Aufgaben (Teil B)

Aufgabe 1

Die Punkte A(8 | 4 | 0), B(0 | 6 | 2), C(0 | 0 | 8) und D(8 | –1 | 5) bestimmen als Eckpunkte ein Viereck.

a) Stellen Sie das Viereck in einem räumlichen Koordinatensystem dar!

b) Weisen Sie nach, daß das Dreieck ABC rechtwinklig und gleichschenklig ist!

c) Untersuchen Sie, ob das Viereck ABCD ein Trapez ist!

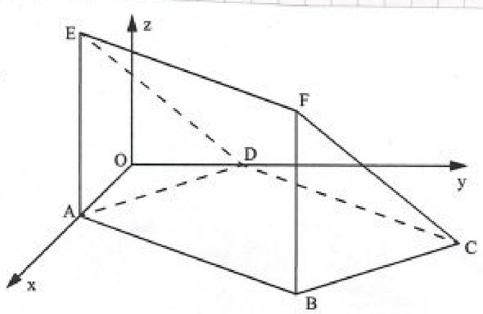
d) Berechnen Sie die Größe des Flächeninhalts des Vierecks ABCD!

Aufgabe 2

Teil B1

B1 In einem kartesischen Koordinatensystem ist ein Prisma ABCDEF durch die Koordinaten der Eckpunkte A(4; 0; 0), B(10; 8; 0), C(6; 11; 0), D(0; 3; 0), E(4; 0; 5) gegeben (siehe Skizze).

(Skizze nicht maßstäblich)



a) Zeigen Sie, daß das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes F.

c) Bestimme rechnerisch das Volumen des Prismas.

Teil B2

B2 In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(3; 2; 1), B(4; 6; 7), C(1; –6; –11), D(1; 3; 4), F(6; 5; 4) und S($\frac{7}{2}$; 4; 4) gegeben.

a) Weisen Sie nach, daß das Dreieck ABD nicht rechtwinklig ist, und berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ABD.

b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes T so, daß das Viereck ABDT ein Trapez mit $\overrightarrow{TD} = 2\overrightarrow{AB}$ ist.

Hinweis: Den Flächeninhalt eines Dreiecks kann man mit zwei verschiedenen Formeln ausrechnen. Entweder mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h_g$ (mit g einer Seite des Dreiecks und h_g der Höhe dieser Seite) oder mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g_1\cdot g_2\cdot\sin(\varphi)$ (mit g_1 und g_2 als zwei Seiten des Dreiecks und φ dem Winkel zwischen diesen beiden Seiten). Die zweite Formel kann verwendet werden, wenn die Höhe nicht gegeben ist.

Aufgabe 3

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte A(0|0|0), B(12|4|3), C(4|3|12) und D(4|$\frac{4}{3}$|1) gegeben.

2.1 Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C Eckpunkte eines gleichschenkligen Dreiecks sind.
Bestimmen Sie die Größe der Innenwinkel und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

2.2 Weisen Sie nach, dass der Punkt D auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

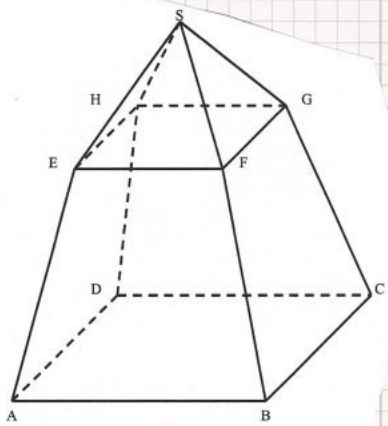
2.3 Der Vektor $\overrightarrow{CB}$ lässt sich darstellen durch $\overrightarrow{CB} = r\overrightarrow{CD} + s\overrightarrow{CA}$, $r, s \in \mathbb{R}$.
Bestimmen Sie die Werte für r und s.

Hinweis: Den Flächeninhalt eines Dreiecks kann man mit zwei verschiedenen Formeln ausrechnen.

Entweder mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h_g$ (mit g einer Seite des Dreiecks und h_g der Höhe dieser Seite) oder mit der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \sin(\varphi)$ (mit g_1 und g_2 als zwei Seiten des Dreiecks und φ dem Winkel zwischen diesen beiden Seiten). Die zweite Formel kann verwendet werden, wenn die Höhe nicht gegeben ist.

Aufgabe 4

Eine Gartenlaterne hat die Form eines geraden quadratischen Pyramidenstumpfes mit einer aufgesetzten geraden quadratischen Pyramide.
Die Seitenlänge der Grundfläche des Pyramidenstumpfes beträgt 6 dm, die Seitenlänge der Deckfläche 4 dm.
Die Höhe des Pyramidenstumpfes beträgt 8 dm.
Die gesamte Laterne hat eine Höhe von 9,5 dm.

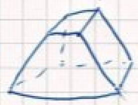


(Skizze nicht maßstäblich)

a) Der Punkt D liegt im Koordinatenursprung. Die Punkte A(6; 0; 0) und E(5; 1; 8) sind Eckpunkte des Pyramidenstumpfes.
Eine Längeneinheit entspricht einem Dezimeter.
Bestimmen Sie die Koordinaten der restlichen Eckpunkte!
Stellen Sie die Laterne in einem kartesischen Koordinatensystem dar!

b) Die Seitenflächen des Pyramidenstumpfes bestehen aus Glas.
Berechnen Sie die Größe der gesamten Glasfläche in Quadratmetern!

Pyramiden-stumpf →



gerade Pyramide ≙
Spitze befindet sich genau über der Mitte der Grundfläche

Hinweis: Den Flächeninhalt eines Dreiecks kann man mit zwei verschiedenen Formeln ausrechnen. Entweder mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h_g$ (mit g einer Seite des Dreiecks und h_g der Höhe dieser Seite) oder mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g_1\cdot g_2\cdot \sin(\varphi)$ (mit g_1 und g_2 als zwei Seiten des Dreiecks und φ dem Winkel zwischen diesen beiden Seiten). Die zweite Formel kann verwendet werden, wenn die Höhe nicht gegeben ist.

c) Im Mittelpunkt der Grundfläche des Pyramidenstumpfes soll eine Kerze stehen.
In welchem Punkt befindet sich die Spitze der Kerzenflamme, wenn sie von den Eckpunkten der Grundfläche genauso weit entfernt ist wie von der Pyramidenspitze?

Aufgabe 5

Gegeben sei das Viereck ABCD mit A(1/0/2), B(7/2/6), C(5/2/5) und D(2/1/3).

a) Bestimme rechnerisch, ob es sich um eine besondere Art von Vierecks handelt und wenn ja, gib diese Art an.

b) Bestimme die Größe der vier Innenwinkel.

c) Bestimme, wie man die Koordinaten von Punkt D verändern muss, so dass ABCD ein Parallelogramm ist.

Aufgabe 6

) Gegeben sei das Viereck ABCD mit A(2/1/4), B(4/5/4), C(-1/6/5) und D(-3/2/5).

a) Bestimme die Länge der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$ und $\overline{AD}$

b) Bestimme die Größe der Winkel α, β, γ und δ.

c) Entscheide, ob es sich um ein besonderes Viereck handelt und wenn ja, um welches. Begründe deine Entscheidung.

d) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks ABCD.

e) Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks ABD.

Hinweis: Den Flächeninhalt eines Dreiecks kann man mit zwei verschiedenen Formeln ausrechnen. Entweder mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h_g$ (mit g einer Seite des Dreiecks und h_g der Höhe dieser Seite) oder mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g_1\cdot g_2\cdot\sin(\varphi)$ (mit g_1 und g_2 als zwei Seiten des Dreiecks und φ dem Winkel zwischen diesen beiden Seiten). Die zweite Formel kann verwendet werden, wenn die Höhe nicht gegeben ist.

Aufgabe 7

Gegeben ist eine Pyramide ABCDS mit viereckiger Grundfläche, wobei S die Spitze der Pyramide ist. Die Eckpunkte haben die Koordinaten A(4/0/0), B(4/8/0), C(0/8/0), D(0/0/0) und S(2/4/10).

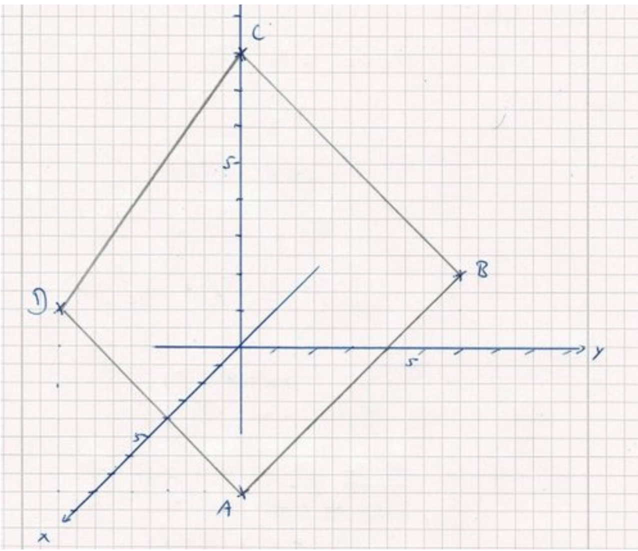
a) Zeichne die Pyramide in einem dreidimensionalen Koordinatensystem.
b) Wir betrachten die viereckige Grundfläche ABCD. Überprüfe rechnerisch, ob es sich um ein besonderes Viereck handelt (und wenn ja, gib die Art des besonderen Vierecks an).
c) Wir betrachten das Dreieck ABS. Überprüfe rechnerisch, ob es sich um ein besonderes Dreieck handelt (und wenn ja, gib die Art des besonderen Vierecks an).
d) Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes der Grundfläche.
e) Zeige rechnerisch, dass die Verbindung vom Mittelpunkt der Grundfläche zur Spitze senkrecht zur Diagonalen von A nach C ist.
f) Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt des Dreiecks ABS.
g) Bestimme rechnerisch das Volumen der Pyramide.

Hinweis: Den Flächeninhalt eines Dreiecks kann man mit zwei verschiedenen Formeln ausrechnen. Entweder mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h_g$ (mit g einer Seite des Dreiecks und h_g der Höhe dieser Seite) oder mit der Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g_1\cdot g_2\cdot\sin(\varphi)$ (mit g_1 und g_2 als zwei Seiten des Dreiecks und φ dem Winkel zwischen diesen beiden Seiten). Die zweite Formel kann verwendet werden, wenn die Höhe nicht gegeben ist.

Lösungen (Teil B)

Aufgabe 1

a)



b)

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-8 \\ 6-4 \\ 2-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{AB}| = \sqrt{64+4+4} = \sqrt{72}$ LE

$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-6 \\ 8-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad |\vec{BC}| = \sqrt{36+36} = \sqrt{72}$ LE

$\Rightarrow$ Dreieck gleichschenklig

$\vec{BA} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix} = 12 - 12 = 0$

$\Rightarrow \vec{BA} \perp \vec{BC}$, rechter Winkel bei B

$\Rightarrow$ Dreieck rechtwinklig

c)

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\quad \vec{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 8-8 \\ -1-4 \\ 5-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}$

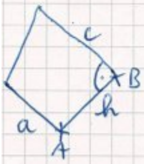
$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 0-8 \\ 0-(-1) \\ 8-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{BC} = \frac{6}{5} \cdot \vec{AD}$

$\Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{AD}$

$\Rightarrow$ Trapez

d)



Weil bei B ein rechter Winkel ist, kann man die Höhe schnell angeben:
$h = |\vec{AB}|$

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (|\vec{AD}| + |\vec{BC}|) \cdot |\vec{AB}|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\left|\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix}\right| + \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ 6 \end{pmatrix}\right| \right) \cdot \left|\begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{50} + \sqrt{72}) \cdot \sqrt{72}$$
$$= 66 \text{ FE}$$

Aufgabe 2

Teil B1

a)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} 10-4 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BC} = \begin{pmatrix} 6-10 \\ 11-8 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{DC} = \begin{pmatrix} 6-0 \\ 11-3 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} 0-4 \\ 3-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vec{AB} = \vec{DC} \Rightarrow \vec{AB} \parallel \vec{DC}$ parallel
$\vec{BC} = \vec{AD} \Rightarrow \vec{BC} \parallel \vec{AD}$ "

$$\vec{AB} \circ \vec{BC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$\Rightarrow \vec{AB} \perp \vec{BC}$ rechter Winkel

$\Rightarrow$ Rechteck

b)

E befindet sich genau über A
(nur bezüglich der z-Koordinate 5 LE höher)
$\Rightarrow$ F hat dasselbe Verhältnis zu B

$F(10|8|5)$

c)

$V_{Prisma} = G \cdot h$

G: Grundfläche Dreieck BCF $= A_{Dreieck}$
h: räuml. Höhe, hier $h = |\vec{AB}|$

$\vec{BF}$ ist senkrecht zu $\vec{BC}$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BF}|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left|\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right|$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{4^2+3^2} \cdot 5$$
$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5$$
$$= 12{,}5 \text{ FE}$$

$$V = 12{,}5 \cdot |\overrightarrow{AB}|$$
$$= 12{,}5 \cdot \left|\begin{pmatrix}6\\8\\0\end{pmatrix}\right|$$
$$= 12{,}5 \cdot \sqrt{6^2+8^2}$$
$$= 12{,}5 \cdot 10$$
$$= 125 \text{ VE}$$

Teil B2

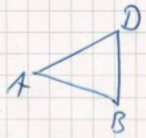
a)

a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix} = 20 \neq 0$$
$$\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix}-1\\-4\\-6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\-3\\-3\end{pmatrix} = 33 \neq 0$$
$$\overrightarrow{DB} \circ \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix}3\\3\\3\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix} = -6 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Kein rechter Winkel vorhanden

Das Dreieck ist nicht rechtwinklig und die Höhe ist nicht gegeben. Daher verwenden wir die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \sin(\varphi)$. Als die Dreiecksseiten g_1 und g_2 verwenden wir die Seiten AB und AD. Der Winkel φ ist dann der Winkel zwischen AB und AD.

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+16+36} = \sqrt{53}$$

$$|AD| = \left|\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$$

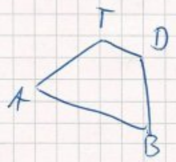
$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\4\\6\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{53} \cdot \sqrt{14}} = \frac{-2+4+18}{\sqrt{742}} = \frac{20}{\sqrt{742}}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{742}}\right) = 42{,}76\,°$$

Daraus folgt: $A = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{53}\cdot\sqrt{14}\cdot\sin(42{,}76) = 9{,}25$

Der Flächeninhalt ist 9,25 FE groß.

b)



$$\overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BA}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-4\\-6\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-0{,}5\\-2\\-3\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}0{,}5\\1\\1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow T\,(0{,}5/1/1)$$

Aufgabe 3

a)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{12^2+4^2+3^2} = 13$ LE

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2+3^2+12^2} = 13$ LE

$\Rightarrow$ gleichschenkliges Dreieck

$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}4-12\\3-4\\12-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-8\\-1\\9\end{pmatrix}$ $\quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-8)^2+(-1)^2+9^2} = \sqrt{146}$ LE

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \frac{\begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}4\\3\\12\end{pmatrix}}{13\cdot 13} = \frac{96}{169}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{96}{169}\right) \approx 55{,}39°$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA}\circ\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix}-12\\-4\\-3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-8\\-1\\9\end{pmatrix}}{13\cdot\sqrt{146}} = \frac{73}{13\sqrt{146}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{73}{13\cdot\sqrt{146}}\right) \approx 62{,}31°$$

$$\gamma = 180° - \alpha - \beta = 62{,}3°$$

(ohne Runden 62,31°)

α und γ sind Basiswinkel. Basiswinkel sind im gleichschenkl. Dr. gleich groß

Nun zum Flächeninhalt: Da das Dreieck nicht rechtwinklig und die Höhe nicht gegeben ist, verwenden wir die Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g_1\cdot g_2\cdot\sin(\varphi)$. Als die beiden Dreiecksseiten verwenden wir die beiden (gleich langen Schenkel) und der Winkel ist der Winkel zwischen den beiden Schenkeln:

$$A=\frac{1}{2}\cdot 13\cdot 13\cdot\sin(55{,}39)=69{,}55$$

Der Flächeninhalt beträgt 69,55 FE.

b) Der Punkt D liegt auf der Strecke AB, wenn er zwischen A und B liegt. In diesem Fall muss es ein r (zwischen 0 und 1) geben, so dass $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+r\cdot\overrightarrow{AB}$ gilt.

Daraus folgt:

$$\begin{pmatrix}4\\ \frac{4}{3}\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4\\ \frac{4}{3}\\ 1\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}12\\4\\3\end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist r = 1/3. Damit ist die obige Bedingung erfüllt. Der Punkt liegt auf der Strecke.

c)

$$\overrightarrow{CB}=r\cdot\overrightarrow{CD}+s\cdot\overrightarrow{CA}$$

$$\begin{pmatrix}8\\1\\-9\end{pmatrix}=r\cdot\begin{pmatrix}0\\-5/3\\-11\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-4\\-3\\-12\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\ 8 = -4s$$
$$1 = -\frac{5}{3}r - 3s$$
$$-9 = -11r - 12s$$

Aus $8=-4s$ folgt: $\underline{s=-2}$

$$\Rightarrow\ 1 = \frac{5}{3}r - 3\cdot(-2)$$
$$1 = -\frac{5}{3}r + 6$$
$$-5 = -\frac{5}{3}r$$
$$\frac{1}{3} = r$$

und

$-9 = -11r - 12 \cdot (-2)$

$-9 = -11r + 24$

$-33 = -11r$

$\frac{1}{3} = 1$

Alternative: I. $8 = -4s$

II. $1 = -\frac{5}{3}r - 3s$

III. $-9 = -11r - 12s$

GTR...

$s = -2$

$r = \frac{1}{3}$

Aufgabe 4

a)

Die Pyramide ist gerade ⇒
Die Spitze befindet sich genau über der Mitte des Quadrats ABCD.
Das Quadrat ABCD muss in der xy-Ebene liegen, da A und D die z-Koordinate 0 haben und die z-Koordinate von E genau der Höhe des Stumpfs entspricht.
(Wenn die Pyramide „gekippt" wäre und ABCD sich nicht in der xy-Ebene befände, so müsste E einen anderen z-Wert haben.

A(6/0/0)

B(6/6/0) da die Kante $\overline{AB}$ parallel zur y-Achse verläuft und die Kantenlänge 6 ist

C(0/6/0) da die Kante $\overline{DC}$ auf der y-Achse liegt und 6 lang ist

D(0/0/0)

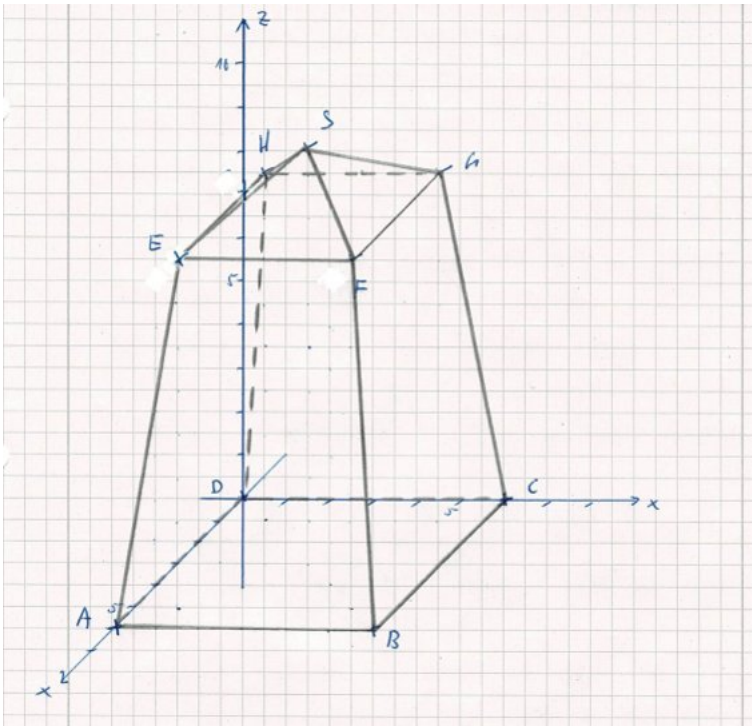
E(5/1/8)

F(5/5/8) da EFGH ein Quadrat mit Kantenlänge 4 ist und die Kanten parallel zur x- bzw. y-Achse sind

G(1/5/8) (analog)

H(1/1/8)

S(3/3/9,5) da M(3/3/0) die Mitte des unteren Quadrats ist & die Spitze 9,5 Einheiten darüber ist



b)

Die Seitenflächen sind 4 gleich große Trapeze
Wir rechnen die Fläche von einem Trapez (ABEF) aus und vervierfachen das Ergebnis.

Leider kennen wir allerdings die Höhe im Trapez nicht. Um die Fläche eines Trapezes auszurechnen zerteilen wir es daher in zwei Dreiecke (ABF und AFE). Für deren Flächen benutzen wir die Formel $A=\frac{1}{2}\cdot g_1\cdot g_2\cdot\sin(\varphi)$.

Teil 1: Dreieck ABF

Die beiden Seiten des Dreiecks sind AB und AF. Der Winkel ist der Winkel zwischen AB und AF.

$$|\overrightarrow{AB}|=\left|\begin{pmatrix}6-6\\6-0\\0-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{36}$$

$$|\overrightarrow{AF}|=\left|\begin{pmatrix}5-6\\5-0\\8-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-1\\5\\8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+25+64}=\sqrt{90}$$

$$\cos\varphi=\frac{\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\5\\8\end{pmatrix}}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{90}}=\frac{30}{\sqrt{3240}}$$

$$\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{30}{\sqrt{3240}}\right)=58{,}19°$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{36}\cdot\sqrt{90}\cdot\sin(58{,}19)=24{,}19$$

Teil 2: Dreieck AFE

Die beiden Seiten des Dreicks sind FE und FA. Der Winkel ist der Winkel zwischen FE und FA.

$$|\overrightarrow{FE}|=\left|\begin{pmatrix}5-5\\1-5\\8-8\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\right|=\sqrt{16}$$

$$|\overrightarrow{FA}|=\left|\begin{pmatrix}1\\-5\\-8\end{pmatrix}\right|=\sqrt{1+25+64}=\sqrt{90}$$

$$\cos\varphi=\frac{\begin{pmatrix}0\\-4\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\-5\\-8\end{pmatrix}}{\sqrt{16}\cdot\sqrt{90}}=\frac{20}{\sqrt{1440}}$$

$$\varphi=\cos^{-1}\left(\frac{20}{\sqrt{1440}}\right)=58{,}19\,°$$

$$A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{16}\cdot\sqrt{90}\cdot\sin(58{,}19\,°)=16{,}12$$

Daraus folgt: $A_{Trapez}=24{,}19+16{,}12=40{,}31$

Die Glasfläche ist 4-mal so groß, also: 4 mal 40,31 = 161,24 FE = 161,24 dm² = 1,6124 m²

c)

Ein Objekt, dass über der Mitte steht, ist von den Eckpunkten unten immer gleich weit entfernt. Es genügt also, einen Eckpunkt zu nehmen.

$P(3/3/z)$ ... ein Punkt über der Mitte

Abstand von P zur Spitze S = Abstand von P zum Eckpunkt D

$$|\overrightarrow{PS}|=|\overrightarrow{PD}|$$

$$\left|\begin{pmatrix}3-3\\3-3\\9{,}5-z\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0-3\\0-3\\0-z\end{pmatrix}\right|$$

$$\left|\begin{pmatrix}0\\0\\9{,}5-z\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-3\\-3\\-z\end{pmatrix}\right|$$

$$\sqrt{(9{,}5-z)^2}=\sqrt{(-3)^2+(-3)^2+(-z)^2}$$

$$\sqrt{(9{,}5-z)^2}=\sqrt{9+9+z^2}$$

$$\sqrt{(9{,}5-z)^2}=\sqrt{18+z^2} \quad |()^2$$

$$(9{,}5-z)^2 = 18+z^2 \quad |\text{Bin. Formel}$$
$$90{,}25-19z+z^2 = 18+z^2 \quad |-z^2$$
$$90{,}25-19z = 18 \quad |-90{,}25$$
$$-19z = -72{,}25 \quad |:(-19)$$
$$\underline{z \approx 3{,}80}$$

Aufgabe 5

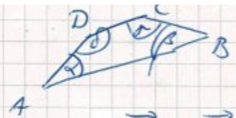
a)

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix}7-1\\2-0\\6-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix} \qquad |\vec{AB}| = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}\text{ LE}$$
$$\vec{DC} = \begin{pmatrix}5-2\\2-1\\5-3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix} \qquad |\vec{DC}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}\text{ LE}$$
$$\vec{AD} = \begin{pmatrix}2-1\\1-0\\3-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad |\vec{AD}| = \sqrt{3}\text{ LE}$$
$$\vec{BC} = \begin{pmatrix}5-7\\2-2\\5-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad |\vec{BC}| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}\text{ LE}$$

Die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ sind parallel zueinander, da $\vec{AB} = 2\cdot\vec{DC}$

$\Rightarrow$ ABCD ist ein Trapez

b)



$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB}\circ\vec{AD}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix}6\\2\\4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{3}} = \frac{12}{\sqrt{168}}$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{12}{\sqrt{168}}\right) \approx 22{,}21°$$
$$\cos\beta = \frac{\vec{BA}\circ\vec{BC}}{|\vec{BA}|\cdot|\vec{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix}-6\\-2\\-4\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\0\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{56}\cdot\sqrt{5}} = \frac{16}{\sqrt{280}}$$
$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{16}{\sqrt{280}}\right) \approx 17{,}02°$$
$$\cos\gamma = \frac{\vec{CB}\circ\vec{CD}}{|\vec{CB}|\cdot|\vec{CD}|} = \frac{\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-3\\-1\\-2\end{pmatrix}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-8}{\sqrt{70}}$$
$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-8}{\sqrt{70}}\right) \approx 162{,}98°$$
$$\cos\delta = \frac{\vec{DC}\circ\vec{DA}}{|\vec{DC}|\cdot|\vec{DA}|} = \frac{\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\end{pmatrix}}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{3}} = \frac{-6}{\sqrt{42}}$$
$$\delta = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{42}}\right) \approx 157{,}79°$$

c)

$$\vec{OD} = \vec{OC} + \vec{BA} = \begin{pmatrix}5\\2\\5\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-6\\-2\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow D(-1/0/1)$$

Aufgabe 6

a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-1 \\ 4-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \approx 4{,}47\ LE$$

$$\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -1-4 \\ 6-5 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25+1+1} = \sqrt{27} \approx 5{,}196\ LE$$

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -3-(-1) \\ 2-6 \\ 5-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{CD}| \approx 4{,}47\ LE$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -3-2 \\ 2-1 \\ 5-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad |\overrightarrow{AD}| \approx 5{,}196\ LE$$

b)

$$\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{-6}{\sqrt{540}}$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{540}}\right) \approx 104{,}96°$$

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{6}{\sqrt{540}}$$

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{540}}\right) \approx 75{,}04°$$

$$\cos\gamma = \frac{\overrightarrow{CD} \circ \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CD}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{-6}{\sqrt{540}}$$

$$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{-6}{\sqrt{540}}\right) \approx 104{,}96°$$

$$\cos\delta = \frac{\overrightarrow{DC} \circ \overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{DA}|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{20} \cdot \sqrt{27}} = \frac{6}{\sqrt{540}}$$

$$\delta = \cos^{-1}\left(\frac{6}{\sqrt{540}}\right) \approx 75{,}04°$$

c)

Es gilt $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$

Es handelt sich daher um ein Parallelogramm.

d) und e) Wir kennen leider die Höhe im Parallelogramm nicht und es gibt keinen rechten Winkel. Daher benutzen wir die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \sin(\varphi)$ für Dreiecke. Dafür zerlegen wir das Parallelogramm in zwei Dreiecke, ABD und DBC.

Teil 1: Dreieck ABD

Die beiden Seiten des Dreiecks sind AB und AD. Der Winkel ist der Winkel zwischen AB und AD.

$$A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{20} \cdot \sqrt{27} \cdot \sin(104{,}96) = 11{,}23$$

Teil 1: Dreieck DBC

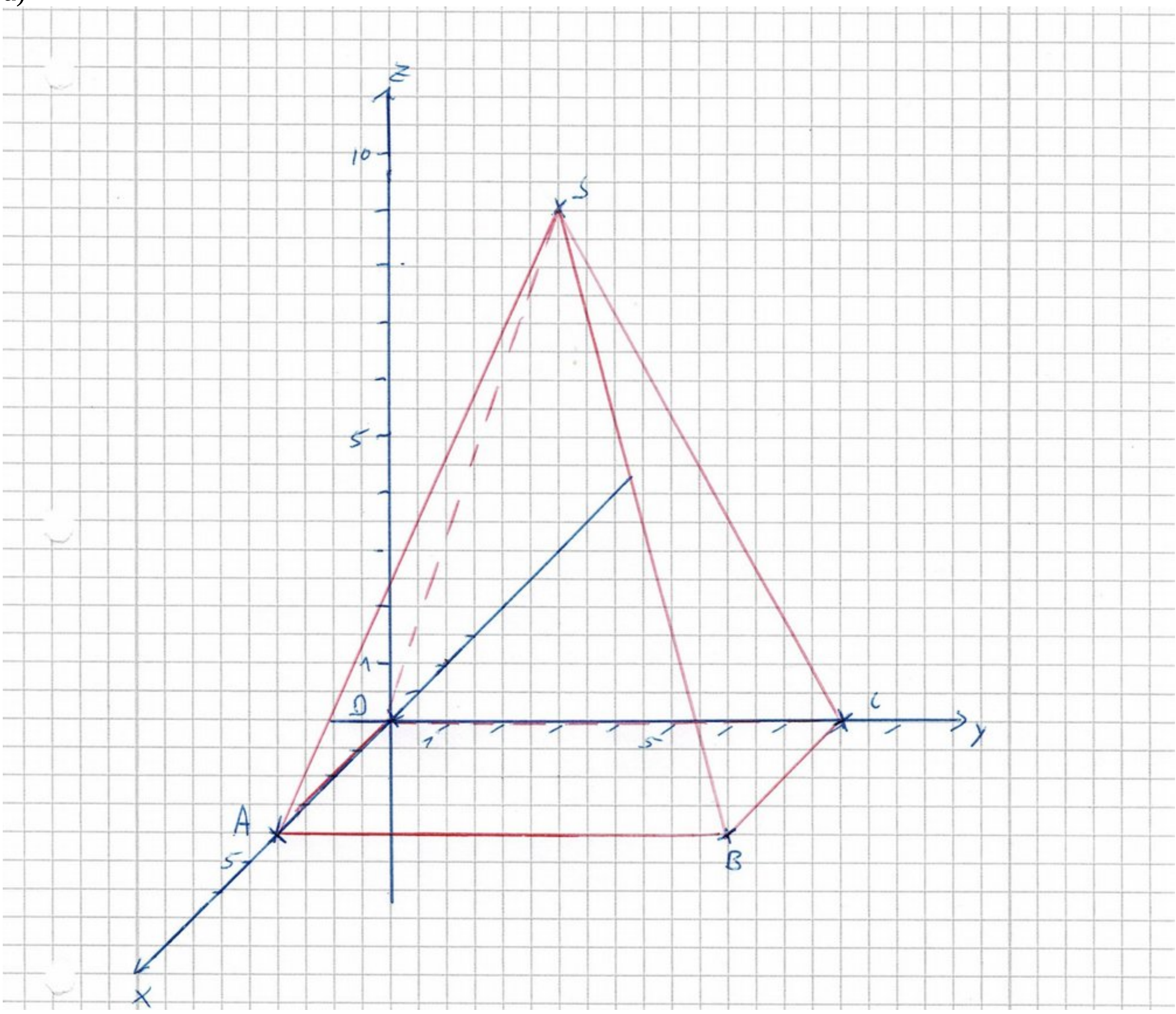
Die beiden Seiten des Dreiecks sind CB und CD. Der Winkel ist der Winkel zwischen BD und BC.

$$A=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{27}\cdot\sqrt{20}\cdot\sin(104{,}96)=11{,}23$$

Antwort: Das Parallelogramm hat einen Flächeninhalt von 11,23 + 11,23 = 22,46 FE und das Dreieck von 11,23 FE.

Aufgabe 7

a)



b)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}4-4\\8-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}0-0\\8-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$$

Die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{DC}$ sind also gleich. Daher handelt es sich um ein Parallelogramm. Wir müssen aber noch überprüfen, ob es zusätzlich ein Rechteck oder Quadrat sein könnte.

$$\overrightarrow{AB}\circ\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}0-4\\0-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-4\\0\\0\end{pmatrix}=0$$

Bei A befindet sich also ein rechter Winkel.

$$|\overrightarrow{AB}|=8$$

$$|\overrightarrow{AD}|=4$$

Die Seiten sind nicht alle gleich lang.
Es handelt sich daher um ein Rechteck.

c)

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{64}=8$$

$$|\overrightarrow{AS}|=\left|\begin{pmatrix}2-4\\4-0\\10-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\4\\10\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+16+100}=\sqrt{120}$$

$$|\overrightarrow{BS}|=\left|\begin{pmatrix}2-4\\4-8\\10-0\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}-2\\-4\\10\end{pmatrix}\right|=\sqrt{4+16+100}=\sqrt{120}$$

Das Dreieck ist ein gleichschenkliges Dreieck mit der Seite AB als Basis.

d)

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+0{,}5\cdot\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}0-4\\8-0\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+0{,}5\cdot\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\0\end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten M (2/4/0).

e)

$$\overrightarrow{MS}=\begin{pmatrix}2-2\\4-4\\10-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\10\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-4\\8\\0\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{MS} \circ \overrightarrow{Ac} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

Damit ist der rechte Winkel bewiesen.

f) Da wir beim Dreieck ABS die Höhe nicht kennen, verwenden wir die Formel $A = \frac{1}{2} \cdot g_1 \cdot g_2 \cdot \sin(\varphi)$ mit den Seiten AS und AB als den beiden Seiten und dem Winkel zwischen AS und AB als dem Winkel.

$$|\overrightarrow{AS}| = \sqrt{120} \quad \text{und} \quad |\overrightarrow{AB}| = 8$$

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}}{\sqrt{64} \cdot \sqrt{120}} = \frac{32}{\sqrt{7680}}$$

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{32}{\sqrt{7680}}\right) = 68{,}58°$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot \sqrt{120} \cdot \sin(68{,}58) = 40{,}79$$

Der Flächeninhalt beträgt 40,79 FE.

g) Die Grundfläche ist ein Rechteck, dessen Seiten jeweils 8 LE bzw. 4 LE lang sind. Sein Flächeninhalt beträgt 4 mal 8 = 32 FE.
Die Höhe der Pyramide beträgt 10 LE. Die Spitze befindet sich genau 10 LE über der Grundfläche und die Verbindung Spitze-Mitte der Grundfläche steht senkrecht auf der Diagonalen der Grundfläche. Daher muss diese Verbindung der Höhe entsprechen. Daher gilt:

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot A_{Grundfläche} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 32 \cdot 10 = \frac{320}{3} \quad \text{VE}$$