AUFGABEN (Teil A)

Aufgabe 1

Bestimme x:

a) $2^x = 16$

b) $x^3 = -27$

c) $5^x = 1$

d) $5^x = \frac{1}{25}$

e) $\log_2(8) = x$

d) $\log_x(49) = 2$

e) $\log_2(x) = 5$

f) $3^{\log_3(7)} = x$

g) $\log_a(a^3) = x$

h) $\log_x(121) = 2$

i) $\log_7(x) = 0$

j) $\ln(1) = x$

k) $\ln(x) = 5$

Aufgabe 2

Bestimme x:

a) $\log_2(x+7) = 4$

b) $\log_2(2x+4) - 3 = 2$

Aufgabe 3
Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = (2x-6)\cdot e^{3x}$

b) $f(x) = (4x+8)\cdot e^{2x+4}$

c) $f(x) = (x^2+2x-3)\cdot e^{2x+5}$

d) $f(x) = (x^3+5x^2)\cdot e^{2x-1}$

e) $f(x) = (x^3-4x)\cdot e^{2x+3}$

f) $f(x) = (x^4-10x^2+9)\cdot e^{2x}$

g) $f(x) = (x^5-8x^3+16x)\cdot e^{3x-5}$

h) $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 4$

i) $f(x) = 2e^x - \frac{4}{e^x}$

Aufgabe 4
Löse die folgenden Gleichungen:

a) $(2x^2-8)\cdot(e^{2x}-6) = 0$

b) $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$

c) $4e^{2x} + 6e^x = 4$

d) $(x^3-8)\cdot(2-\ln x)=0$

Aufgabe 5

Bestimme jeweils die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f(x)=e^x$

b) $f(x)=(2x+1)\cdot e^x$

c) $f(x)=(5x+3)\cdot e^{2x+1}$

d) $f(x)=(x^2+4x+2)\cdot e^{x^2+3}$

e) $f(x)=(x^2+x-4)\cdot e^{2x^2+5x+1}$

f) $f(x)=x^2\cdot\sin(x)$

g) $f(x)=(\sin(x))^2$

h) $f(x)=\dfrac{x^2+4x+2}{4x+5}$

i) $f(x)=\sqrt{x^2+4x}$

j) $f(x)=(3+\cos(x))^4$

Aufgabe 6

Bestimme die erste, zweite, dritte und allgemein die n-te Ableitung von $f(x) = (2x+3)\cdot e^x$

Aufgabe 7

Gib das Fernverhalten der folgenden Funktionen an:

a) $f(x) = (2x+9)\cdot e^{-3x+4}$

b) $f(x) = (-5x+2)\cdot e^{3x}$

c) $f(x) = (-2x+1)\cdot e^{x^2+1}$

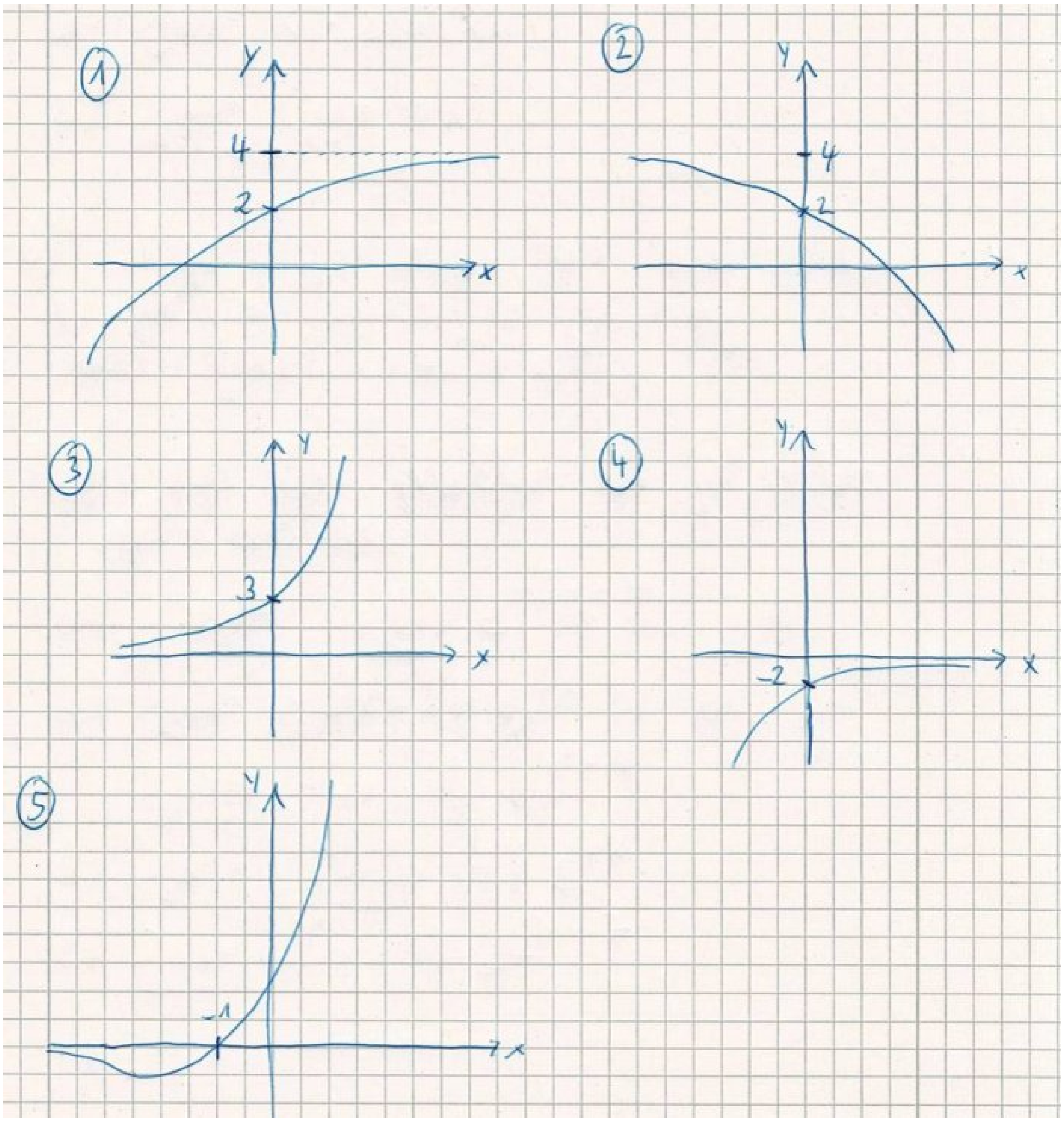
d) $f(x) = (x^2+2x+3)\cdot e^{2x}$

e) $f(x) = (5x+1)\cdot e^{5x+7}$

Aufgabe 8

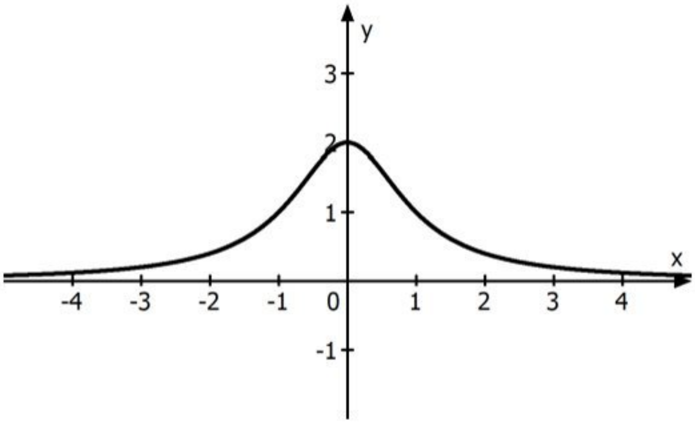
Ordne den Funktionsgleichungen den richtigen Graphen zu:

$$f(x) = 3e^{x}$$
$$g(x) = (x+1)\cdot e^{0{,}1x}$$
$$h(x) = -2\cdot e^{-x}$$
$$i(x) = 4 - 2\cdot e^{-0{,}1x}$$



Aufgabe 9 (Abitur Baden-Württemberg 2004)

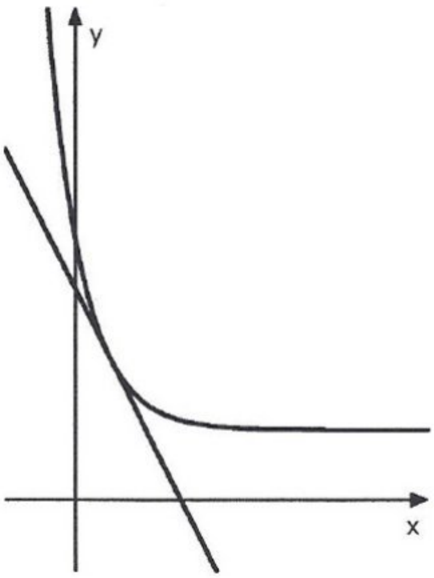
Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Welcher der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar?
Begründen Sie Ihre Antworten.



1. f ist streng monoton wachsend für $-3 < x < 3$.
2. Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
3. Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
4. Es gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in [-3;3]$.

Aufgabe 10 (Abitur Baden-Württemberg 2021)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-2x+1} + 1$.
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f sowie die Tangente an G_f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$.



a) Weisen Sie nach, dass diese Tangente die Steigung -2 hat.

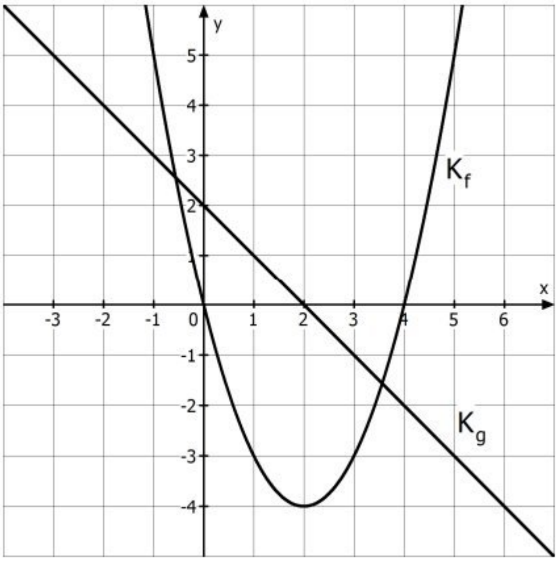
b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

Aufgabe 11 (Abitur Baden-Württemberg 2014)

Die Abbildung zeigt die Graphen K_f und K_g zweier Funktionen f und g.

a) Bestimmen Sie $f(g(3))$.
Bestimmen Sie einen Wert für x so, dass $f(g(x)) = 0$ ist.

b) Die Funktion h ist gegeben durch $h(x) = f(x) \cdot g(x)$. Bestimmen Sie $h'(2)$.



Aufgabe 12 (Abitur Bayern 2023)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 2}$.

a) Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes von f mit der y-Achse.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Aufgabe 13 (Abitur Bayern 2017)

Eine Funktion f ist durch $f(x) = 2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} - 1$ mit $x \in \mathbb{R}$ gegeben.

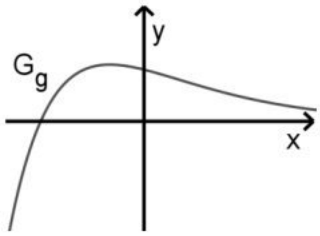
a) Ermitteln Sie die Nullstelle der Funktion f.

b) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $S(0|1)$ begrenzt mit den beiden Koordinatenachsen ein Dreieck. Weisen Sie nach, dass dieses Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 14 (IQB 2019)

Die Abbildung zeigt den Graphen G_g einer in $\mathbb{R}$ definierten, differenzierbaren Funktion g.

Betrachtet wird eine in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f, für deren erste Ableitungsfunktion $f'(x) = e^{g(x)}$ gilt.



a Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Extrempunkt hat.

b Untersuchen Sie, ob der Graph von f einen Wendepunkt hat.

<u>Aufgaben (Teil B)</u>

<u>Aufgabe 1</u>

Gegeben ist die Funktion $f(x)=(4x+8)\cdot e^{2x+1}$

a) Bestimme die Koordinaten der Schnittpunkte von f mit den Koordinatenachsen.

b) Bestimme rechnerisch die erste und die zweite Ableitung von f.

c) Gib das Fernverhalten von f an.

d) Überprüfe rechnerisch die Funktion auf das Vorliegen einer Standardsymmetrie.

e) Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt von f mit $g(x)=(3x-1)\cdot e^{2x+1}$

f) Bestimme rechnerisch den Schnittpunkt von f mit $h(x)=e^{2x}$

g) Bestimme rechnerisch die Koordinaten und die Art des Extrempunktes von f.

h) Bestimme rechnerisch die Gleichung der Tangente an f durch den Punkt P (1/ f(1)).

i) Bestimme rechnerisch die Gleichung der Normalen an f durch den Punkt P (1 / f(1)).

<u>Aufgabe 2</u> (Abitur Berlin 2018)

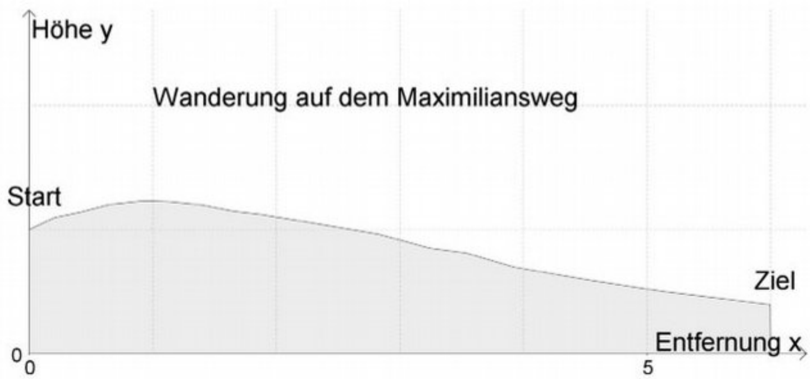
Gegeben sind die Funktionen *f* und *g* durch ihre Gleichungen
$f(x)=(x+1)\cdot e^{-0,5\cdot x}$ sowie $g(x)=x+1$.
Die Graphen der Funktionen sind in der Anlage dargestellt.

a) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktionswerte von *f* für $x \to +\infty$.

b) Die Graphen der Funktionen *f* und *g* schneiden die *y*-Achse im Punkt $S(0\,|\,1)$.
Berechnen Sie den Winkel, unter dem sich die Tangente an den Graphen der Funktion *f* und die Gerade *g* im Punkt *S* schneiden.
[zur Kontrolle: $f'(x)=\left(-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-0,5\cdot x}$]

c) (gestrichen)

Die Abbildung zeigt das Höhenprofil für einen Wanderweg im Mittelgebirge. Vereinfacht soll das Höhenprofil durch die Funktion *f* mit $f(x)=(x+1)\cdot e^{-0,5\cdot x}, 0 \le x \le 6$, beschrieben werden.
(1 LE = 1 km)



d) Berechnen Sie die Koordinaten des höchsten Punktes des Höhenprofils.
(Die Untersuchung einer hinreichenden Bedingung ist nicht erforderlich.)

e) Im Intervall $[2;6]$ kann das Höhenprofil näherungsweise durch eine Gerade ersetzt werden. Ermitteln Sie die Gleichung der Geraden durch die Punkte $(2|f(2))$ und $(6|f(6))$.

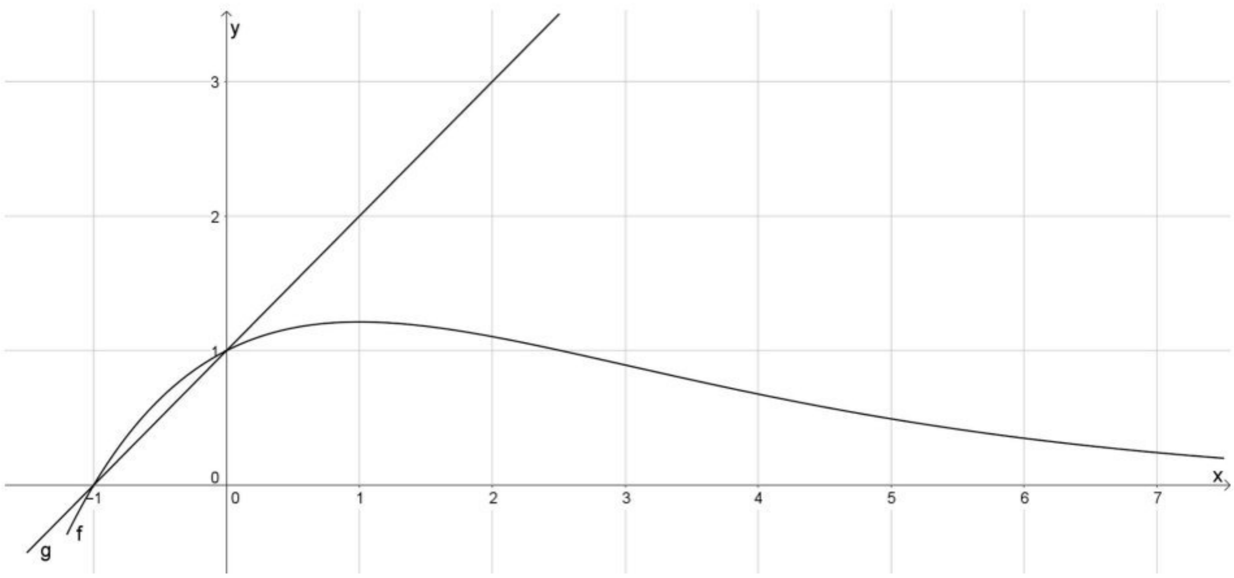
f) Weisen Sie nach, dass es im Intervall $[2;6]$ eine Stelle gibt, an der die Steigung des durch *f* beschriebenen Höhenprofils kleiner als -0,222 ist.

g) Ähnlich verlaufende Höhenprofile können allgemein durch Gleichungen der Form $h(x) = (x+a)\cdot e^{b\cdot x}, (a > 0, b < 0)$, beschrieben werden. Von einem bestimmten solchen Höhenprofil h_W sind die folgenden Angaben bekannt:

x in km	0	6
Höhe $h_W(x)$ in km	1,2	0,3

Untersuchen Sie, bei welchem der beiden Höhenprofile *f* und h_W der Betrag der mittleren Steigung im Intervall $[0;6]$ größer ist.
Ermitteln Sie für den vorliegenden Fall *a* und *b*.

Darstellung der Graphen der Funktionen *f* und *g*



Aufgabe 3 (Abitur Bremen 2009)

DSL-Boom

In regelmäßigen Abständen werden neue Zahlen zu den DSL-Internet-Zugängen veröffentlicht. Die nebenstehende Grafik zeigt die Entwicklung vom Jahr 2002 bis zum Jahr 2006.

Quelle: BITKOM (Bundesverband der Informationswirtschaft, Telekommunikation und neue Medien)

Durch die Analyse der Daten eines zurückliegenden Zeitraums versucht man Vorhersagen für die Zukunft abzuleiten. Dazu werden mathematische Modelle entwickelt.

In einer ersten Modellannahme soll exponentielles Wachstum mit der Funktion f und der Gleichung $f(x) = c \cdot e^{k \cdot x}$ angenommen werden; x in Jahren ($x = 0$ entspricht Ende 2002), $f(x)$ in Millionen DSL-Anschlüssen zum Zeitpunkt x.

a) Bestimmen Sie die Parameter c und k mit Hilfe der Daten der Jahre 2002 und 2005. Runden Sie den Wert k auf zwei Nachkommastellen.
Berechnen Sie, wie viele DSL-Anschlüsse es nach dieser Funktionsgleichung im Jahre 2010 geben würde.
Berechnen Sie, in welchem Jahr eine Anzahl von 30 Millionen Anschlüssen erstmalig überschritten würde.
Begründen Sie, warum die weitere Entwicklung vermutlich mit der obigen Funktionsgleichung nicht vorhergesagt werden kann.

In einer zweiten Modellannahme legen wir logistisches Wachstum mit der Funktionsgleichung

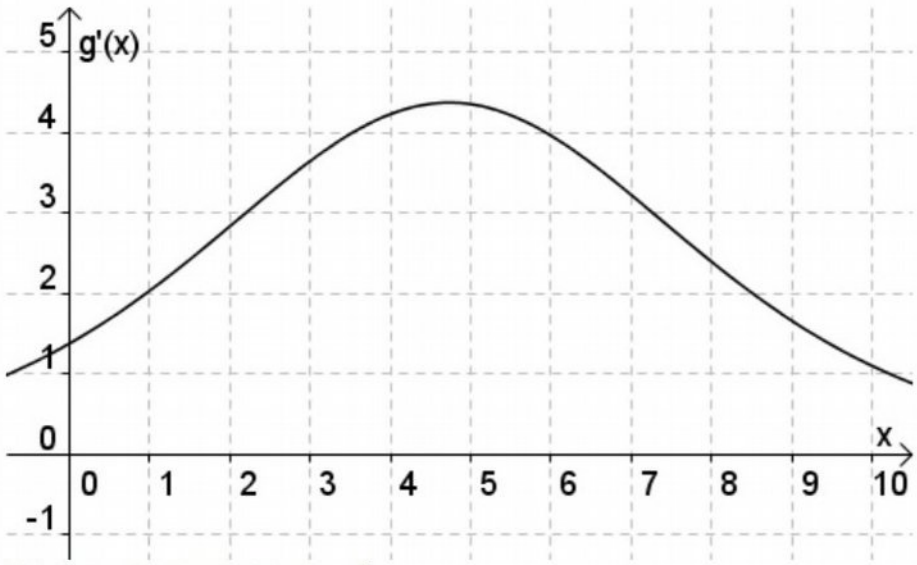
$$g(x) = \frac{105}{3 + 32 \cdot e^{-0,5 \cdot x}}$$

zugrunde. Sie erfasst die bisherigen DSL-Anschlüsse jeweils am Jahresende hinreichend gut. Wieder gilt: x in Jahren ($x = 0$ entspricht Ende 2002), $g(x)$ in Millionen DSL-Anschlüssen zum Zeitpunkt x. Benutzen Sie diese Gleichung für die nachfolgenden Untersuchungen.

b) Zeigen Sie, dass die Prognosefunktion g die Werte der vergangenen Jahre 2002 und 2005 relativ gut wiedergibt und berechnen Sie einen Vorhersagewert für 2010.
Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ und erläutern Sie seine Bedeutung für eine langfristige Vorhersage. Gehen Sie dabei von insgesamt 40 Mio. vorhandenen Haushalten in Deutschland aus.

c) Leiten Sie für die Funktion g den Term der ersten Ableitung her und geben Sie zwei verwendete Regeln an.
Erläutern Sie die Bedeutung der Ableitungsfunktion im Sachzusammenhang.

d) Der nachfolgend angegebene Graph ist der Graph von g'.
Lesen Sie aus dem Graphen die Koordinaten des Maximums von g' näherungsweise ab.
Beschreiben Sie dessen Bedeutung bei der Entwicklung der DSL-Anschlusszahlen und für den Graphen der Funktion g.
Beschreiben Sie den Lösungsweg zur genauen Berechnung des Maximums von g', wenn Ihnen keine Skizze vorliegt. Die Ausführung der Rechnung wird nicht erwartet.



Graph der Ableitungsfunktion g'

e) Die Funktion $h(x)=70\cdot\ln\left(3\cdot e^{0,5x}+32\right)$ beschreibt die Einnahmen, welche die DSL-Anbieter mit Hilfe der DSL-Anschlüsse machen. Dabei steht x wieder für die Zeit in Jahren seit Ende 2002.

(i) Zeige rechnerisch, dass g die Ableitung von h ist.

(ii) Bestimme den Faktor, um den sich die Einnahmen aus den Jahren 2008 bis 2010 gegenüber den Einnahmen aus den Jahren 2004 bis 2006 verändert haben.

Aufgabe 4 (Abitur Bayern 2012)

Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \dfrac{2e^x}{e^x+9}$ mit Definitionsbereich IR. Abbildung 2 zeigt den Graphen G_f von f.

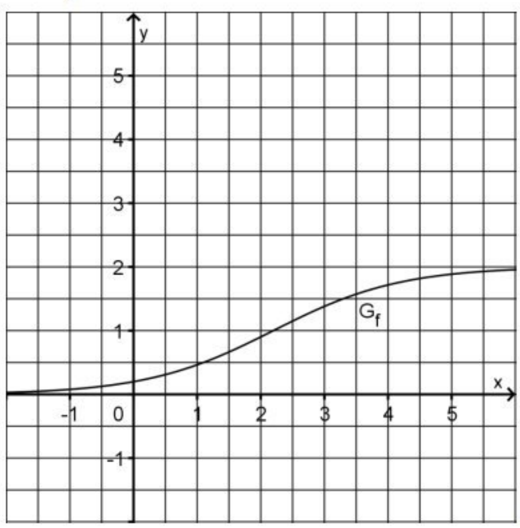


Abb. 2

1 a) Zeigen Sie rechnerisch, dass G_f genau einen Achsenschnittpunkt S besitzt, und geben Sie die Koordinaten von S an.

b) Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms von f, dass $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ gilt.

c) Weisen Sie rechnerisch nach, dass G_f in $\mathbb{R}$ streng monoton steigt.

(zur Kontrolle: $f'(x)=\dfrac{18e^x}{(e^x+9)^2}$)

d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an G_f im Achsenschnittpunkt S.

(Ergebnis: $y=0{,}18x+0{,}2$)

e und f) (gestrichen)

2 Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Alba lässt sich modellhaft mithilfe der Funktion f beschreiben. Beginnt man die Beobachtung zwei Wochen nach der Auskeimung einer Sonnenblume dieser Sorte, so liefert $f(x)$ für $x\in[0;4]$ im Modell die Höhe der Blume in Metern. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten. In den Aufgaben 2a bis 2d werden ausschließlich Sonnenblumen der Sorte Alba betrachtet.

a) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, um wie viele Zentimeter eine Sonnenblume innerhalb der ersten zwei Monate nach Beobachtungsbeginn wächst.

b) Berechnen Sie auf der Grundlage des Modells, wie viele Monate nach Beobachtungsbeginn eine Sonnenblume eine Höhe von 1,5 Metern erreicht. Beschreiben Sie, wie man den berechneten Wert graphisch überprüfen kann.

c) Im Modell gibt es einen Zeitpunkt x_M, zu dem die Blumen am schnellsten wachsen. Bestimmen Sie mithilfe von Abbildung 2 einen Näherungswert für x_M. Ermitteln Sie anschließend einen Näherungswert für die maximale Wachstumsrate in Zentimetern pro Tag.

d) Ein Biologe nimmt an, dass sich das Wachstum der Blumen vor Beobachtungsbeginn näherungsweise durch die Gleichung der Tangente aus Aufgabe 1d beschreiben lässt. Untersuchen Sie mithilfe einer Rechnung, ob diese Annahme damit in Einklang steht, dass vom Zeitpunkt des Auskeimens bis zum Beobachtungsbeginn etwa zwei Wochen vergehen.

Haben zu Beobachtungsbeginn Sonnenblumen der Sorte Tramonto die gleiche Höhe wie Sonnenblumen der Sorte Alba, so erreichen von da an die Sonnenblumen der Sorte Tramonto im Vergleich zu denen der Sorte Alba jede Höhe in der Hälfte der Zeit.

Das Wachstum von Sonnenblumen der Sorte Tramonto lässt sich modellhaft mithilfe einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion g beschreiben, die eine Funktionsgleichung der Form I, II oder III mit $k\in\mathbb{R}^+$ besitzt:

I $y=\dfrac{2e^{x+k}}{e^{x+k}+9}$ **II** $y=k\cdot\dfrac{2e^x}{e^x+9}$ **III** $y=\dfrac{2e^{kx}}{e^{kx}+9}$

Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Monaten und y ein Näherungswert für die Höhe einer Blume in Metern.

e) Begründen Sie, dass weder eine Gleichung der Form I noch eine der Form II als Funktionsgleichung von g infrage kommt.

f) Die Funktionsgleichung von g hat also die Form III. Geben Sie den passenden Wert von k an.

Aufgabe 5 (Abitur Baden-Württemberg 2017)
In einem Labor wird erforscht, wie sich Bakterien unter verschiedenen Bedingungen entwickeln. Betrachtet wird jeweils der Flächeninhalt der von den Bakterien eingenommenen Fläche.

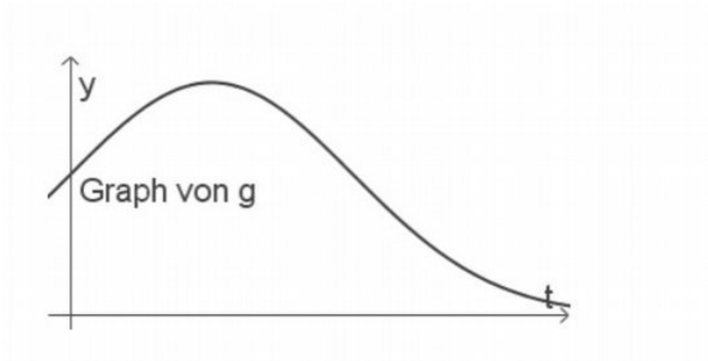
Versuchsreihe 1
Bei ungehinderter Vermehrung wird der Flächeninhalt während der ersten zwölf Stunden beschrieben durch die Funktion f mit $f(x)=20\cdot e^{0,1x}$. Dabei gibt x die Anzahl an Stunden seit dem Beobachtungsbeginn an und f(x) die Fläche in mm².

a) Bestimme den Flächeninhalt drei Stunden nach Beobachtungsbeginn.

b) Berechne den Zeitpunkt, zu dem sich der Flächeninhalt im Vergleich zum Beobachtungsbeginn verdreifacht hat.

c) Berechne die momentane Änderungsrate des Flächeninhalts zwei Stunden nach dem Beobachtungsbeginn.

Versuchsreihe 2
Wenn man einer Bakterienkultur ein Antibiotikum hinzugibt, dann wird der Flächeninhalt durch die Funktion g beschrieben mit $g(x)=20\cdot e^{0,1x-0,005x^2}$ (x in Stunden nach Beobachtungsbeginn, g(x) in mm²). Die nachfolgende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion .



d) Der Flächeninhalt nimmt zu einem bestimmten Zeitpunkt seinen größten Wert an. Berechne diesen Wert.

e) Berechne den Zeitpunkt, zu dem der Flächeninhalt wieder so groß ist wie zu Beobachtungsbeginn.

f) Betrachtet wird die Funktion h mit h(x) = g(x+10). Für jede reelle Zahl x gilt:
h(x) = h(-x).
Erläutere, welche geometrische Eigenschaft des Graphen von g damit begründet werden kann.

Aufgabe 6 (IQB 2019)

a bis c) (gestrichen)

Die Abbildung 1 zeigt den Graphen der in IR definierten Funktion h mit $h(x) = 5x^2 \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$.

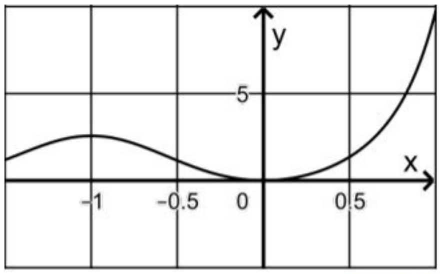


Abb. 1

d Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to -\infty$ an und beschreiben Sie, was sich aus diesem Grenzwert im Hinblick auf den Verlauf des Graphen von h folgern lässt.

e Zeigen Sie, dass $h'(x) = 10x \cdot \left(1 + x^3\right) \cdot e^{\frac{2}{3}x^3}$ ein Term der ersten Ableitungsfunktion von h ist.

f Bestimmen Sie rechnerisch die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h.

Einschub: Gegeben ist zusätzlich die Funktion $g(x) = \frac{5}{2}x^2 \cdot (2x + 3))$

g Bestimmen Sie die prozentuale Abweichung der mittleren Steigung des Graphen von g von der mittleren Steigung des Graphen von h im Bereich $-1 \leq x \leq 0$.

h Es gilt $(h(1) - g(1)) \cdot (h(2) - g(2)) < 0$. Geben Sie die Bedeutung dieser Tatsache hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Graphen von g und h im Bereich $1 < x < 2$ an. Begründen Sie Ihre Angabe.

Einschub: Die Funktion h ist die Ableitung einer Funktion i.

i) Entscheide, welcher der nachfolgenden Graphen die Funktion i darstellt. Begründe deine Entscheidung.