LÖSUNGEN (Teil A)

1 a) $x = 3$, denn $2^3 = 8$

b) $x = -1$, denn $2^{-1} = \frac{1}{2}$

c) $x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$

d) $x = 2^5 = 32$

e) $x = 0$, denn $3^0 = 1$

f) $x = 5$, denn $e^5 = e^5$

g) $\ln(x) = 2 \Leftrightarrow e^2 = x$

h) $e^x - 1 = 0$

$e^x = 1$

$x = 0$

i) $e^x - \frac{1}{e} = 0$

$e^x = \frac{1}{e}$

$e^x = e^{-1}$

$\Rightarrow x = -1$

2 a) $f'(x) = e^x$

b) $f'(x) = 6 \cdot e^{3x}$

c) $f'(x) = (2x + 2) \cdot e^x + (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x$

$= (x^2 + 4x + 3) \cdot e^x$

d) $f'(x) = (4x+4)\cdot e^{2x} + (2x^2+4x+5)\cdot 2\cdot e^{2x}$

$= (4x+4)\cdot e^{2x} + (4x^2+8x+10)\cdot e^{2x}$

$= (4x^2+12x+14)\cdot e^{2x}$

e) $f'(x) = (3x^2+2)\cdot e^{x^2} + (x^3+2x)\cdot 2x\cdot e^{x^2}$

$= (3x^2+2)\cdot e^{x^2} + (2x^4+4x^2)\cdot e^{x^2}$

$= (2x^4+7x^2+2)\cdot e^{x^2}$

f) $f'(x) = 2(e^{2x}+1)\cdot 2e^{2x}$

$= (e^{2x}+1)\cdot 4e^{2x}$

$= 4e^{4x} + 4e^{2x}$

3a) keine Nullstellen
b) keine Nullstellen
c) $(x+3)\cdot e^{2x} = 0$

$x+3=0$ oder $e^{2x}=0$

↯

$\underline{x=-3}$

d) $(x^2-9)\cdot e^{5x}=0$

$x^2-9=0$ oder $e^{5x}=0$

↯

$x^2=9$

$x_1=3$

$x_2=-3$

e) $(x^2 - 4x + 4) \cdot e^{2x} = 0$

$x^2 - 4x + 4 = 0$ oder $e^{2x} = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \lightning$

$x = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$\underline{x = 2}$

f) $(x^3 - 4x^2) \cdot e^x = 0$

$x^3 - 4x^2 = 0$ oder $e^x = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \lightning$

$x^2 \cdot (x-4) = 0$

$x^2 = 0$ oder $x - 4 = 0$

$\underline{x_1 = 0}$ $\qquad \underline{x_2 = 4}$

4) Zu f gehört b

Zu g gehört c

5a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 20$

b) $S_y(0|18)$ $\qquad f(0) = 20 - 2 \cdot e^0 = 20 - 2 = 18$

c) $20 - 2e^x = 0$

$20 = 2e^x$

$10 = e^x$

$\underline{x = \ln(10)}$

6a) $e^{-x}-1=0$

$e^{-x}=1$

$\Rightarrow -x=0$

$x=0$

b) $f'(x)=-e^{-x}$

$f'(-1)=-e^{-(-1)}=-e$

$\Rightarrow t(x)=-ex+b$

$f(-1)=e^{-(-1)}-1=e^{1}-1=e-1$

$A(-1/e-1)$ liegt auf t $\Rightarrow t(-1)=e-1$

$\Rightarrow -e\cdot(-1)+b=e-1$

$e+b=e-1$

$b=-1$

$\Rightarrow t(x)=-ex-1$

7) $f(x)=e^{0,5x^2}$

$f'(x)=x\cdot e^{0,5x^2}$

$f''(x)=e^{0,5x^2}+x\cdot x\cdot e^{0,5x^2}$

$=e^{0,5x^2}+x^2\cdot e^{0,5x^2}$

$f''(0)=e^0+0\cdot e^0=1$

8a) $f(x) = e^{-2x+1} + 1$

$f'(x) = -2 \cdot e^{-2x+1}$

$f'(0{,}5) = -2 \cdot e^{-2 \cdot 0{,}5 + 1}$

$= -2 \cdot e^{-1+1}$

$= -2 \cdot e^{0}$

$= -2$

b) Gleichung der Tangente:

$t(x) = -2x + b$

$f(0{,}5) = e^{-2 \cdot 0{,}5 + 1} + 1$

$= e^{-1+1} + 1$

$= e^{0} + 1$

$= 2$

$A(0{,}5 | 2)$ auf $t \Rightarrow t(0{,}5) = 2$

$-2 \cdot 0{,}5 + b = 2$

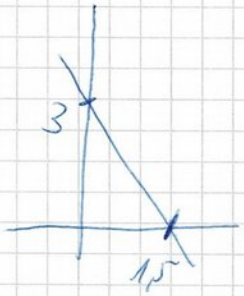
$-1 + b = 2$

$b = 3$

$\Rightarrow t(x) = -2x + 3$

Schnittpunkte mit den Achsen:

x-Achse	y-Achse
$-2x + 3 = 0$	$S_y(0|3)$
$3 = 2x$	
$1{,}5 = x$	



$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 1,5 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 4,5 = 2,25$ FE

g) $f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2} = 2e^{4x} + 3x^{-2}$

$F(x) = \frac{1}{2}e^{4x} - \frac{3}{1}x^{-1}$

$= 0,5e^{4x} - 3x^{-1}$

$= 0,5e^{4x} - \frac{3}{x}$

10a) $x^2 \cdot e^x = 0$

$x^2 = 0$ oder $e^x = 0$

$x = 0$ ↯

⇒ f hat genau eine Nullstelle

⇒ Das ist nur bei Bild 1 der Fall

b) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x$

$= (x^2 + 2x) \cdot e^x$

$(x^2 + 2x) \cdot e^x = 0$

$x^2 + 2x = 0$ oder $e^x = 0$

$x(x+2) = 0$ ↯

$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$

f' hat genau 2 Nullstellen
$\Rightarrow$ Das ist nur bei Bild 4 der Fall

$g(0) = \frac{1}{f(0)} = \frac{1}{0}$ ↯

g ist nicht definiert für $x = 0$
$\Rightarrow$ Das ist nur bei Bild 3 der Fall

$\Rightarrow$ F gehört zu Bild 2

LÖSUNGEN (TEIL B)

1a) Schnittpunkte mit den Achsen

y-Achse: $f(0) = (0^2 - 2 \cdot 0 + 1) \cdot e^{-0}$

$= 1 \cdot e^0$

$= 1$

$\Rightarrow S_y(0/1)$

x-Achse: $(x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x} = 0$

$x^2 - 2x + 1 = 0$ oder $e^{-x} = 0$ ↯

$x = 1 \pm \sqrt{1-1}$

$x = 1$

$\Rightarrow N(1/0)$

Extrempunkte

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = (2x - 2) \cdot e^{-x} + (x^2 - 2x + 1) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$$

$$= (2x - 2) \cdot e^{-x} + (-x^2 + 2x - 1) \cdot e^{-x}$$

$$= (-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x}$$

$$f''(x) = (-2x + 4) \cdot e^{-x} + (-x^2 + 4x - 3) \cdot (-1) \cdot e^{-x}$$

$$= (-2x + 4) \cdot e^{-x} + (x^2 - 4x + 3) \cdot e^{-x}$$

$$= (x^2 - 6x + 7) \cdot e^{-x}$$

Notw. Bed.: $f'(x) = 0$

$(-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x} = 0$

$-x^2+4x-3=0$ oder $e^{-x}=0$

↯

$x^2-4x+3=0$

$x=2\pm\sqrt{4-3}$

$x=2\pm\sqrt{1}$

$x_1=1$

$x_2=3$

Hinr. Bed.: $f'(x)=0$ und $f''(x)\neq 0$

$f''(1)=(1-6+7)\cdot e^{-1}=2e^{-1}>0$ TP

$f''(3)=(9-18+7)\cdot e^{-3}=-2\cdot e^{-3}<0$ HP

y-Werte:

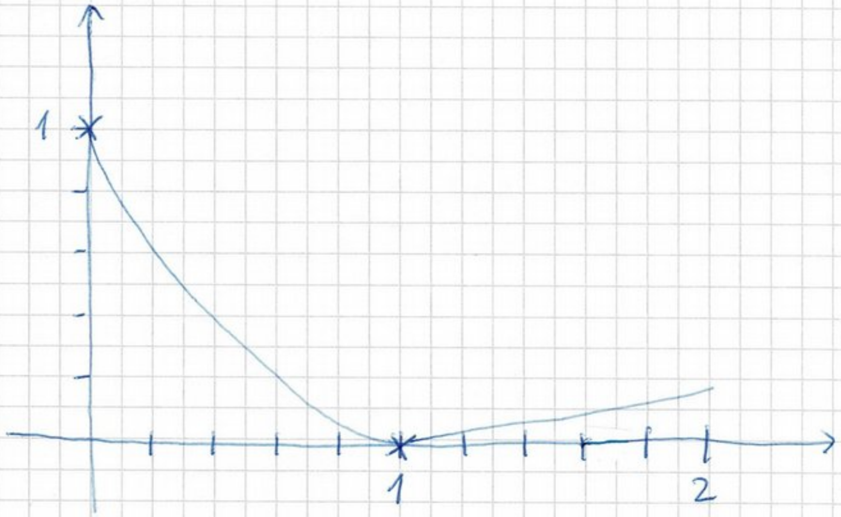
$f(1)=(1-2+1)\cdot e^{-1}=0$

$f(3)=(9-6+1)\cdot e^{-3}=4e^{-3}$

$\Rightarrow$ TP$(1/0)$

HP$(3|4e^{-3})$

b)



c) gesucht: maximale positive Steigung von f

$\Leftrightarrow$ Maximum von f'

(Wendestelle oder Randwert)

Notw. Bed.: $f''(x)=0$

$(x^2-6x+7)\cdot e^{-x}=0$

$x^2-6x+7=0$ oder $e^{-x}=0$

$x=3\pm\sqrt{9-7}$ ↯

($x_1=3+\sqrt{2}$ außerhalb Def.bereich)

$x_2=3-\sqrt{2}$

Hinr. Bed.: (laut Aufgabenstellung nicht notwendig)

$$f'(0)=(-0^2+4\cdot 0-3)\cdot e^0=-3<0$$

$$f'(3-\sqrt{2})\approx f'(1{,}59)$$

$$=(-1{,}59^2+4\cdot 1{,}59-3)\cdot e^{-1{,}59}$$

$$=0{,}8319\cdot e^{-1{,}59}=0{,}1696$$

$$\approx 0{,}17$$

$$f'(2)=(4-12+7)\cdot e^{-2}$$

$$=-1\cdot e^{-2}<0$$

$\Rightarrow x\approx 1{,}59$ mit $f'(x)\approx 0{,}17$

d)

$$F'(x)=(-2x)\cdot e^{-x}+(-x^2-1)\cdot(-1)\cdot e^{-x}$$

$$=-2x\cdot e^{-x}+(x^2+1)\cdot e^{-x}$$

$$=(x^2-2x+1)\cdot e^{-x}=f(x)$$

$$A = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (x^2-2x+1)\cdot e^{-x}\,dx$$

$$= \left[(-x^2-1)\cdot e^{-x}\right]_0^1$$

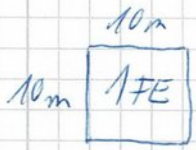
$$= (-1-1)\cdot e^{-1} - (0-1)\cdot e^{0}$$

$$= -2e^{-1} + 1$$

$$= 1-2e^{-1}$$

$$\approx 0{,}2642 \text{ FE}$$

$$= 26{,}42 \text{ m}^2$$



1FE = 10m · 10m

e) $f'(0) = -3$

$\Rightarrow t(x) = -3x + b$

R(0|1) auf t $\Rightarrow t(0) = 1$

$-3\cdot 0 + b = 1$

$b = 1$

$\Rightarrow t(x) = -3x + 1$

Schnittpunkte von t mit den Koordinatenachsen:

y-Achse

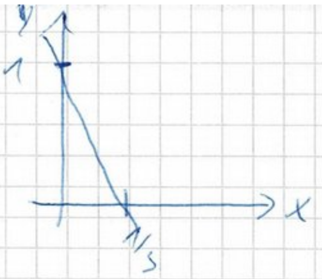
$S_y(0|1)$

x-Achse

$-3x+1=0$

$1=3x$

$1/3 = x$



$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{6}$ FE

$= 16{,}67\ m^2$

Einsparung: $26{,}42\ m^2 - 16{,}67\ m^2 = 9{,}75\ m^2$

$\Rightarrow$ Einsparung $9{,}75\ m^2$

f) gesucht: $p(x) = ax^2 + bx + c \qquad p'(x) = 2ax + b$

$R(0|1)$ auf $p \Rightarrow c = 1$

p tangential zu f bei R $\Rightarrow p'(0) = f'(0) = -3$

$\Rightarrow b = -3$

$S(1|0)$ auf $p \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 0$

$a + b + c = 0$

$a - 3 + 1 = 0$

$a - 2 = 0$

$a = 2$

p tangential zu f bei S $\Rightarrow p'(1) = f'(1) = 0$

$\Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0$

$2a - 3 = 0$

$2a = 3$

$a = 1{,}5$

↯

NR: $f'(1) = (-1+4-3) \cdot e$
$= 0$

$\Rightarrow$ Es gibt die gesuchte Funktion p nicht

2a) $f(t) = (2t - t^2) \cdot e^{2-t}$, $0 \le t \le 10$

① Änderungsrate eine Stunde nach Beginn

$f(1) = (2-1) \cdot e^{2-1} = 1 \cdot e = e \approx 2{,}72$

⇒ momentane Änderungsrate ca. $2{,}72 \, \frac{m^3}{h}$

② die ersten 2 Stunden

$(2t - t^2) \cdot e^{2-t} = 0$

$2t - t^2 = 0$ oder $e^{2-t} = 0$

$t \cdot (2 - t) = 0$ ↯

$t_1 = 0$

$t_2 = 2$

$f(1) \approx 2{,}72 > 0$

⇒ $f(t)$ ist positiv für $0 < t < 2$

⇒ Es fließt ständig Wasser in das Becken

③ Minimum

Notw. Bed.: $f'(t) = 0$

$$f'(t) = (2-2t) \cdot e^{2-t} + (2t - t^2) \cdot (-1) \cdot e^{2-t}$$
$$= (2-2t) \cdot e^{2-t} + (t^2 - 2t) \cdot e^{2-t}$$
$$= (t^2 - 4t + 2) \cdot e^{2-t}$$
$$f''(t) = (2t-4) \cdot e^{2-t} + (t^2 - 4t + 2) \cdot (-1) \cdot e^{2-t}$$
$$= (2t-4) \cdot e^{2-t} + (-t^2 + 4t - 2) \cdot e^{2-t}$$
$$= (-t^2 + 6t - 6) \cdot e^{2-t}$$

$(t^2-4t+2)\cdot e^{2-t}=0$

$t^2-4t+2=0$ oder $e^{2-t}=0$

$t=2\pm\sqrt{4-2}$ ↯

$t=2\pm\sqrt{2}$

$t_1=2+\sqrt{2}\approx 3,41$

$t_2=2-\sqrt{2}=0,59$

Hinr. Bed.: $f'(t)=0$ und $f''(t)\neq 0$

$f''(3,41)=(-3,41^2+6\cdot 3,41-6)\cdot e^{2-3,41}$

$=2,83\cdot e^{-1,41}>0$ TP

$f''(0,59)=(-0,59^2+6\cdot 0,59-6)\, e^{2-0,59}<0$ HP

Ränder: $f(0)=0$

$f(3,41)=(6,82-3,41^2)\cdot e^{2-3,41}$

$=-4,81\, e^{-1,41}\approx -0,24$

$f(10)=(20-100)\cdot e^{-8}$

$=-80\cdot e^{-8}\approx -0,13$

⇒ Der Zeitpunkt liegt ca. 3,41 Stunden nach Beobachtungsbeginn

b) $F(x)=t^2\cdot e^{2-t}$ eine Stammfunktion

$F(x)=t^2\cdot e^{2-t}+c$ allgemein alle Stammfunktionen

$F(2)=6 \Rightarrow 2^2\cdot e^{2-2}+c=6$

$4\, e^0+c=6$

$$4 + c = 6$$
$$c = 2$$

$$\Rightarrow F(x) = t^2 \cdot e^{2-t} + 2$$

zu Beobachtungsbeginn:

$$F(0) = 0 \cdot e^{2-0} + 2 = 2$$

$\Rightarrow$ Am Anfang sind es 2 m^3

c) ① g Zuflussrate
h Abflussrate

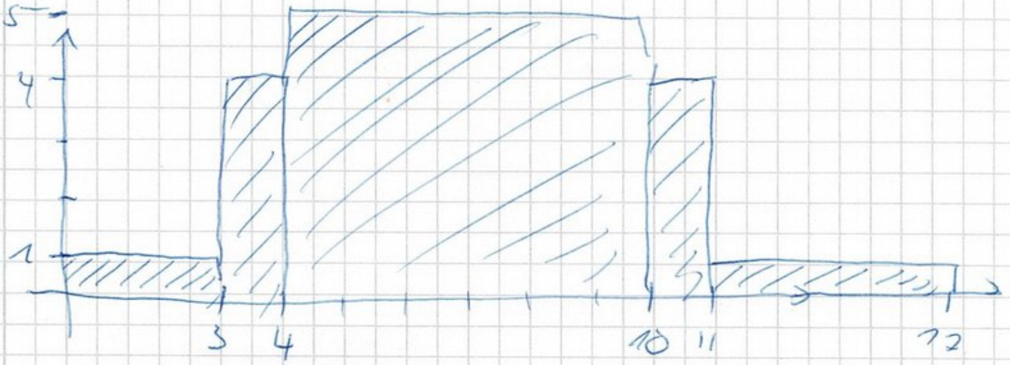
Wenn das Wasservolumen abnimmt, muss der Abfluss größer sein als der Zufluss.
D.h.: h muss über g verlaufen

Schnittpunkte von h und g:
bei $x_1 = 4$ und $x_2 = 11$
Zwischen 4 und 11 liegt h über g
$\Rightarrow$ von 4 h nach Beginn bis 11 h nach Beginn

② Wenn das Wasser 5 m hoch ist, dann haben wir ein Volumen von
$$V = 12\,m^2 \cdot 5\,m = 60\,m^3$$

Wir müssen also untersuchen, ob $60\ m^3$ oder mehr abfließen.

Diese Menge können wir abschätzen, indem wir die Fläche unter dem Graphen von h mit Kästchen abschätzen:



Bei der obigen Abschätzung wurden Rechtecke verwendet, die jeweils größer sind als die Fläche unter h
Ein Kästchen ist $1\ m^3$ (Abfluss von $1\ m^3$ pro Stunde für eine Stunde)

Die Rechtecke beinhalten 47 Kästchen $\hat{=}$ $47\ m^3$

$\Rightarrow$ Es fließen weniger als $60\ m^3$ ab
$\Rightarrow$ 5m werden nicht erreicht

Aufgabe 3

$f(0) = 20.000$

$f(2) = 20.000 \cdot e^{0{,}5818 \cdot 2} \approx 64.028{,}75$

$f(4) = 20.000 \cdot e^{0{,}5818 \cdot 4} \approx 204.984{,}07$

$f(6) = 20.000 \cdot e^{0{,}5818 \cdot 6} \approx 656.243{,}74$

$f(8) = 20.000 \cdot e^{0{,}5818 \cdot 8} \approx 2.100.923{,}47$

Die Funktion weicht relativ stark von den echten Werten ab:

t	0	2	4	6	8
echt	20.000	100.000	205.000	250.000	277500
$f(t)$	20.000	64.028,75	204.984,07	656.243,74	mehr als 2 Mio.

Nur bei $t=0$ und $t=4$ ergeben sich relativ genaue Werte.

Insbesondere wächst der y-Wert sehr stark an.

Laut Aufgabe gibt es aber insgesamt nur 280.000 Server.

$\Rightarrow$ f ist nicht geeignet

b) ① $g(t) = 280.000 - 260.000 \cdot e^{-kt}$

Es gilt: Bei $t=6$ ergibt sich eine Anzahl von 250.000

$$\Rightarrow 250.000 = 280.000 - 260.000\, e^{-k \cdot 6} \quad | -280.000$$

$$-30.000 = -260.000 \cdot e^{-k \cdot 6} \quad | : (-260.000)$$

$$\frac{3}{26} = e^{-k \cdot 6} \quad | \ln$$

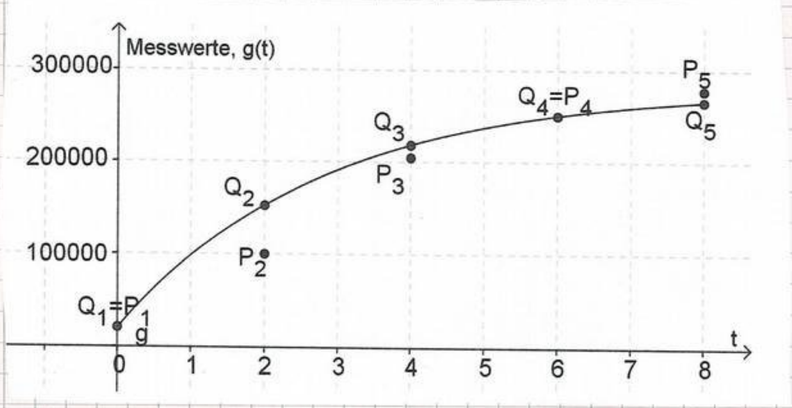
$$\ln\left(\frac{3}{26}\right) = -k \cdot 6 \quad |:(-6)$$

$$-\frac{\ln\left(\frac{3}{26}\right)}{6} = k$$

$$0,3599 \approx k$$

(II) $g(4) = 280.000 - 260.000 \cdot e^{-0,3599 \cdot 4} \approx 218.374$

(III)



c) ① $140.000 = 280.000 - 260.000 \cdot e^{-0,3599\,t} \quad | -280.000$

$$-140.000 = -260.000 \cdot e^{-0,3599\,t} \quad |:(-260.000)$$

$$\frac{7}{13} = e^{-0,3599\,t} \quad |\ln$$

$$\ln(7/13) = -0,3599\,t \quad |:(-0,3599)$$

$$-\frac{\ln(7/13)}{0,3599} = t$$

$$1,72 \approx t$$

$1,72\,h \approx 1\,h\ 43\,min$

$\Rightarrow$ 11:43 Uhr

(II) $\lim\limits_{x \to \infty} g(t) = 280.000$

$\Rightarrow$ Auf lange Sicht werden alle 280.000 Server vom Virus erfasst.

d) (I) $g'(t) = -260.000 \cdot (-0{,}3599) \cdot e^{-0{,}3599\,t}$

$= 93574 \cdot e^{-0{,}3599\,t}$

(II) $g'(2) = 93574 \cdot e^{-0{,}3599 \cdot 2} \approx 45.556{,}47$

(III) $\lim\limits_{x \to \infty} g'(t) = 0$

(IV) Um 12 Uhr beträgt die Geschwindigkeit der Virusverbreitung ca. 45.556,47 $^{\text{Server}}/_{h}$

Auf lange Sicht reduziert sich diese Geschwindigkeit immer weiter & nähert sich 0 an.

4a) $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$

$f'(t) = 20 \cdot e^{-0,5t} + 20t \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5t}$

$= 20 \cdot e^{-0,5t} - 10t \cdot e^{-0,5t}$

$= (-10t + 20) \cdot e^{-0,5t}$

$f''(t) = -10 \cdot e^{-0,5t} + (-10t + 20) \cdot (-0,5) \cdot e^{-0,5t}$

$= -10 \cdot e^{-0,5t} + (5t - 10) \cdot e^{-0,5t}$

$= (5t - 20) \cdot e^{-0,5t}$

höchste Konzentration:

Notw. Bed.: $f'(t) = 0$

$(-10t + 20) \cdot e^{-0,5t} = 0$

$-10t + 20 = 0$ oder $e^{-0,5t} = 0$ ↯

$-10t = -20$

$t = 2$

Hinr. Bed.: $f'(t) = 0$ und $f''(t) \neq 0$

$f''(2) = -10 \cdot e^{-0,5 \cdot 2} = -10 \cdot e^{-1} < 0 \Rightarrow HP$

$f(2) = 40 \cdot e^{-1} \approx 14,7$

$\Rightarrow$ höchste Konzentration 2 h nach Einnahme mit ca. 14,7 mg/l

Abnahme der Konzentration

Die Konzentration nimmt ab, wenn die Ableitung negativ ist

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 2$ (siehe oben)

$f'(3) = (-30 + 20) \cdot e^{-0,5 \cdot 3} = -10 \cdot e^{-1,5} < 0$

$\Rightarrow$ f' ist negativ für $t > 2$

$\Rightarrow$ Konzentration nimmt ständig ab

Gleichung

$f(u)$: Konzentration zum Zeitpunkt u

$f(u+2)$: " " $u+2$

$\Rightarrow$ $f(u)-f(u+2)=5$ antwortet auf die Frage: In welchem zwei-stündigen Zeitraum nimmt die Konzentration um 5 mg/l ab?

b) Wendestelle

$$f'''(t) = 5\cdot e^{-0{,}5t} + (5t-20)\cdot(-0{,}5)\cdot e^{-0{,}5t}$$
$$= 5e^{-0{,}5t} + (-2{,}5t+10)\cdot e^{-0{,}5t}$$
$$= (-2{,}5t+15)\cdot e^{-0{,}5t}$$

Notw. Bed.: $f''(t)=0$

$$(5t-20)\cdot e^{-0{,}5t}=0$$
$$5t-20=0 \text{ oder } e^{-0{,}5t}=0 \quad ↯$$
$$5t=20$$
$$t=4$$

Hinr. Bed.: $f''(t)=0$ und $f'''(t)\neq 0$

$$f'''(4) = (-10+15)\cdot e^{-2}$$
$$= 5\cdot e^{-2} > 0$$

$\Rightarrow$ WS bei $t=4$

Bedeutung:

Zum Zeitpunkt $t=4$ nimmt die Konzentration des Medikaments am stärksten ab

Momentane Änderungsrate

$f'(4) = (-40 + 20)\cdot e^{-2} = -20\cdot e^{-2} \approx -2,71$

Tangente

$f(4) = 20\cdot 4\cdot e^{-0,5\cdot 4} = 80e^{-2}$

$\Rightarrow A(4 / 80e^{-2})$

$f'(4) = -20e^{-2} \Rightarrow t(x) = -20e^{-2}x + b$

$A(4/80e^{-2})$ auf $t \Rightarrow t(4) = 80e^{-2}$

$-20e^{-2}\cdot 4 + b = 80e^{-2}$

$-80e^{-2} + b = 80e^{-2}$

$b = 160e^{-2}$

$\Rightarrow t(x) = -20e^{-2}x + 160e^{-2}$

Moment des Abbaus

$t(x) = 0$

$-20e^{-2}\cdot x + 160e^{-2} = 0$

$160e^{-2} = 20e^{-2}\cdot x$

$8 = x$

$\Rightarrow$ nach 8 h

c) $f(t)$: Konzentration zum Zeitpunkt t
$f(t-4)$: " " " $t-4$
(4h vor t)

$g(t) = f(t) + f(t-4), \quad t \geq 4$

$g(t) = 20t\cdot e^{-0,5t} + 20(t-4)\cdot e^{-0,5(t-4)}$