LÖSUNGEN (Teil A)

1a) $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$

b) $x^3 = -27 \quad | \sqrt[3]{\ }$

$x = -3$

c) $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

d) $5^x = \frac{1}{25}$

$5^x = \frac{1}{5^2}$

$5^x = 5^{-2}$

$\Rightarrow x = -2$

e) $\log_2(8) = x \Rightarrow x = 3$

denn $2^3 = 8$

d) $\log_x(49) = 2$

$\Rightarrow x = 7$

denn $7^2 = 49$

e) $\log_2(x) = 5$

$\Rightarrow x = 2^5 = 32$

f) $3^{\log_3(7)} = x$

$7 = x$

g) $\log_a(a^3) = x$

$\Rightarrow x = 3$

h) $\log_x(121) = 2$

$\Rightarrow x = 11$

denn $11^2 = 121$

i) $\log_7(x) = 0$

$\Rightarrow x = 7^0 = 1$

j) $\ln(1) = x$

$\Rightarrow x = 0$

denn $e^0 = 1$

k) $\ln(x) = 5$

$\Rightarrow x = e^5$

2a) $\log_2(x+7) = 4 \quad | \; 2^{()}$

$x+7 = 2^4$

$x+7 = 16$

$x = 9$

b) $\log_2(2x+4) - 3 = 2 \quad | +3$

$\log_2(2x+4) = 5 \quad | \; 2^{()}$

$2x+4 = 2^5$

$2x+4 = 32 \quad | -4$

$2x = 28 \quad | :2$

$x = 14$

3a) $(2x-6)\cdot e^{3x} = 0$

$2x-6 = 0$ oder $e^{3x} = 0$

$2x = 6$ $\quad$ ↯

$x = 3$

b) $(4x+8)\cdot e^{2x+4} = 0$

$4x+8 = 0$ oder $e^{2x+4} = 0$

$4x = -8$ $\quad$ ↯

$x = -2$

c) $(x^2+2x-3)\cdot e^{2x+5} = 0$

$x^2+2x-3 = 0$ oder $e^{2x+5} = 0$

$x = -1 \pm \sqrt{1+3}$ $\quad$ ↯

$x = -1 \pm \sqrt{4}$

$x = -1 \pm 2$

$x_1 = -3$

$x_2 = 1$

d) $(x^3 + 5x^2) \cdot e^{2x-1} = 0$

$x^3 + 5x^2 = 0$ oder $e^{2x-1} = 0$

$x^2 \cdot (x+5) = 0$ $\quad$ ↯

$x^2 = 0$ oder $x + 5 = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = -5$

e) $(x^3 - 4x) \cdot e^{2x+3} = 0$

$x^3 - 4x = 0$ oder $e^{2x+3} = 0$

$x \cdot (x^2 - 4) = 0$ $\quad$ ↯

$x = 0$ oder $x^2 - 4 = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$x_2 = -2$

$x_3 = 2$

f) $(x^4 - 10x^2 + 9) \cdot e^{2x} = 0$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ oder $e^{2x} = 0$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad |$ Subst. $\quad$ ↯

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$z = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$

$z = 5 \pm \sqrt{16}$

$z = 5 \pm 4$

$z_1 = 9$ $\qquad$ $z_2 = 1 \quad |$ Resubst.

$x^2 = 9$ $\qquad$ $x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 3$ $\qquad$ $x_3 = 1$

$x_2 = -3$ $\qquad$ $x_4 = -1$

g) $(x^5 - 8x^3 + 16x) \cdot e^{3x-5} = 0$

$x^5 - 8x^3 + 16x = 0$ oder $e^{3x-5} = 0$

$x \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) = 0$ $\quad$ ↯

$x = 0$ oder $x^4 - 8x^2 + 16 = 0$ | Subst.

$x_1 = 0$ $\quad z^2 - 8z + 16 = 0$

$z = 4 \pm \sqrt{16-16}$

$z = 4$ | Resubst.

$x^2 = 4$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

h) $e^{2x} - 4e^x + 4 = 0$ | Subst. $\quad$ Beachte: $e^{2x} = (e^x)^2$

$z^2 - 4z + 4 = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$z = 2$ | Resubst.

$e^x = 2$ | ln

$x = \ln(2)$

i) $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0$ $\quad | \cdot e^x$

$2e^x \cdot e^x - 4 = 0$

$2e^{2x} - 4 = 0$

$2e^{2x} = 4$ $\quad | :2$

$e^{2x} = 2$ $\quad$ | ln

$2x = \ln(2)$

$x = \frac{\ln(2)}{2}$

4a) $(2x^2-8)\cdot(e^{2x}-6)=0$

$2x^2-8=0$ oder $e^{2x}-6=0$

$2x^2=8$ $\quad\quad e^{2x}=6 \quad |\ln$

$x^2=4$ $\quad\quad 2x=\ln(6)$

$x_1=2$ $\quad\quad x_3=\frac{\ln(6)}{2}$

$x_2=-2$

b) $e^{4x}-5=4e^{2x}$

$e^{4x}-4e^{2x}-5=0$

$e^{2x}\cdot e^{2x}-4e^{2x}-5=0$

$(e^{2x})^2-4e^{2x}-5=0 \quad |$ Subst.

$z^2-4z-5=0$

$z=2\pm\sqrt{4+5}$

$z=2\pm\sqrt{9}$

$z=2\pm 3$

$z_1=5 \quad\quad z_2=-1 \quad |$ Resubst.

$e^{2x}=5 \quad |\ln \quad\quad e^{2x}=-1$

$2x=\ln(5) \quad\quad ↯$

$x=\frac{\ln(5)}{2}$

c) $4e^{2x}+6e^x=4$

$4e^{2x}+6e^x-4=0$

$e^{2x}+1{,}5e^x-1=0 \quad |$ Subst.

Beachte: $e^{2x}=(e^x)^2$

$z^2+1{,}5z-1=0$

$z=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{9}{16}+1}$

$z=-\frac{3}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}}$

$z=-\frac{3}{4}\pm\frac{5}{4}$

$z_1=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \quad\quad z_2=-\frac{8}{4}=-2 \quad |$ Resubst.

$e^x = \frac{1}{2} \quad | \ln \qquad e^x = -2$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \lightning$

$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

d) $(x^3 - 8) \cdot (2 - \ln x) = 0$

$x^3 - 8 = 0$ oder $2 - \ln x = 0$

$x^3 = 8 \qquad 2 = \ln x \quad | e^{()}$

$x_1 = 2 \qquad e^2 = x_2$

5a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

b) $f(x) = (2x+1) \cdot e^x$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x+1) \cdot e^x$

$= (2x+3) \cdot e^x$

c) $f(x) = (5x+3) \cdot e^{2x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = 5 \cdot e^{2x+1} + (5x+3) \cdot 2 \cdot e^{2x+1}$

$= 5 \cdot e^{2x+1} + (10x+6) \cdot e^{2x+1}$

$= (10x+11) \cdot e^{2x+1}$

d) $f(x) = (x^2 + 4x + 2) \cdot e^{x^2+3}$

$\Rightarrow f'(x) = (2x+4) \cdot e^{x^2+3} + (x^2+4x+2) \cdot 2x \cdot e^{x^2+3}$

$= (2x+4) \cdot e^{x^2+3} + (2x^3 + 8x^2 + 4x) \cdot e^{x^2+3}$

$= (2x^3 + 8x^2 + 6x + 4) \cdot e^{x^2+3}$

e) $f(x) = (x^2 + x - 4) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$\Rightarrow f'(x) = (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (x^2+x-4) \cdot (4x+5) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (4x^3 + 4x^2 - 16x + 5x^2 + 5x - 20) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (2x+1) \cdot e^{2x^2+5x+1} + (4x^3 + 9x^2 - 11x - 20) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

$= (4x^3 + 9x^2 - 9x - 19) \cdot e^{2x^2+5x+1}$

f) $f(x) = x^2 \cdot \sin(x)$

$\Rightarrow f'(x) = 2x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$

g) $f(x) = (\sin(x))^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2 \cdot \sin(x) \cdot \cos(x)$

h) $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 2}{4x+5}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{(2x+4)\cdot(4x+5) - (x^2+4x+2)\cdot 4}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{8x^2 + 10x + 16x + 20 - 4x^2 - 16x - 8}{(4x+5)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 10x + 12}{(4x+5)^2}$$

i) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x} = (x^2 + 4x)^{\frac{1}{2}}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + 4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot (2x+4)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2+4x}} \cdot (2x+4)$$

$$= \frac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x}} = \frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x}}$$

j) $f(x) = (3 + \cos(x))^4$

$\Rightarrow f'(x) = 4 \cdot (3 + \cos(x))^3 \cdot (-\sin(x))$

$= -4 \cdot \sin(x) \cdot (3 + \cos(x))^3$

6) $f(x) = (2x+3) \cdot e^x$

$f'(x) = 2 \cdot e^x + (2x+3) \cdot e^x$

$= (2x+5) \cdot e^x$

$$f''(x) = 2 \cdot e^x + (2x+5) \cdot e^x$$
$$= (2x+7) \cdot e^x$$

$$f'''(x) = 2 \cdot e^x + (2x+7) \cdot e^x$$
$$= (2x+9) \cdot e^x$$

$$f^{(n)}(x) = (2x+3+2n) \cdot e^x$$

7a) $\lim\limits_{x \to \infty} (2x+9) \cdot e^{-3x+4} = 0$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (2x+9) \cdot e^{-3x+4} = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} (-5x+2) \cdot e^{3x} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-5x+2) \cdot e^{3x} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} (-2x+1) \cdot e^{x^2+1} = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-2x+1) \cdot e^{x^2+1} = +\infty$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} (x^2+2x+3) \cdot e^{2x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2+2x+3) \cdot e^{2x} = 0$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} (5x+1) \cdot e^{5x+7} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (5x+1) \cdot e^{5x+7} = 0$

8) ① $f(x) = 3e^x$

$f(0) = 3 \cdot e^0 = 3 \Rightarrow P(0|3)$ auf f

$\Rightarrow$ Graph 3

② $g(x) = (x+1) \cdot e^{0,1x}$

$g(0) = (0+1) \cdot e^{0,1 \cdot 0} = 1 \Rightarrow P(0|1)$ auf g

$\Rightarrow$ einzig passender Graph Nr. 5

außerdem:

$g(x) = 0 \Rightarrow (x+1) \cdot e^{0,1x} = 0$

$x+1 = 0$ oder $e^{0,1x} = 0$

$x = -1$ $\quad$ ⚡

③ $h(x) = -2 \cdot e^{-x}$

$h(0) = -2 \cdot e^0 = -2 \Rightarrow P(0|-2)$ auf h

$\Rightarrow$ Graph 4

④ $i(x) = 4 - 2 \cdot e^{-0,1x}$

Funktion des begrenzten exp. Wachstums

$\lim_{x \to \infty} i(x) = 4 \Rightarrow$ Graph 1

9) Aussage 1: wahr

f ist streng monoton wachsend, wenn $f'(x) > 0$ für alle x-Werte im betrachteten Bereich & dies ist der Fall

Aussage 2: wahr

f hat einen Wendepunkt in $x=0$.
f' hat dort einen Hochpunkt, also gilt $f''(0)=0$. f' wächst links von $x=0$ und fällt rechts davon
$\Rightarrow f''$ positiv links davon und negativ rechts davon
$\Rightarrow$ Vorzeichenwechsel von f''

$f''(0)=0$ und Vorzeichenwechsel von f''
$\Rightarrow f$ hat Wendepunkt in $x=0$

Aussage 3: falsch

f' ist überall positiv $\Rightarrow f$ wächst ununterbrochen $\Rightarrow f$ kann keine Achsensymmetrie haben

Aussage 4: unentscheidbar

f wächst zwar ununterbrochen, aber von wo aus ist nicht bekannt

10a) $f(x) = e^{-2x+1} + 1$

$f'(x) = -2 \cdot e^{-2x+1}$

$f'(\frac{1}{2}) = -2 \cdot e^{-2 \cdot \frac{1}{2} + 1} = -2 \cdot e^{-1+1} = -2 \cdot e^0 = -2$

$\Rightarrow$ Steigung -2

b) $t(x) = -2x + b$

$f(\frac{1}{2}) = e^{-2 \cdot \frac{1}{2} + 1} + 1 = e^0 + 1 = 2$

$\Rightarrow P(\frac{1}{2} \mid 2)$

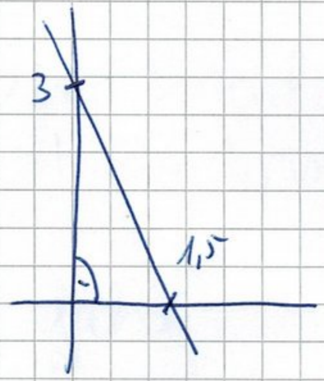
$2 = -2 \cdot \frac{1}{2} + b$
$2 = -1 + b$
$3 = b$

$\Rightarrow t(x) = -2x + 3$

gesucht: Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen

$t(0) = 3$

$t(x) = 0$
$-2x + 3 = 0$
$-2x = -3$
$x = 1{,}5$



$A_\Delta = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4}$ FE

11a) ① $g(3) = -1$
$f(g(3)) = f(-1) = 5$

② $f(x) = 0$ für $x = 0$ und $x = 4$
Wann wird $g(x)$ gleich 0 oder 4?
$g(-2) = 4$
$g(2) = 0$

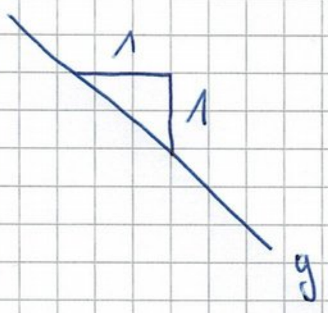
$\Rightarrow f(g(-2)) = 0$
$f(g(2)) = 0$

b) $h(x) = f(x) \cdot g(x)$
$\Rightarrow h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
$h'(2) = f'(2) \cdot g(2) + f(2) \cdot g'(2)$

Es gilt: $g(2) = 0$

$f(2) = 4$

$g'(x) = -1$ (Steigung, an einem Steigungsdreieck ablesbar)



$\Rightarrow h'(2) = f'(2) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = -4$

12a) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 2}$

$f(0) = \dfrac{e^0}{e^0 - 2} = \dfrac{1}{1-2} = \dfrac{1}{-1} = -1$

$\Rightarrow S_y(0/-1)$

b) $f'(x) = \dfrac{e^x \cdot (e^x - 2) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 2)^2}$

$= \dfrac{e^{2x} - 2 - e^{2x}}{(e^x - 2)^2}$

$= \dfrac{-2}{(e^x - 2)^2}$

13a) $f(x) = 2e^{\frac{1}{2}x} - 1 = 0$

$2e^{\frac{1}{2}x} = 1$

$e^{1/2 x} = \frac{1}{2} \quad | \ln$

$\frac{1}{2}x = \ln(\frac{1}{2})$

$x = 2 \cdot \ln(\frac{1}{2})$

b) gesucht: Tangente an f durch S(0|1)

$f'(x) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{\frac{1}{2}x} = e^{\frac{1}{2}x}$

$f'(0) = e^0 = 1$

$\Rightarrow t(x) = x + b$

S(0|1) auf t $\Rightarrow t(0) = 1$

$0 + b = 1$

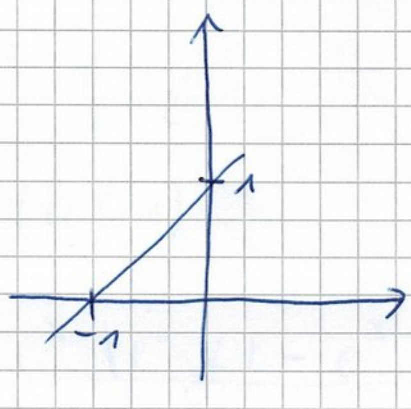
$\Rightarrow t(x) = x + 1$

Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen:

$t(0) = 1$

$x + 1 = 0$

$x = -1$



$\Rightarrow$ Wir haben ein gleichschenkliges Dreieck. Die Strecke vom Ursprung zur Nullstelle ist wie die Strecke vom Ursprung zum Schnittpunkt mit der y-Achse jeweils 1LE lang.

14a) $f'(x) = e^{g(x)}$

Extrempunkte:

① Notwendige Bedingung: $f'(x)=0$

$f'(x) = 0$
$e^{g(x)} = 0$
$\lightning$
$\Rightarrow$ kein Extrempunkt vorhanden

b) $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$

Wendepunkte:

① Notwendige Bedingung: $f''(x)=0$

$f''(x)=0$
$g'(x) \cdot e^{g(x)} = 0$
$g'(x) = 0$ oder $e^{g(x)} = 0$
$\lightning$

$g'(x)=0$, wenn g bei x selbst einen Extrempunkt hat
$\Rightarrow$ g hat für einen Wert x_e links von der y-Achse einen Hochpunkt & daher gilt $g'(x_e)=0$
$\Rightarrow f''(x_e) = 0$

② Hinreichende Bedingung:
Vorzeichenwechsel von f''?

g hat HP bei x_e

$\Rightarrow$ g' positiv links von x_e
g' negativ rechts von x_e

$\Rightarrow$ $f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ positiv links von x_e
$f''(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$ negativ rechts von x_e
(da $e^{g(x)}$ immer positiv ist)

$\Rightarrow$ Wendepunkt von f bei x_e