AUFGABEN (Teil ohne Hilfsmittel)

1) Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^2 + 2x$

a) Bestimme die Gleichung der Tangente und die Gleichung der Normalen durch $P(1 / f(1))$

b) Zeige, dass $g(x) = 6x - 4$ eine Tangente an den Graphen von f durch einen Punkt $P(x / f(x))$ ist.

c) Gib das Fernverhalten von f an.

d) Bestimme die Koordinaten der Punkte des Graphen von f, bei denen der y-West das Fünffache des x-Werts ist

e) Der Graph von f ist symmetrisch zu einer Achse, die mit einer Gleichung der Form $x = a$ beschrieben werden kann. Bestimme a.

LÖSUNGEN (Teil ohne Hilfsmittel)

1a) $f(x) = x^2 + 2x$
$f'(x) = 2x + 2$

$f(1) = 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \Rightarrow P(1|3)$

$f'(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$
$\Rightarrow t(x) = 4x + b$

$P(1|3)$ auf $t \Rightarrow t(1) = 3$
$4 \cdot 1 + b = 3$
$4 + b = 3$
$b = -1$

$\Rightarrow t(x) = 4x - 1$

$n(x) = mx + c$
$m \cdot 4 = -1$
$\Rightarrow m = -0{,}25$
$\Rightarrow n(x) = -0{,}25x + c$

$P(1|3)$ auf $n \Rightarrow n(1) = 3$
$-0{,}25 \cdot 1 + c = 3$
$c = 3{,}25$

$\Rightarrow n(x) = -0{,}25x + 3{,}25$

b) $g(x) = 6x - 4$ hat Steigung 6

$\Rightarrow 2x + 2 = 6$

$2x = 4$

$x = 2$

Probe: Liegt $P(2/f(2))$ auf g und f?

$f(2) = 2^2 + 2 \cdot 2 = 8$

$g(2) = 6 \cdot 2 - 4 = 8$ ✓

$\Rightarrow$ g ist die Tangente an f durch $P(2|8)$

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

d) $f(x) = 5x$

$x^2 + 2x = 5x \quad | -5x$

$x^2 - 3x = 0$

$x \cdot (x - 3) = 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 3$

$f(0) = 0$

$f(3) = 3^2 + 2 \cdot 3$

$= 9 + 6$

$= 15$

$\Rightarrow P_1(0/0)$

$P_2(3/15)$

e) Parabeln (die Graphen von quadratischen Funktionen) sind symmetrisch zu einer Achse, die durch den Scheitelpunkt (den Extrempunkt) verläuft.
Wir müssen also den x-Wert des Scheitelpunktes bestimmen

$f(x) = x^2 + 2x$

$f'(x) = 2x + 2$

$2x + 2 = 0$

$2x = -2$

$x = -1$

$\Rightarrow a = -1$

AUFGABEN (TEIL MIT HILFSMITTELN)

1) Gegeben sei die Funktion $f(x) = 0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x - 6{,}2$.

a) Bestimme die Nullstellen von f

b) Bestimme rechnerisch die Extremstellen von f.

c) Gib die Monotoniebereiche von f an.

d) Bestimme die Stellen, an denen der Graph keine Krümmung hat.

e) Bestimme rechnerisch die Gleichung der Tangente an f durch $P(0/y_0)$.

f) Bestimme die Stellen, an denen der Graph einen Steigungswinkel von 40° besitzt.

g) Gib das Fernverhalten des Graphen an.

h) Bestimme rechnerisch die Gleichung einer Geraden, die genau 2 Schnittpunkte mit f hat.

i) Bestimme rechnerisch die Gleichung einer Geraden, die genau einen Schnittpunkt mit f hat.

LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1a) Ich habe den Graphen von f mit dem Graph-Programm des GTR gezeichnet und mir anschließend die NS anzeigen lassen. Der GTR zeigt NS bei $x_1 \approx -4{,}43$, $x_2 = -1$ und $x_3 = 2$. Da eine kubische Funktion nur maximal 3 NS haben kann, fehlt keine.

b) $f'(x) = 2{,}1x^2 + 4{,}8x - 4{,}5$
$f''(x) = 4{,}2x + 4{,}8$

N.B.: $f'(x) = 0$
$2{,}1x^2 + 4{,}8x - 4{,}5 = 0$
(GTR ...)
$x_1 = -3$
$x_2 \approx 0{,}71$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f''(-3) = -7{,}8 \Rightarrow$ HP bei $x = -3$
$f''(0{,}71) = 7{,}782 \Rightarrow$ TP bei $x = 0{,}71$

$\Rightarrow$ HP bei $x = -3$
TP bei $x = 0{,}71$

(Laut Aufgabe sind die Extremstellen gesucht, nach den y-Werten wird also nicht gesucht).

c) für $x < -3$ streng monoton wachsend
$-3 < x < 0{,}71$ " " fallend
$0{,}71 < x$ " " wachsend

d) Die Stellen, wo der Graph keine Krümmung hat, sind solche wo $f''(x)$ eine NS hat.
Ich habe den Graphen von $f''(x) = 4{,}2x + 4{,}8$ mit dem Graph-Programm des GTR gezeichnet und habe mir die NS anzeigen lassen. Sie lag bei $x = -1{,}14$. Da eine lineare Funktion nur eine NS hat, kann es keine weitere geben.
$\Rightarrow x \approx -1{,}14$

e) $f(0) = -6{,}2 \Rightarrow P(0|-6{,}2)$

$t(x) = ax + b$

$a = f'(0)$
$a = 2{,}1 \cdot 0^2 + 4{,}8 \cdot 0 - 4{,}5$
$a = -4{,}5$
$\Rightarrow t(x) = -4{,}5x + b$

$P(0|-6{,}2)$ liegt auf t $\Rightarrow t(0) = -6{,}2$
$-4{,}5 \cdot 0 + b = -6{,}2$
$b = -6{,}2$

$\Rightarrow t(x) = -4{,}5x - 6{,}2$

f) x mit Steigungswinkel $40° \Rightarrow f'(x) = \tan 40°$
$f'(x) = 0{,}84$

Wir suchen die x-Werte, für die $f'(x) = 0,84$.
Dazu lasse ich den Graphen von f' vom Graph-Programm des GTR zeichnen ($f'(x) = 2,1x^2 + 4,8x - 4,5$).
Dann bestimme ich die x-Werte, indem ich beim Befehl X-CAL 0,84 für y eingebe.
Ich erhalte $x_1 \approx -3,1$ und $x_2 \approx 0,82$.
Da der Graph eine Parabel ist, kann es nur zwei x-Werte geben.

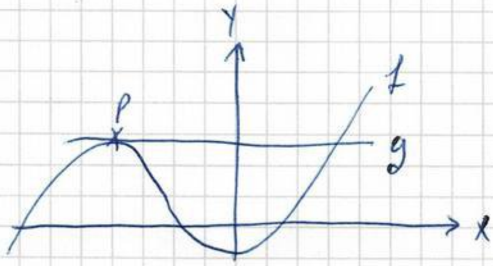
$\Rightarrow x_1 \approx 3,1$
$\quad x_2 \approx 0,82$

g)

$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

h)



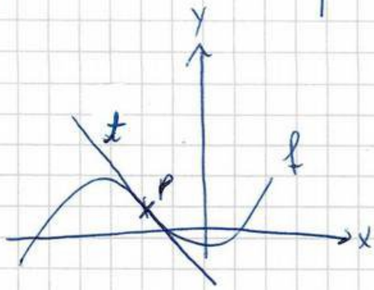
Die Tangente an f durch den Hochpunkt hat genau 2 Schnittpunkte. Ihre Steigung muss 0 sein, da es sich um eine ES handelt.

$f(-3) = 10$

$\Rightarrow g(x) = 10$

Probe: $f(x) = g(x)$
$0,7x^3 + 2,4x^2 - 4,5x - 6,2 = 10$
GTR...
$x_1 = -3$
$x_2 = 2,57$

i)



Die Tangente durch den Wendepunkt („Wendetangente")
erfüllt die Bedingung.

N.B.: $f''(x) = 0$
$x \approx -1{,}14$

H.B.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$
$f'''(x) = 4{,}2$
$f'''(-1{,}14) \neq 0 \Rightarrow$ WP bei $x = -1{,}14$

$f(-1{,}14) \approx 1{,}03 \Rightarrow WP(-1{,}14 / 1{,}03)$

Tangente:
$f'(-1{,}14) \approx -7{,}24$
$\Rightarrow t(x) = -7{,}24\,x + b$

$WP(-1{,}14 / 1{,}03) \Rightarrow -7{,}24 \cdot (-1{,}14) + b = 1{,}03$
löst auf t
$8{,}2536 + b = 1{,}03$
$b = -7{,}2236$
$b \approx -7{,}22$

$\Rightarrow t(x) = -7{,}24\,x - 7{,}22$

Probe: $f(x) = t(x)$
$0{,}7x^3 + 2{,}4x^2 - 4{,}5x = -7{,}24x - 7{,}22$
(GTR...)
$x \approx 1{,}14$