Aufgaben (Teil A)

<u>Aufgabe 1:</u> Bestimme die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

b) $f(x) = 3x^2 + 3x - 18$

c) $f(x) = x^4 - 13x^2 + 36$

d) $f(x) = x^3 + 20x^2$

e) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 3$

f) $f(x) = (x^2 - 4) \cdot (x + 2)$

g) $f(x) = x^5 - 3x^3 - 4x$

h) $f(x) = \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^2} - 1$

i) $f(x) = x^3 + 27$

<u>Aufgabe 2</u>

Gib an, welche der folgenden Funktionen symmetrisch zur y-Achse bzw. zum Koordinatenursprung sind:

$f_1(x) = x^6 - 8x^4 + 10$

$f_2(x) = x^3 + 3x$

$f_3(x) = 2x^3 + x^2 + 3x + 5$

$f_4(x) = 8$

Aufgabe 3

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^2 + a \cdot x$, $a \in \mathbb{R}$.
Wie muss man a wählen, damit $x = 5$ eine Nullstelle von f ist?

Aufgabe 4

a) Gib die Gleichung einer beliebigen ganzrat. Funktion 3. Grades an, welche drei verschiedene Nullstellen hat.

b) Gib die Gleichung einer beliebigen ganzrat. Funktion 4. Grades an, welche genau drei verschiedene Nullstellen hat.

Aufgabe 5: Bestimme jeweils x.

a) $2^x = 16$

b) $x^3 = -27$

c) $5^x = 1$

d) $5^x = \frac{1}{25}$

e) $\log_2(8) = x$

d) $\log_x(49) = 2$

e) $\log_2(x) = 5$

f) $3^{\log_3(7)} = x$

g) $\log_a(a^3) = x$

Aufgabe 6: Bestimme jeweils x

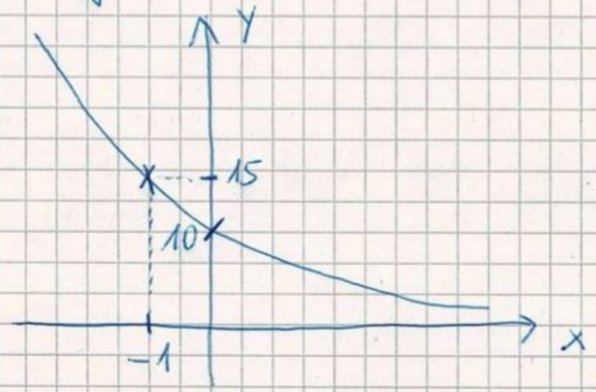
a) $\log_2(x+7) = 4$

b) $\log_2(2x+4) - 3 = 2$

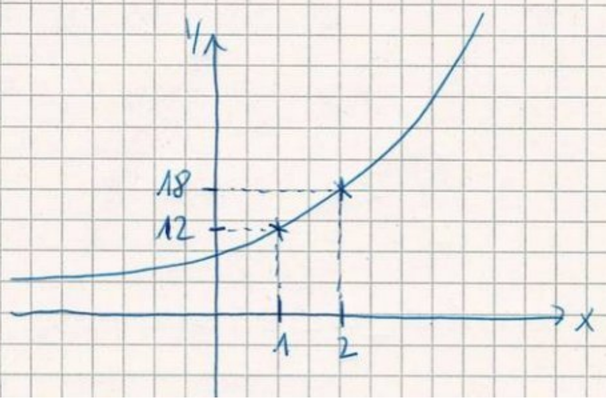
Aufgabe 7

Gegeben ist der Graph einer Exponentialfunktion. Bestimme eine Funktionsgleichung:

a)



b)



Aufgabe 8

Gegeben sei die Funktion $f(x) = x^3 + 4$. Sie ist symmetrisch zu einem Punkt $P(x_0 / y_0)$. Bestimme x_0 und y_0.

Aufgabe 9 (Abitur Baden-Württemberg 2004)

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f. Welche der folgenden Aussagen über die Funktion f sind wahr, falsch oder unentscheidbar?
Begründen Sie Ihre Antworten.

(1) f ist streng monoton wachsend für $-3<x<3$.
(2) Das Schaubild von f hat mindestens einen Wendepunkt.
(3) Das Schaubild von f ist symmetrisch zur y-Achse.
(4) Es gilt $f(x)>0$ für alle $x\in[-3;3]$

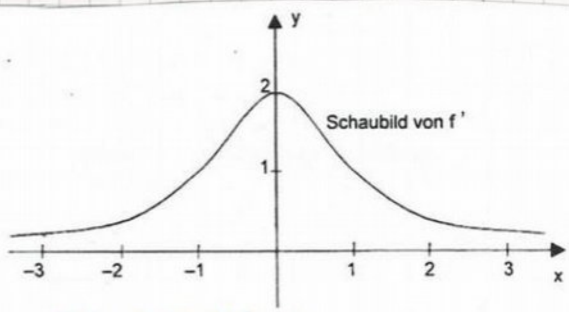


Schaubild ≙ Graph

Aufgabe 10 (Hamburg Nr. 22)

Die Abbildung 13 zeigt den Graphen einer ganzrationalen Funktion f.

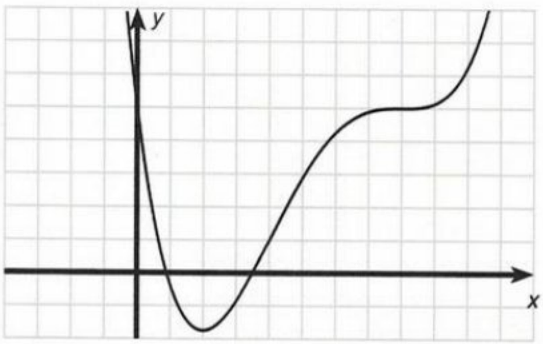


Abb. 13

a) Skizzieren Sie in der Abbildung den Graphen der ersten Ableitungsfunktion von f.

b) Begründen Sie, dass der Grad der Funktion mindestens vier ist.

Aufgabe 11 (Hamburg Nr. 30)

An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen pro Kubikmeter zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ mit $t \in I\!R$, $0 \leq t \leq 10$, beschrieben werden.

a) Bestimmen Sie die mittlere Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde während der ersten beiden Stunden der Messung.

b) Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane zeitliche Änderung der Anzahl der Pollen pro Kubikmeter und Stunde -30 beträgt.

Aufgabe 12 (Hamburg Nr. 31)

Eine Windkraftanlage liefert elektrische Ladung an einen Akku. Außerdem wird dem Akku durch eine Wasserpumpe elektrische Ladung entzogen.
Die im Akku enthaltene Ladungsmenge wird in Abhängigkeit von der Zeit t ($t \in \mathbb{R}^+$) innerhalb des Beobachtungszeitraums $0 \leq t \leq 4$ modellhaft durch eine Funktion Q beschrieben.

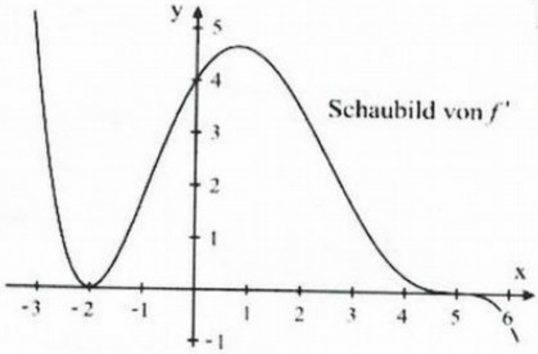
a) Für den Beobachtungszeitraum ergibt sich $Q(t) = 5 \cdot t^2 - 5 \cdot t + C$.
Interpretieren Sie die Bedeutung von C im Sachkontext.

b) Die Ladungsmenge im Akku zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{2}$ beträgt $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 18\frac{3}{4}$.
Am Ende des Beobachtungszeitraums setzt der Wind aus, der Akku wird nicht mehr geladen. Die Wasserpumpe läuft unverändert weiter und entnimmt dem Akku gleichmäßig 5 Mengeneinheiten der Ladungsmenge pro Zeiteinheit.
Bestimmen Sie die Zeitdauer bis zur vollständigen Entladung des Akkus, wenn es windstill bleibt.

Aufgabe 13 (Abitur Baden-Württemberg 2006)

Die Abbildung zeigt das Schaubild der Ableitungsfunktion f' einer Funktion f.
Geben Sie für jeden der folgenden Sätze an, ob er richtig, falsch oder nicht entscheidbar ist.
Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(1) Das Schaubild von f hat bei $x = -2$ einen Tiefpunkt.
(2) Das Schaubild von f hat für $-3 \leq x \leq 6$ genau zwei Wendepunkte.
(3) Das Schaubild von f verläuft im Schnittpunkt mit der y-Achse steiler als die erste Winkelhalbierende.
(4) $f(0) > f(5)$



Aufgaben (Teil B)

Aufgabe 1

1) Eine Bakterienkultur hat um 9 Uhr eine Größe von 10 cm². Sie wächst pro Stunde um 8 %.

a) Beschreibe das Wachstum der Bakterienkultur mit einer Exponentialfunktion

b) Bestimme die Größe der Kultur um 10:12 Uhr?

c) Bestimme rechnerisch die Zeit, welche die Kultur für eine Verdopplung ihrer Größe braucht

d) Eine zweite Kultur lässt sich mit der Funktion $g(x) = 20 \cdot 1{,}04^x$ beschreiben, wobei x die Zeit in Stunden ab 10 Uhr ist und g(x) die Größe in cm².
Bestimme rechnerisch, wann die beiden Kulturen gleich groß sind.
Und gib an, welche der beiden Kulturen schneller wächst.

e) Eine dritte Kultur ist um 9 Uhr 8 cm² groß. Sie wächst schneller als die erste. Um 11 Uhr ist sie genauso groß wie Kultur 1.
Beschreibe das Wachstum von Kultur 3 mit einer Exponentialfunktion

f) Um 12 Uhr wird die Hälfte der ersten Kultur durch einen Labortechniker entfernt. Bestimme rechnerisch, wie lange sie braucht, bis die die verlorene Fläche zurückgewonnen hat.

Aufgabe 2

2) Gegeben sei ein Stausee. Die Funktion $f(x) = x^3 - 11x^2 + 28x$, $0 \leq x \leq 7$, beschreibt, wie viel Wasser pro Stunde zu- bzw. abfließt (Veränderungsrate). Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 10 Uhr und $f(x)$ für die Veränderungsrate in Tausend Liter pro Stunde. Eine positive Veränderungsrate bedeutet Zufluss, eine negative Abfluss.

a) Bestimme die Höhe der Veränderungsrate um 12 Uhr

b) Bestimme den Zeitpunkt, zu dem die Veränderungsrate 10.000 ℓ/h beträgt.

c) Bestimme rechnerisch die Zeitpunkte, wo die Abflussrate bzw. die Zuflussrate am höchsten war. Gib die jeweilige Höhe der Rate an.

d) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Veränderungsrate am stärksten zugenommen hat.

e) Bestimme rechnerisch die Zeitpunkte, zu denen am meisten bzw. am wenigsten Wasser im Stausee war.

f) Zeigen Sie: Innerhalb der ersten vier Stunden sind mit Sicherheit weniger als 84.000 ℓ in den Stausee hineingeflossen.

g) Die Funktion g beschreibt die Veränderungsrate des hier betrachteten Stausees, wenn man zusätzlich zu den bei f schon berücksichtigten Zu- und Abflüssen noch einen Zufluss öffnet, durch den konstant 10.000 ℓ/h zufließen.

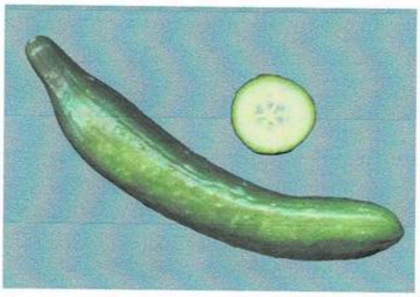
① Bestimme die Gleichung von g

② Bestimme, ob es noch Zeiträume gibt, wo mehr Wasser ab- als zufließt.

Aufgabe 3

3) (Abitur Hamburg 2012)

Der große Lebensmittelkonzern AKEDE bot in seinen Geschäften vor der EHEC-Epidemie im Frühjahr 2011 Salatgurken zu einem Preis von 0,50 € pro Stück an. Der Konzern zahlt den liefernden Landwirten 0,25 € pro Salatgurke.



Landwirt Kleinschmidt baut Salatgurken für AKEDE an. Seine Kosten werden von der Funktion $K(x) = \frac{1}{120}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{50}{3}x + 100$ beschrieben. Dabei steht x für die tägliche Produktionsmenge an Kisten mit jeweils 100 Gurken und f(x) für die täglichen Kosten in Euro.

a) Bestimme eine Funktion G(x), mit der Landwirt Kleinschmidt seinen täglichen Gewinn bzw. Verlust bestimmen kann.

b) Bestimme rechnerisch die Produktionsmengen, bei denen Herr Kleinschmidt insgesamt Gewinn macht.

c) Berechnen Sie die Produktionsmenge, bei der Landwirt Kleinschmidt den maximalen Gewinn erzielt, und geben Sie den größtmöglichen Gewinn an.

Im Frühjahr 2011 kam es zu einer Vielzahl an EHEC-Infektionen. Die Gesundheitsbehörden warnten in dieser Zeit eindringlich vor dem Verzehr von rohen Tomaten, Gurken, Salat und Sojasprossen. Um dennoch möglichst viele der gelieferten Salatgurken abzusetzen, beschloss das Unternehmen AKEDE einige Tage später, den Preis zu senken und auch den Landwirten wie Herrn Kleinschmidt nur noch 15 € pro Kiste zu zahlen.

d) Bestimme rechnerisch, ob Herr Kleinschmidt unter diesen Bedingungen noch einen Gewinn erwirtschaften kann.

Vor der Epidemie wurden in der AKEDE-Filiale in Husstadt täglich 500 Salatgurken verkauft. Nach Beginn der Erkrankungen und vor der Preissenkung setzte die Filiale 70 % weniger ab.

g) AKEDE verkaufte die Salatgurken nach der Preissenkung in seinen Geschäften zu einem Preis von 0,20 €.

- Ermitteln Sie, wie viele Salatgurken die Filiale in Husstadt nach der Preissenkung mindestens täglich verkaufen müsste, damit die Preissenkung nicht zu einer weiteren Reduzierung des Erlöses für AKEDE führt.
- Beurteilen Sie, ob das Ziel einer Steigerung des Erlöses mittels der beschriebenen Preissenkung in der Krisensituation realistisch ist. (10P)

Aufgabe 4

4) Der Verlauf einer Straße wird beschrieben durch die Funktion $f(x) = x^3 - 12x^2 + 32x$, $0 \le x \le 9$. Die x- und y-Achse geben die Himmelsrichtungen an. Eine Längeneinheit entspricht einem Kilometer in der Realität.

a) Bestimme rechnerisch die am weitesten nördlich und die am weitesten südlich gelegene Stelle der Straße.

b) Der Ort Tiexdorf hat die Koordinaten T(2|24). Bestimme rechnerisch, ob die Straße durch Tiexdorf verläuft.

c) Bestimme rechnerisch, wie weit man von Tiexdorf aus nach Osten gehen muss, um (wieder) auf die Straße zu stoßen.

d) Gib an, in welchen Bereichen die Straße nach links bzw. nach rechts gekrümmt ist.

Aufgabe 5

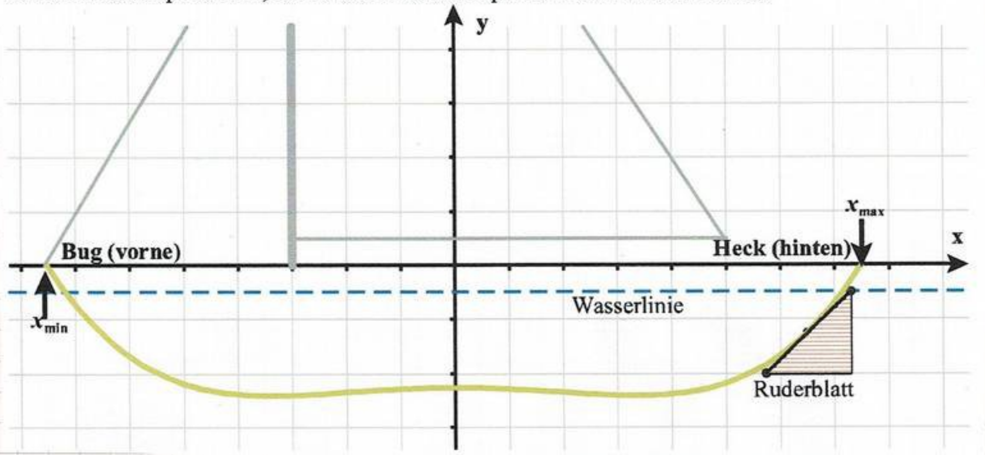
5) (Abitur Hamburg 2010)

Der Segler Piet Meyer möchte sich eine neue Jacht für das Hochseesegeln bauen lassen. Dazu trifft er sich mit seinem Schiffskonstrukteur, um dessen Entwurf für die Rumpfform von Meyers neuem Schiff zu diskutieren.

Der Konstrukteur stellt für die Seitenansicht des Schiffes die folgende Funktion f auf:

$$f(x)=\frac{1}{6750}x^4-\frac{1}{75}x^2-4{,}5 \quad \text{für} \quad x\in[x_{min};x_{max}] \text{ (siehe Skizze)}$$

Eine Einheit entspricht 1 m, eine Kästchenseite entspricht hier 2 m in der Realität.



a) Bestimme die Länge des Schiffes

Der Rumpf eines Schiffes ist allerdings nicht komplett unter Wasser. Es ragt ein gewisser Teil aus dem Wasser heraus. Die Seitenansicht dieses Teils nennt man *Freibord*. Wir gehen davon aus, dass die Wasserlinie parallel zur oben eingezeichneten x-Achse liegt.

b) Bestimmen Sie den maximalen Tiefgang, wenn das Freibord um $h=1\,\text{m}$ über die Wasserlinie herausragt.

In dem Punkt $(13\,|\,f(13))$ wird ein Ruderblatt in Form eines rechtwinkligen Dreiecks befestigt. Die Hypotenuse des Dreiecks soll dabei tangential zum Rumpf verlaufen, d.h. den Rumpf im angegebenen Befestigungspunkt berühren, und soll genau bis zur Wasserlinie reichen.

c)
- Zeigen Sie, dass die Gleichung dieser Tangente in guter Näherung $g(x)=0{,}96x-15$ lautet.
- Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Tangente mit der Wasserlinie und berechnen Sie die Fläche in der Seitenansicht des Ruderblattes, wenn das Ruderblatt 3 m hoch ist.

Die maximale Geschwindigkeit, die ein Schiff der obigen Bauart durch Windkraft erreichen kann, hängt von der Länge des Schiffes entlang der Wasserlinie ab. Eine Faustformel zur Berechnung der maximalen Geschwindigkeit v in km/h ist für ein Einrumpfschiff

$$v_E=4{,}5\cdot\sqrt{\text{Länge des Schiffes in m entlang der Wasserlinie}}$$

d) Berechnen Sie, wie schnell Herr Meyer mit der obigen Konstruktion eines Einrumpfschiffes maximal sein kann und wie lange er auf einer Regattastrecke von 500 Seemeilen mindestens unterwegs sein wird (1 Seemeile ≈ 1852 m).

Aufgabe 6

6) (Abitur Baden-Württemberg 2015)

Der Laderaum eines Lastkahns ist 50 m lang. Sein Querschnitt ist auf der gesamten Länge gleich und wird beschrieben durch die Funktion $f(x) = \frac{1}{125}x^4$, $-5 \leq x \leq 5$. Alle Angaben sind in Metern.

a) Bestimme die Tiefe des Laderaumes in der Mitte

b) Bestimme die Breite des Laderaumes in 3 m Höhe

c) Bestimme den Bereich, in dem der Boden des Laderaums eine Steigung unter 2,86° hat

d) Zur Wartung steht der Lastkahn auf einer ebenen Plattform. Dort wird er stabilisiert durch gerade Stützen, die orthogonal zur Außenwand des Laderaums angebracht sind. Betrachtet werden zwei einander gegenüberliegende Stützen, deren Befestigungspunkte am Kahn durch die Punkte $P_1(-4 \mid f(-4))$ und $P_2(4 \mid f(4))$ beschrieben werden.

Bestimme rechnerisch, in welchem Abstand voneinander diese Stützen auf der Plattform enden.