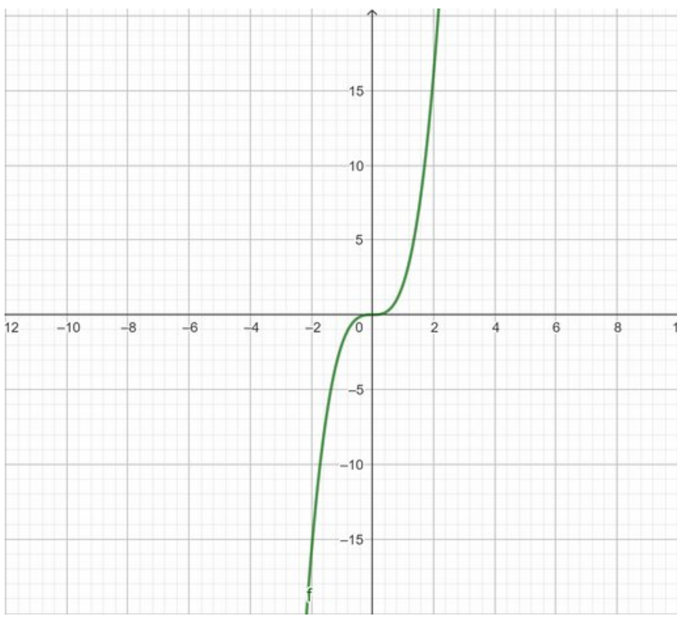
Ergebnis: $x_1=3,16\, und\, x_2=-3,16$

c) $f(8)=8^6=262.144$ Der Punkt liegt auf dem Graphen von f.

Aufgabe 3

a)

y	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2
x	-16	-2	-0,25	0	0,25	2	16



b) $y=f(2)=2\cdot 2^3=2\cdot 8=16$

c)

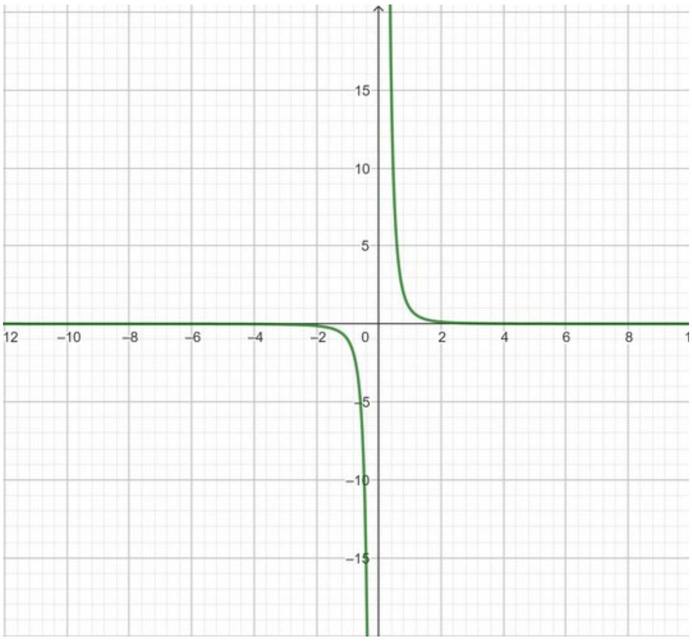
$$f(x)=1000$$
$$2\cdot x^3=1000$$
$$x^3=500$$
$$x=\sqrt[3]{500}=7{,}94$$

d) $f(5)=2\cdot 5^3=2\cdot 125=250\neq 200$ Der Punkt liegt nicht auf f.

Aufgabe 4

a)

x	-3	-2	-1	-0,5	0	0,5	1	2	3
y	-1/27	-1/8	-1	-8	-	8	1	1/8	1/27



b) $y=f(4)=4^{-3}=\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$

c)

$$f(x)=1000$$
$$x^{-3}=1000$$
$$\frac{1}{x^3}=1000$$
$$1=1000x^3$$
$$0{,}001=x^3$$
$$x=\sqrt[3]{0{,}001}=0{,}1$$

Aufgabe 5

Man kann im Koordinatensystem erkennen, dass der Punkt P (2 / 16) auf dem Graphen von f liegt. Daher gilt:

$$f(2)=16$$
$$2^m=16$$

Ein kurzes Ausprobieren ergibt, dass m = 4 ist.

Aufgabe 6

a) Eine Tonne besteht aus 1000 kg. Um die Anzahl an Tonnen zu ermitteln, müssen wir die gegebene Zahl durch 1000 teilen:

$$m=6\cdot 10^{24}:1000=6\cdot 10^{24}:10^3=6\cdot 10^{24-3}=6\cdot 10^{21}$$

Antwort: Die Erde hat eine Masse von $6\cdot 10^{21}$ Tonnen.

b) Ein Kilogramm besteht aus 1000 Gramm. Um die Anzahl an Gramm zu ermitteln, müssen wir die gegebene Zahl mit 1000 multiplizieren:

$$m=6\cdot 10^{24}\cdot 1000=6\cdot 10^{24}\cdot 10^3=6\cdot 10^{24+3}=6\cdot 10^{27}$$

Antwort: Die Erde hat eine Masse von $6\cdot 10^{27}$ Gramm.

c) Wir addieren die Massen von Erde und Mars:

$$m=m_{Erde}+m_{Mars}=6\cdot 10^{24}+6{,}4\cdot 10^{23}=60\cdot 10^{23}+6{,}4\cdot 10^{23}=66{,}4\cdot 10^{23}=6{,}64\cdot 10^{24}$$

Antwort: Die beiden Planeten haben zusammen eine Masse von $6{,}64\cdot 10^{24}$ kg.

d) Wir dividieren die Massen der anderen Himmelskörper jeweils durch die Masse der Erde:

Teil 1: Mars

$$\frac{6{,}4\cdot 10^{23}}{6\cdot 10^{24}}=\frac{6{,}4}{6}\cdot\frac{10^{23}}{10^{24}}=\frac{6{,}4}{6}\cdot 10^{23-24}=\frac{6{,}4}{6}\cdot 10^{-1}=\frac{6{,}4}{6}\cdot 0{,}1=0{,}11$$

Teil 2: Jupiter

$$\frac{1{,}9\cdot 10^{27}}{6\cdot 10^{24}}=\frac{1{,}9}{6}\cdot\frac{10^{27}}{10^{24}}=\frac{1{,}9}{6}\cdot 10^{27-24}=\frac{1{,}9}{6}\cdot 10^{3}=\frac{1{,}9}{6}\cdot 1000=316{,}67$$

Teil 3: Sonne

$$\frac{2\cdot 10^{30}}{6\cdot 10^{24}}=\frac{2}{6}\cdot\frac{10^{30}}{10^{24}}=\frac{2}{6}\cdot 10^{30-24}=\frac{2}{6}\cdot 10^{6}=\frac{2}{6}\cdot 1000000=333.333{,}33$$

Antwort: Der Merkur hat eine Masse von 0,11 Erdmassen, der Jupiter eine Masse von 316,67 Erdmassen und die Sonne eine Masse von 333.333,33 Erdmassen.

e) Da die Sonne eine Masse von 333.333,33 Erdmassen hat, passt die Masse der Erde 333.333,33-mal in die Masse der Sonne hinein.

Aufgabe 7

a) Ein Kilometer besteht aus 1000 Metern. Daher teilen wir den gegebenen Wert durch 1000:

$$d = 1{,}5 \cdot 10^{11} : 1000 = 1{,}5 \cdot 10^{11} : 10^{3} = 1{,}5 \cdot 10^{11-3} = 1{,}5 \cdot 10^{8}$$

Antwort: Der Abstand beträgt $1{,}5 \cdot 10^{8}$ km.

b) Ein Meter besteht aus 100 cm und ein Zentimeter wiederum aus 10 Millimetern. Deshalb besteht ein Meter aus 1000 mm. Daher multiplizieren wir den gegebenen Wert mit 1000:

$$d = 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 1000 = 1{,}5 \cdot 10^{11} \cdot 10^{3} = 1{,}5 \cdot 10^{11+3} = 1{,}5 \cdot 10^{14}$$

Antwort: Der Abstand beträgt $1{,}5 \cdot 10^{14}$ mm.

c) Wir teilen die gegebenen Werte durch den Abstand der Erde zur Sonne:

Teil 1: Merkur

$$\frac{5{,}8 \cdot 10^{10}}{1{,}5 \cdot 10^{11}} = \frac{5{,}8}{1{,}5} \cdot \frac{10^{10}}{10^{11}} = \frac{5{,}8}{1{,}5} \cdot 10^{10-11} = \frac{5{,}8}{1{,}5} \cdot 10^{-1} = \frac{5{,}8}{1{,}5} \cdot 0{,}1 = 0{,}39$$

Teil 2: Uranus

$$\frac{2{,}8 \cdot 10^{12}}{1{,}5 \cdot 10^{11}} = \frac{2{,}8}{1{,}5} \cdot \frac{10^{12}}{10^{11}} = \frac{2{,}8}{1{,}5} \cdot 10^{12-11} = \frac{2{,}8}{1{,}5} \cdot 10^{1} = \frac{2{,}8}{1{,}5} \cdot 10 = 18{,}67$$

Teil 3: Voyager 1

$$\frac{2{,}4 \cdot 10^{13}}{1{,}5 \cdot 10^{11}} = \frac{2{,}4}{1{,}5} \cdot \frac{10^{13}}{10^{11}} = \frac{2{,}4}{1{,}5} \cdot 10^{13-11} = \frac{2{,}4}{1{,}5} \cdot 10^{2} = \frac{2{,}4}{1{,}5} \cdot 100 = 160$$

d) Zuerst bestimmen wir die Entfernung der Raumsonde in km. Ein Kilometer besteht aus 1000 m, daher teilen wir den gegebenen Wert durch 1000:

$$d = 2{,}4 \cdot 10^{13} : 1000 = 2{,}4 \cdot 10^{13} : 10^{3} = 2{,}4 \cdot 10^{13-3} = 2{,}4 \cdot 10^{10} \text{ km}$$

Diesen Wert teilen wir nun durch 300.000, um die Zahl der benötigten Sekunden zu erhalten:

$$t = 2{,}4 \cdot 10^{10} : 300.000 = 2{,}4 \cdot 10^{10} : 3 \cdot 10^{5} = \frac{2{,}4 \cdot 10^{10}}{3 \cdot 10^{5}} = \frac{2{,}4}{3} \cdot 10^{10-5} = \frac{2{,}4}{3} \cdot 100.000 = 80.000$$

Das Licht benötigt 80.000 Sekunden. Eine Minute besteht aus 60 Sekunden. Wir teilen die 80.000 durch 60, um Minuten zu erhalten. Das Ergebnis ist: 1333,33 min. Eine Stunde besteht aus 60 min. Wir teilen die 1333,33 durch 60, um Stunden zu erhalten. Das Ergebnis ist (gerundet): 22,22 Stunden.

Antwort: Das Licht braucht 22,22 Stunden.

Aufgabe 8

a) Ein Kilometer besteht aus 1000 Metern. Daher teilen wir den gegebenen Wert durch 1000:

$$d=5{,}2\cdot 10^{18}:1000=5{,}2\cdot 10^{18}:10^{3}=5{,}2\cdot 10^{18-3}=5{,}2\cdot 10^{15}$$

Antwort: Die Entfernung beträgt $5{,}2\cdot 10^{15}$ km.

b) Wir rechnen zuerst aus, wie weit das Licht in einem Jahr kommt:

Licht legt pro Sekunde 300.000 km zurück:	$300.000=3\cdot 10^{5}$ km
In einer Minute legt das Licht das 60-Fache zurück:	$3\cdot 10^{5}\cdot 60=180\cdot 10^{5}=1{,}8\cdot 10^{7}$ km
In einer Stunde legt das Licht das 60-Fache zurück:	$1{,}8\cdot 10^{7}\cdot 60=108\cdot 10^{7}=1{,}08\cdot 10^{9}$ km
An einem Tag legt das Licht das 24-Fache zurück:	$1{,}08\cdot 10^{9}\cdot 24=25{,}92\cdot 10^{9}=2{,}592\cdot 10^{10}$ km (gerundet: $2{,}59\cdot 10^{10}$ km)
In einem Jahr legt das Licht das 365-Fache zurück:	$2{,}59\cdot 10^{10}\cdot 365=945{,}35\cdot 10^{10}=9{,}4535\cdot 10^{12}$ (gerundet: $9{,}45\cdot 10^{12}$ km)

Jetzt teilen wir die Entfernung des Beteigeuze (in km) durch diesen Wert, um die Anzahl an Lichtjahren zu erhalten:

$$d=\frac{5{,}2\cdot 10^{15}}{9{,}45\cdot 10^{12}}=\frac{5{,}2}{9{,}45}\cdot\frac{10^{15}}{10^{12}}=\frac{5{,}2}{9{,}45}\cdot 10^{15-12}=\frac{5{,}2}{9{,}45}\cdot 10^{3}=\frac{5{,}2}{9{,}45}\cdot 1000=550{,}26$$

Antwort: Die Entfernung beträgt etwa 550,26 Lichtjahre.

c) Wir wandeln den Radius der Sonne in Meter um. Da ein Kilometer aus 1000 m besteht, multiplizieren wir einfach mit 1000:

$$700.000\cdot 1000=7\cdot 10^{5}\cdot 10^{3}=7\cdot 10^{5+3}=7\cdot 10^{8}$$

Und nun dividieren wir den Radius des Beteigeuze durch den Radius der Sonne:

$$\frac{5{,}3\cdot 10^{11}}{7\cdot 10^{8}}=\frac{5{,}3}{7}\cdot\frac{10^{11}}{10^{8}}=\frac{5{,}3}{7}\cdot 10^{11-8}=\frac{5{,}3}{7}\cdot 10^{3}=\frac{5{,}3}{7}\cdot 1000=757{,}14$$

Antwort: Der Radius des Beteigeuze ist 757,14-mal größer als der Radius der Sonne.

d) Wir berechnen zuerst Volumen und Oberfläche der Sonne:

Teil 1: Volumen der Sonne

$$V=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(7\cdot 10^{8})^{3}=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 7^{3}\cdot(10^{8})^{3}=\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 343\cdot 10^{24}=1436{,}76\cdot 10^{24}\approx 1{,}4\cdot 10^{27}\ \text{m}^3$$

Teil 2: Oberfläche der Sonne

$$O = 4\cdot\pi\cdot(7\cdot 10^8)^2 = 4\cdot\pi\cdot 7^2\cdot(10^8)^2 = 4\cdot\pi\cdot 49\cdot 10^{16} = 615{,}75\cdot 10^{16} \approx 6{,}16\cdot 10^{18} \quad \text{m}^2$$

Dann berechnen wir Volumen und Oberfläche von Beteigeuze:

Teil 1: Volumen von Beteigeuze (in m³)

$$V = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(5{,}3\cdot 10^{11})^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot(5{,}3)^3\cdot(10^{11})^3 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 148{,}877\cdot 10^{33} = 623{,}61\cdot 10^{33} \approx 6{,}24\cdot 10^{35}$$

Teil 2: Oberfläche von Beteigeuze (in m²)

$$O = 4\cdot\pi\cdot(5{,}3\cdot 10^{11})^2 = 4\cdot\pi\cdot(5{,}3)^2\cdot(10^{11})^2 = 4\cdot\pi\cdot 28{,}09\cdot 10^{22} = 352{,}989\cdot 10^{22} \approx 3{,}53\cdot 10^{24}$$

e) Wir dividieren das Volumen des Beteigeuze durch das Volumen der Sonne:

$$\frac{6{,}24\cdot 10^{35}}{1{,}4\cdot 10^{27}} = \frac{6{,}24}{1{,}4}\cdot\frac{10^{35}}{10^{27}} = \frac{6{,}24}{1{,}4}\cdot 10^{35-27} = \frac{6{,}24}{1{,}4}\cdot 10^8 = 4{,}4571\cdot 10^8 \approx 4{,}46\cdot 10^8$$

Antwort: Die Sonne passt $4{,}46\cdot 10^8 = 446.000.000$ - mal in den Beteigeuze.

<u>Aufgabe 9</u>

a) $5^{14}\cdot 5^{12} = 5^{14+12} = 5^{26}$

b) $7^4\cdot 7^{-8} = 7^{4-8} = 7^{-4}$

c) $3^2\cdot 3^{-15}\cdot 3^{10} = 3^{2-15}\cdot 3^{10} = 3^{-13}\cdot 3^{10} = 3^{-13+10} = 3^{-3}$

d) $(4^6)^7 = 4^{6\cdot 7} = 4^{42}$

e) $(5^{20})^{\frac{1}{2}} = 5^{20\cdot\frac{1}{2}} = 5^{10}$

f) $((7^3)^5)^2 = (7^{3\cdot 5})^2 = (7^{15})^2 = 7^{15\cdot 2} = 7^{30}$

g) $(5^6)^3\cdot 5^7 = 5^{6\cdot 3}\cdot 5^7 = 5^{18}\cdot 5^7 = 5^{18+7} = 5^{25}$

h) $\frac{7^2\cdot 7^5}{7^4\cdot 7^3} = \frac{7^{2+5}}{7^{4+3}} = \frac{7^7}{7^7} = 1$

i) $x^4\cdot x^7 = x^{4+7} = x^{11}$

j) $x^4\cdot x^3\cdot x^{-5} = x^{4+3}\cdot x^{-5} = x^7\cdot x^{-5} = x^{7-5} = x^2$

k) $(x^{13})^3 = x^{13\cdot 3} = x^{39}$

l) $(x^5\cdot x^{10})^2 = (x^{5+10})^2 = (x^{15})^2 = x^{15\cdot 2} = x^{30}$

m) $((x^3)^3)^4 = (x^{3\cdot 3})^4 = (x^9)^4 = x^{9\cdot 4} = x^{36}$

n) $\frac{x^2\cdot x^4}{x^3\cdot x^2} = \frac{x^{2+4}}{x^{3+2}} = \frac{x^6}{x^5} = x^{6-5} = x^1 = x$

Aufgabe 10

a) $5 \cdot x^3 \cdot x^2 = 5 \cdot x^{3+2} = 5 \cdot x^5$

b) $13x^5 \cdot 21x^9 = 13 \cdot 21 \cdot x^5 \cdot x^9 = 273 \cdot x^{5+9} = 273x^{14}$

c) $6x^3 \cdot 7x^5 \cdot 2x^2 = 6 \cdot 7 \cdot 2 \cdot x^3 \cdot x^5 \cdot x^2 = 84 \cdot x^{3+5} \cdot x^2 = 84 \cdot x^8 \cdot x^2 = 84 \cdot x^{8+2} = 84 \cdot x^{10}$

d) $(4x)^3 = 4^3 \cdot x^3 = 64x^3$

e) $((5x)^2)^3 = (5^2 \cdot x^2)^3 = (25x^2)^3 = 25^3 \cdot (x^2)^3 = 15625 \cdot x^{2\cdot 3} = 15625x^6$

f) $(4x)^3 \cdot (3x)^4 = 4^3 \cdot x^3 \cdot 3^4 \cdot x^4 = 64 \cdot x^3 \cdot 81 \cdot x^4 = 64 \cdot 81 \cdot x^3 \cdot x^4 = 5184 \cdot x^{3+4} = 5184x^7$

g) $\frac{26x^9}{2x^7} = \frac{26}{2} \cdot \frac{x^9}{x^7} = 13 \cdot x^{9-7} = 13x^2$

h) $\frac{5x^3 \cdot 6x^3}{2x^4} = \frac{5 \cdot 6x^3 \cdot x^3}{2x^4} = \frac{30 \cdot x^{3+3}}{2x^4} = \frac{30x^6}{2x^4} = \frac{30}{2} \cdot \frac{x^6}{x^4} = 15 \cdot x^{6-4} = 15x^2$

i) $x^n \cdot x^{m-n} = x^{n+m-n} = x^m$

Aufgabe 11

a) $\frac{x^9 - x^7}{x^7} = \frac{x^7 \cdot (x^2 - 1)}{x^7} = x^2 - 1$

b) $\frac{x^4 + x^3}{x^2} = \frac{x^2 \cdot (x^2 - x)}{x^2} = x^2 - x$

c) $\frac{x^6 + x^4}{x^2} = \frac{x^2 \cdot (x^4 + x^2)}{x^2} = x^4 + x^2$

d) $\frac{x^5 + x^4}{x^3 + x^2} = \frac{x^4 \cdot (x+1)}{x^2 \cdot (x+1)} = \frac{x^4}{x^2} = x^{4-2} = x^2$

Aufgabe 12

a) $x^4 \cdot (x^5 + x^8) = x^4 \cdot x^5 + x^4 \cdot x^8 = x^{4+5} + x^{4+8} = x^9 + x^{12}$

b) $(x^4 - x^7) \cdot (x^6 + x^3) = x^4 \cdot x^6 + x^4 \cdot x^3 - x^7 \cdot x^6 - x^7 \cdot x^3 = x^{10} + x^7 - x^{13} - x^{10} = x^7 - x^{13}$

c) $3x^4 \cdot (4x^2 + 6x^5) = 3x^4 \cdot 4x^2 + 3x^4 \cdot 6x^5 = 12x^6 + 18x^9$

d) $(6x^4 - 3x^2) \cdot (2x^5 + 8x^7) = 6x^4 \cdot 2x^5 + 6x^4 \cdot 8x^7 - 3x^2 \cdot 2x^5 - 3x^2 \cdot 8x^7 =$
$12x^9 + 48x^{11} - 6x^7 - 24x^9 = -12^9 + 49x^{11} - 6x^7$

e) $(x^4 + x^7)^2 = (x^4)^2 + 2 \cdot x^4 \cdot x^7 + (x^7)^2 = x^8 + 2x^{11} + x^{14}$

f) $(x^5-x^3)^2=(x^5)^2-2\cdot x^5\cdot x^3+(x^3)^2=x^{10}-2x^8+x^6$

g) $(x^4+x^2)\cdot(x^4-x^2)=(x^4)^2-(x^2)^2=x^8-x^4$

h) $(5x^4+2x^5)^2=(5x^4)^2+2\cdot 5x^4\cdot 2x^5+(2x^5)^2=25x^8+20x^9+4x^{10}$

i) $(3x^3-5x)^2=(3x^3)^2-2\cdot 3x^3\cdot 5x^2+(5x)^2=9x^6-30x^5+25x^2$

g) $(4x^3-2x)\cdot(4x^3+2x)=(4x^3)^2-(2x)^2=16x^6-4x^2$

Aufgabe 13

Vereinfache die folgenden Ausdrücke so weit wie möglich:

a) $\dfrac{4^3\cdot 4^{-2}\cdot 4^4}{(4^2\cdot 4^3)^2}=\dfrac{4^{3-2+4}}{(4^{2+3})^2}=\dfrac{4^5}{(4^5)^2}=\dfrac{4^5}{4^{5\cdot 2}}=\dfrac{4^5}{4^{10}}=4^{5-10}=4^{-5}$

b) $\dfrac{(x^3\cdot x^9\cdot x^7)^2}{(x^2)^3}=\dfrac{(x^{3+9+7})^2}{x^{2\cdot 3}}=\dfrac{(x^{19})^2}{x^6}=\dfrac{x^{19\cdot 2}}{x^6}=\dfrac{x^{38}}{x^6}=x^{38-6}=x^{32}$

c) $x^3\cdot y^7\cdot x^6=x^{3+6}\cdot y^7=x^9y^7$

d) $\dfrac{x^4\cdot y^5}{y^2}=x^4\cdot y^{5-2}=x^4y^3$

e) $\dfrac{4x^5\cdot 8y^7}{2y^6\cdot x^3}=\dfrac{4\cdot 8\cdot x^5y^7}{2x^3y^6}=\dfrac{32}{2}\cdot x^{5-3}\cdot y^{7-6}=16x^2y$

f) $\dfrac{x^4\cdot y^5-x^3\cdot y^4+x^5\cdot y^3}{(xy)^2}=\dfrac{x^4y^5-x^3y^4+x^5y^3}{x^2y^2}=\dfrac{x^4y^5}{x^2y^2}-\dfrac{x^3y^4}{x^2y^2}+\dfrac{x^5y^3}{x^2y^2}=x^2y^3-xy^2+x^3y$

g) $\dfrac{2x^4\cdot 5x^6}{4y^9}:\dfrac{5x^2\cdot 4x^3}{8y^8}=\dfrac{2\cdot 5\cdot x^{4+6}}{4y^9}\cdot\dfrac{8y^8}{5\cdot 4\cdot x^{2+3}}=\dfrac{10x^{10}\cdot 8y^8}{4y^9\cdot 20x^5}=\dfrac{80x^{10}y^8}{80x^5y^9}=\dfrac{80}{80}\cdot x^{10-5}\cdot y^{8-9}=x^5y^{-1}$