AUFGABEN (TEIL A)

Aufgabe 1

Rechne jeweils aus:

a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = ?$

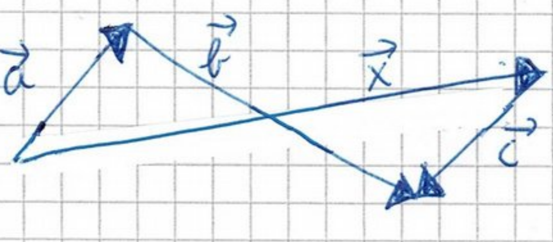
b) $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = ?$

c) $5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 7 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$

d) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \cdot 3 = ?$

Aufgabe 2

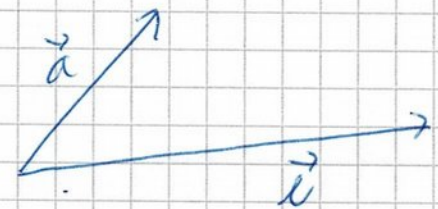
a) Drücke den Vektor $\vec{x}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:



b) Drücke den Vektor $\vec{x}$ mit Hilfe der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aus:

Aufgabe 3

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:



a) Zeichne einen passenden Vektorpfeil für $\vec{a} + \vec{b}$

b) Zeichne einen passenden Vektorpfeil für $\vec{a} - \vec{b}$

c) Zeichne einen passenden Vektorpfeil für $2\vec{a} + \vec{b}$

Aufgabe 4

Gegeben ist das Viereck ABCD mit
A(3/4/0), B(0/4/-4), C(-3/4/0) und D(0/4/4).

a) Zeichne das Viereck in ein dreidimensionales Koordinatensystem

b) Gib einen Vektor an, der die Diagonale von A nach C beschreibt

c) Bestimme die Länge aller 4 Seiten des Vierecks

d) Bestimme rechnerisch, ob es in diesem Viereck rechte Winkel gibt

e) Gib an, ob das Viereck ein besonderes Viereck ist. Und wenn ja, dann gib an, um welches es sich handelt.

f) Gib einen Term an, mit dem man den Winkel bei A (zwischen $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$) ausrechnen kann.

g) Mit dem Term $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{DA}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{DA}|}$ kann man einen Winkel φ ausrechnen. Trage diesen Winkel in deine Zeichnung ein

Aufgabe 5

Gegeben ist das Viereck ABCD mit A(0/0/0), B(6/0/0), C(8/3/0) und D(2/3/0).

a) Zeichne das Viereck in ein dreidimensionales Koordinatensystem

b) Zeige rechnerisch, dass kein Winkel im Viereck ein rechter Winkel ist

c) Zeige rechnerisch, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ parallel zueinander sind

d) Gib an, ob es sich um ein besonderes Viereck handelt und wenn ja, um welches

e) Gib einen Term an, mit dem man den Winkel bei B (zwischen BA und BC) ausrechnen kann.

f) Bestimme den Flächeninhalt des Vierecks

Aufgabe 6

Gegeben ist das Viereck ABCD mit $A(2|1|1)$, $B(3|5|2)$, $C(0|5|4)$ und $D(-1|1|3)$.

a) Zeige rechnerisch, dass es sich um ein Parallelogramm handelt

b) Entscheide, ob es sich zugleich um ein Rechteck handelt, und begründe deine Entscheidung

c) Entscheide, ob es sich zugleich um eine Raute handelt, und begründe deine Entscheidung.

Aufgabe 7

Gegeben ist das Dreieck ABC mit $A(3|0|0)$, $B(0|5|0)$ und $C(0|0|2)$.

a) Zeichne das Dreieck in ein dreidimensionales Koordinatensystem

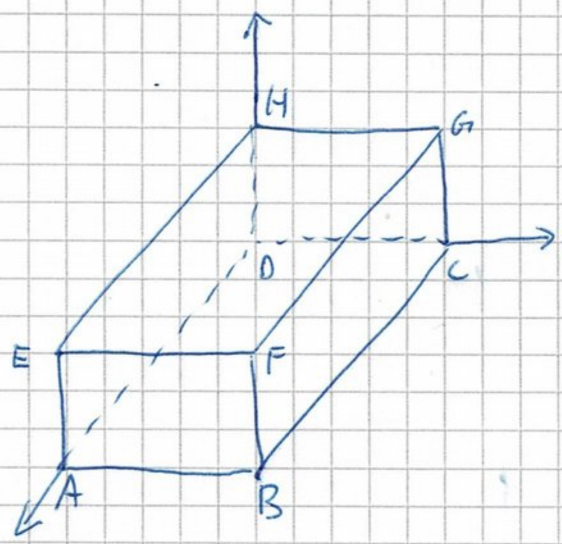
b) Bestimme rechnerisch, ob es sich um ein rechtwinkliges Dreieck handelt.

c) Bestimme rechnerisch, ob es sich um ein gleichschenkliges Dreieck handelt.

d) Bestimme die Koordinaten eines Punktes D, so dass das Viereck ABCD ein Parallelogramm ist

Aufgabe 8

Gegeben ist ein Quader mit den Eckpunkten $A(3|0|0)$, B, $C(0|8|0)$, $D(0|0|0)$, E, F, $G(0|8|4)$ und $H(0|0|4)$.



a) Bestimme die Koordinaten von B, E und F

b) Zeige rechnerisch, dass die Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ senkrecht zueinander sind

c) Bestimme rechnerisch die Länge der Seiten $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$

d) Bestimme rechnerisch den Flächeninhalt der Fläche ABCD

e) Bestimme rechnerisch das Volumen des Quaders

f) Bestimme die Koordinaten des Punktes, der genau in der Mitte der Fläche ABCD liegt

g) Bestimme die Koordinaten des Punktes, der genau in der Mitte des Quaders liegt

Aufgabe 9

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Bestimme, wie man x wählen muss, damit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ senkrecht zueinander sind.

Aufgabe 10

Gegeben ist das Quadrat ABCD mit $A(3/3/4)$, $B(6|7|4)$, $C(2|10/4)$ und $D(-1/6/4)$.

a) Zeige rechnerisch, dass das Quadrat einen Flächeninhalt von 25 FE hat

b) Es gibt Punkte S, für welche die Pyramide ABCDS ein Volumen von 50 VE hat. Bestimme die Koordinaten von einem dieser Punkte.

Aufgabe 11

Gegeben sind die Punkte $A(1|2|1)$ und $B(2/4|z)$.

a) Bestimme, wie man z wählen muss, damit A und B 3 LE voneinander entfernt sind

b) Bestimme, wie man z wählen muss, damit $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$ senkrecht zueinander sind

Aufgabe 12

Gegeben sind die Punkte $A(1/3/4)$ und $B(5/7/6)$.

a) Bestimme die Koordinaten des Mittelpunktes zwischen A und B

b) Bestimme die Entfernung zwischen A und B

c) Gib die Koordinaten eines Punktes C an, der doppelt so weit von A entfernt ist wie B

d) Gib die Koordinaten eines Punktes D an, so dass $\overline{AB}$ und $\overline{AD}$ senkrecht zueinander sind

Lösungen (Teil A)

Aufgabe 1

a) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}1\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\15\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\17\\6\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\8\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\8\end{pmatrix}$

c) $5\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}6\\9\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\10\\15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}42\\63\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}47\\73\\29\end{pmatrix}$

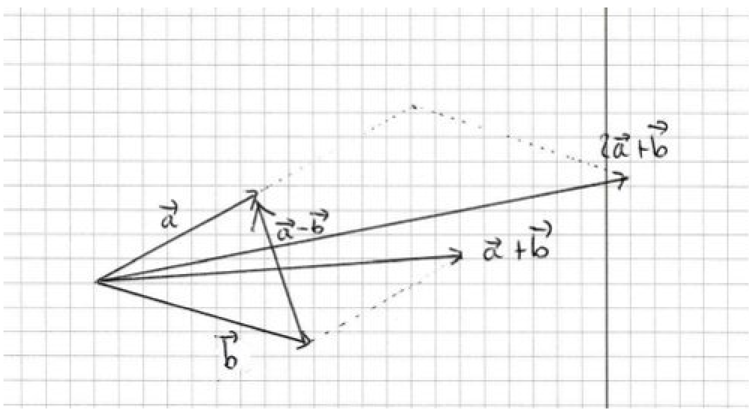
d) $\left(\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right)\cdot 3=\left(\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}\right)\cdot 3=\begin{pmatrix}3\\3\\8\end{pmatrix}\cdot 3=\begin{pmatrix}9\\9\\24\end{pmatrix}$

Aufgabe 2

a) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

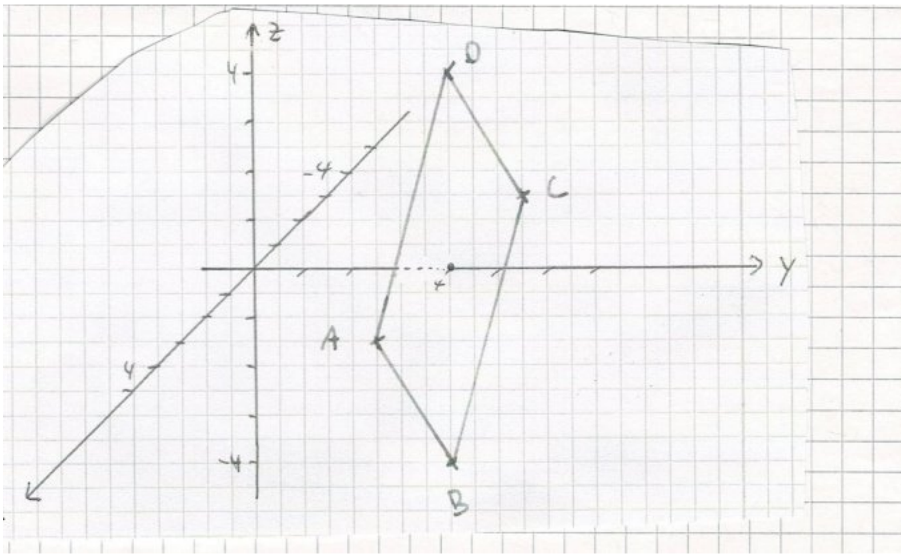
b) $\vec{x}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

Aufgabe 3



Aufgabe 4

a)



b)

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3-3\\4-4\\0-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\0\\0\end{pmatrix}$$

c)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}0-3\\4-4\\-4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}-3-0\\4-4\\0-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}0-3\\4-4\\4-0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}-3-0\\4-4\\0-(-4)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AD} \parallel \overrightarrow{BC}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{DC}| = 5 \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5 \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}| = 5 \text{ LE}$$

d)

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix}-3\\0\\-4\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\0\\4\end{pmatrix} = 9-16 = -7 \neq 0$$

$\Rightarrow$ Kein rechter Winkel bei A

analog auch bei den anderen Eckpunkten kein rechter Winkel e)

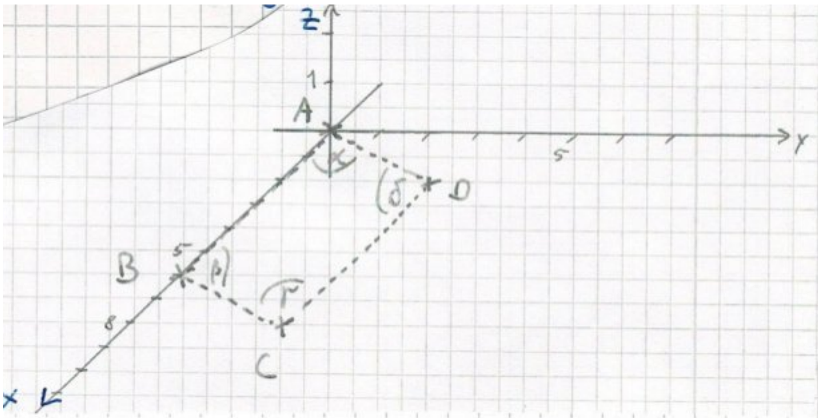
Es handelt sich um eine Raute. Die Seiten sind nämlich alle gleich lang und die gegenüberliegenden Seiten sind parallel zueinander. Es ist kein Quadrat, da ansonsten der Winkel bei A 90° groß hätte sein müssen.

f) $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|}$

g) Es handelt sich um den Nebenwinkel des bei Aufgabe f ausgerechneten Winkels Alpha. Alpha und der neue Winkel ergeben zusammen 180 Grad.

Aufgabe 5

a)



b)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

zu α: $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow \alpha \neq 90°$

zu β: $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$

$\Rightarrow \beta \neq 90°$

zu δ: $\overrightarrow{DA} \circ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -12 \neq 0$

$\Rightarrow \delta \neq 90°$

zu γ: $\overrightarrow{CB} \circ \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 12 \neq 0$

$\Rightarrow \gamma \neq 90°$

c)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Die beiden Vektoren sind Vielfache voneinander

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$

d)

Es gilt: $\overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{AD}$ sind auch Vielfache voneinander

$\Rightarrow \overrightarrow{BC} \parallel \overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow$ Das Viereck ist ein Parallelogramm

(aber nicht zugleich ein Rechteck)

e)

$$\cos\beta = \frac{\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|}$$

f)

Die Seite AB nehmen wir als die Grundseite des Parallelogramms. Diese Seite ist 6 LE lang:

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{6^2+0^2+0^2} = \sqrt{35} = 6$$

Die Seite AB ist 3 LE von der Seite DC entfernt. AB verläuft nämlich auf der x-Achse, während DC parallel dazu verläuft. Wenn man einen Punkt auf AB hat, so erhält man einen entsprechenden Punkt auf DC, wenn man bei der y-Achse 3 dazu rechnet.

Deshalb ist die Höhe des Parallelogramms 3 LE lang.

Daraus folgt für den Flächeninhalt: A = 6 mal 3 = 18 FE.

Aufgabe 6

a)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-2 \\ 5-1 \\ 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} -1-2 \\ 1-1 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 0-(-1) \\ 5-1 \\ 4-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 5-5 \\ 4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ $\quad$ $\Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\Rightarrow ABCD$ Parallelogramm

b)

Wir testen, ob es einen rechten Winkel gibt.

$\vec{AB} \circ \vec{AD} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = -3+2 = -1 \neq 0$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel bei A

$\Rightarrow$ kein Rechteck

c)

Wir testen, ob benachbarte Seiten gleich lang sind:

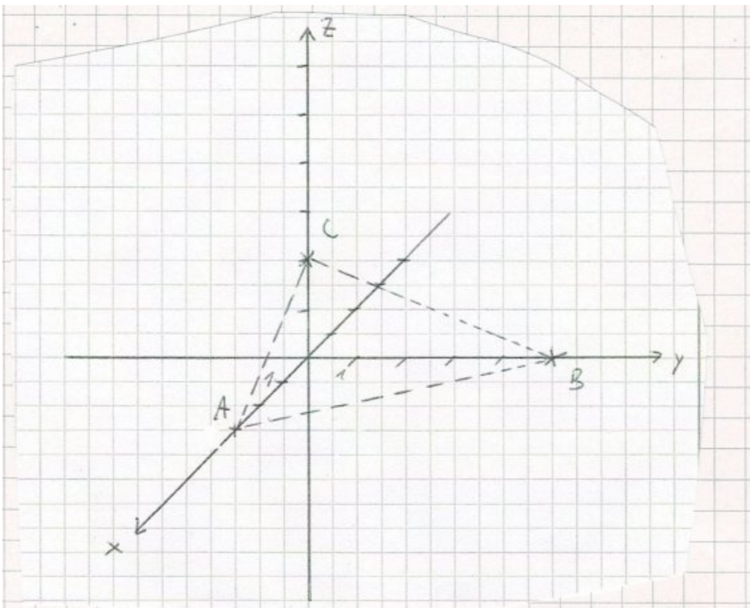
$$|\vec{AB}| = \left|\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+16+1} = \sqrt{18}$$

$$|\vec{AD}| = \left|\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$$

Die beiden Seiten AB und AD sind nicht gleich lang. Daher handelt es sich nicht um eine Raute.

Aufgabe 7

a)



b)

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}0\\-5\\2\end{pmatrix}$

Winkel bei A: $\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-3\\5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix} = 9 \neq 0$

" " B: $\overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}3\\-5\\0\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\-5\\2\end{pmatrix} = 25 \neq 0$

" " C: $\overrightarrow{CA} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix}0\\5\\-2\end{pmatrix} = 4 \neq 0$

$\Rightarrow$ kein rechter Winkel vorhanden

$\Rightarrow$ kein rechtwinkliges Dreieck

c)

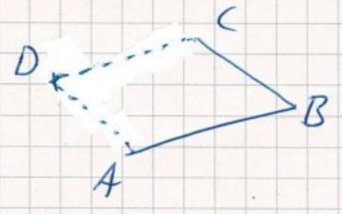
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$ LE

$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$ LE

$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ LE

$\Rightarrow$ kein gleichschenkliges Dreieck

d)



$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}$

$= \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\-5\\2\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}3\\-5\\2\end{pmatrix}$

$\Rightarrow D\,(3|-5|2)$

Aufgabe 8

a)

B (3/8/0)

x-Koordinate wie A
y- " wie C
z- " wie A

E (3/0/4)

x-Koordinate wie A
y- " wie A
z- " wie H

F (3/8/4)

x-Koordinate wie A
y- " wie C
z- " wie H

b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 3-3 \\ 8-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ 0-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$$

(rechter Winkel)

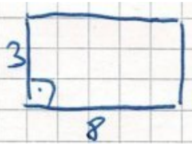
c)

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 8 \text{ LE}$$

$$|\overrightarrow{AD}| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = 3 \text{ LE}$$

d)

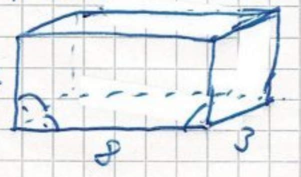
$$A = 3 \cdot 8 = 24 \text{ FE}$$



e)

$$|\overrightarrow{AE}| = \left|\begin{pmatrix} 3-3 \\ 0-0 \\ 4-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 4 \text{ LE}$$

$$V = 3 \cdot 8 \cdot 4 = 96 \text{ VE}$$



f)

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DC}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow M_1 \, (1{,}5/4/0)$$

g)

$$\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OM_1} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DH}$$
$$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$
$$\Rightarrow M_2 \, (1{,}5/4/2)$$

Alternative: $\overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OD} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DC} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{DH}$

Aufgabe 9

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} x \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = 0$$

$$5x + 2 - 6 = 0$$
$$5x - 4 = 0$$
$$5x = 4$$
$$\underline{x = 0{,}8}$$

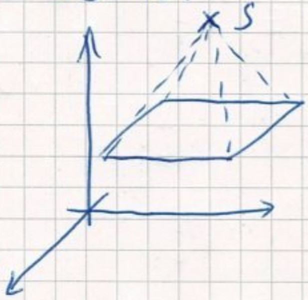
Aufgabe 10

a)

$$A = |\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{BC}|$$
$$= \left|\begin{pmatrix} 6-3 \\ 7-3 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2-6 \\ 10-7 \\ 4-4 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \left|\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}\right|$$
$$= \sqrt{9+16} \cdot \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25} \cdot \sqrt{25}$$
$$= 5 \cdot 5$$
$$= 25 \text{ FE}$$

b)

Die Punkte haben alle die z-Koordinate $z=4$. Das Quadrat liegt also parallel zur xy-Ebene.



Wir brauchen einen Punkt, der sich über dem Quadrat befindet. Sein Abstand vom Quadrat kann schnell bestimmt werden, indem man von seiner z-Koordinate 4 abzieht. Dieser Abstand ist die Höhe der Pyramide.

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$
$$50 = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot h$$
$$50 = \frac{25}{3} \cdot h \quad \Big| \cdot \frac{3}{25}$$
$$6 = h$$

$$\Rightarrow S(x/y/6+4)$$
$$S(x/y/10)$$

Aufgabe 11

a) $$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-2 \\ z-1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ z-1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+4+(z-1)^2} = 3$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1+4+(z-1)^2} = 3 \\
&\sqrt{5+(z-1)^2} = 3 \\
&5+(z-1)^2 = 9 \\
&(z-1)^2 = 4 \\
&z^2-2z+1 = 4 \\
&z^2-2z-3 = 0 \\
&z = 1 \pm \sqrt{1+3} \\
&z = 1 \pm 2
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich: z = -1 bzw. z = 3.

b)

$$\overrightarrow{OA} \circ \overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ z \end{pmatrix} = 2+8+z = 0$$

Daraus folgt: z = - 10.

Aufgabe 12

a)

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + 0{,}5 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 5-1 \\ 7-3 \\ 6-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 0{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Der Mittelpunkt hat die Koordinaten M (3/5/5).

b)

$$|\overrightarrow{AB}| = \left|\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{16+16+4} = \sqrt{36} = 6$$

Die Entfernung beträgt 6 LE.

c)

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$$

Der Punkt hat die Koordinaten C (9/11/8).

d) Wir wählen x=y= 1. Dann hat D die Koordinaten D (1/1/z).
Dann ergibt sich:

$$\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1-1 \\ 1-3 \\ z-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ z-4 \end{pmatrix} = -8+2\cdot(z-4)=0$$

Wir formen weiter um:

$$-8+2\cdot(z-4)=0$$
$$-8+2z-8=0$$
$$-16+2z=0$$
$$2z=16$$
$$z=8$$

Der Punkt D hat die Koordinaten D(1/1/8).