

AUFGABEN (Teil A)

1) Berechne x :

a) $\log_2(8) = x$

b) $\log_2\left(\frac{1}{2}\right) = x$

c) $\log_x(16) = 2$

d) $\log_2(x) = 5$

e) $\log_3(1) = x$

f) $\ln(e^5) = x$

g) $\ln(x) = 2$

h) $e^x - 1 = 0$

i) $e^x - \frac{1}{e} = 0$

2) Bestimme jeweils die erste Ableitung:

a) $f(x) = e^{x^2}$

b) $f(x) = 2 \cdot e^{3x}$

c) $f(x) = (x^2 + 2x + 1) \cdot e^x$

d) $f(x) = (2x^2 + 4x + 5) \cdot e^{2x}$

e) $f(x) = (x^3 + 2x) \cdot e^{x^2}$

f) $f(x) = (e^{2x} + 1)^2$

3) Bestimme jeweils die Nullstellen:

a) $f(x) = e^x$

b) $f(x) = 3 \cdot e^{5x}$

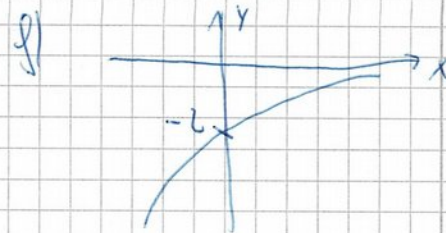
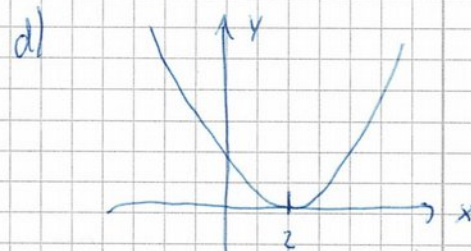
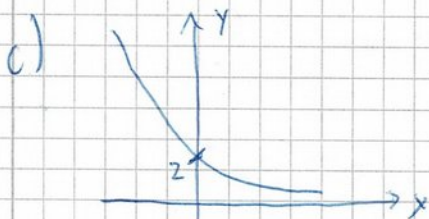
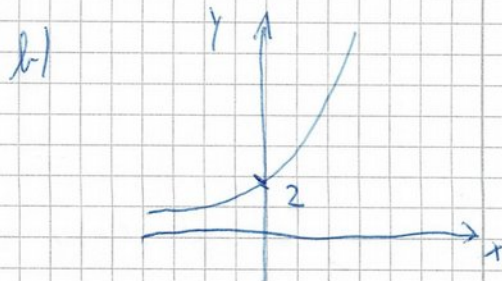
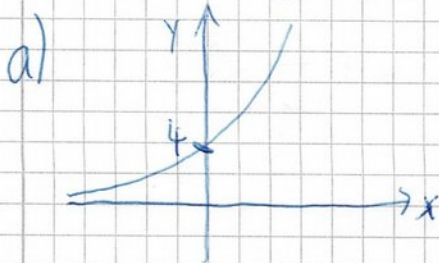
c) $f(x) = (x+3) \cdot e^{2x}$

d) $f(x) = (x^2 - 9) \cdot e^{5x}$

e) $f(x) = (x^2 - 4x + 4) \cdot e^{2x}$

f) $f(x) = (x^3 - 4x^2) \cdot e^x$

4) Gegeben sind die Funktionen $f(x) = 2e^x$ und $g(x) = 2 \cdot e^{-3x}$. Gib an, welcher der nachfolgenden Graphen zu welcher Funktion gehört:



5) Gegeben ist die Funktion
 $f(x) = 20 - 2 \cdot e^x$

a) Gib den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ an.

b) Gib die Koordinaten des Punktes an,
bei dem f die y -Achse schneidet

c) Bestimme die Nullstelle von f

6) (Aufgabensammlung Hamburg 10)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = e^{-x} - 1$

a) Bestimme die Nullstellen von f

b) Zeige, dass die Gleichung $t(x) = -ex - 1$
die Tangente an den Graphen von f
bei $x = -1$ beschreibt.

7) (Abitur Baden-Württemberg 2022)

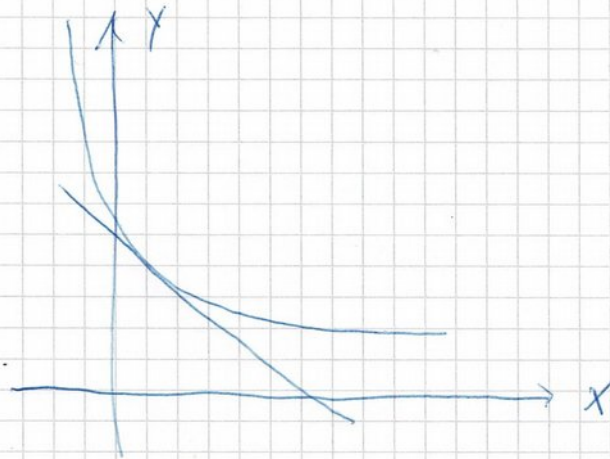
Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{0,5x^2}$

Bestimme den Wert der 2. Ableitung
von f an der Stelle $x = 0$

8) (Abitur Baden-Württemberg 2021)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{-2x+1} + 1$.

Der Graph von f wird in der nach-
folgenden Abbildung dargestellt. Außerdem
sieht man dort die Tangente an f an der Stelle $x = \frac{1}{2}$. -3-



a) Weise nach, dass die Tangente die Steigung -2 hat

b) Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks, das diese Tangente mit den Koordinatenachsen einschließt.

9) (Abitur Baden-Württemberg 2012)

Bestimme eine Stammfunktion der Funktion $f(x) = 2e^{4x} + \frac{3}{x^2}$

10) (Abitur Baden-Württemberg 2005)

Gegeben sind die Schablonen der Funktion f mit $f(x) = x^2 \cdot e^x$, ihrer Ableitungsfunktion f' , einer Stammfunktion F von f und der Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$.

- Begründen Sie, dass nur Bild 1 das Schabild der Funktion f sein kann.
- Ordnen Sie die Funktionen f' , F und g den übrigen Schabildern zu und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Bild 1

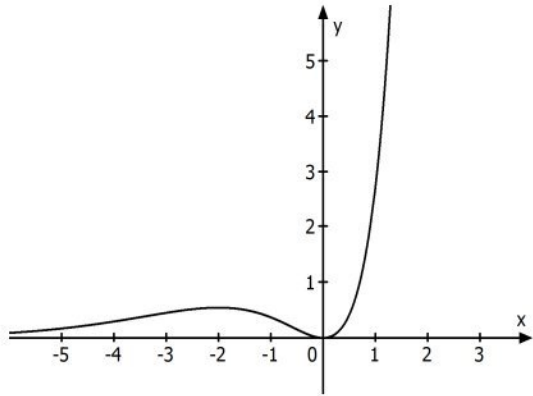


Bild 2

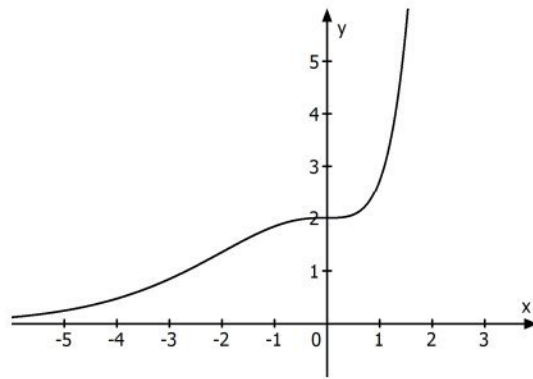


Bild 3

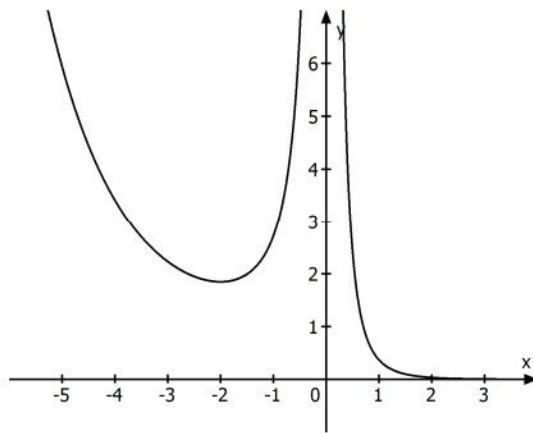
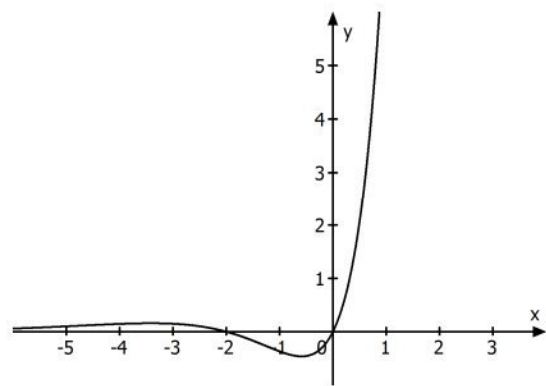


Bild 4



Aufgaben (Teil B)

Aufgabe 1 (Abitur Berlin 2017)

Zentrale schriftliche Abiturprüfung 2017

Land Berlin

Aufgabe 1.2: Dachformen

Auf dem Foto sehen Sie einen Teil des Daches eines Berliner Veranstaltungsortes. Das Dach ist aus mehreren gleichartigen Dachelementen zusammengesetzt. Für ein anderes Gebäude wird ein ähnliches Dach geplant. Die äußere Kante des geplanten Dachelementes lässt sich im Intervall $[0;2]$ annähernd durch die Funktion f mit $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \cdot e^{-x}$ beschreiben, $1 \text{ LE} = 10 \text{ m}$.



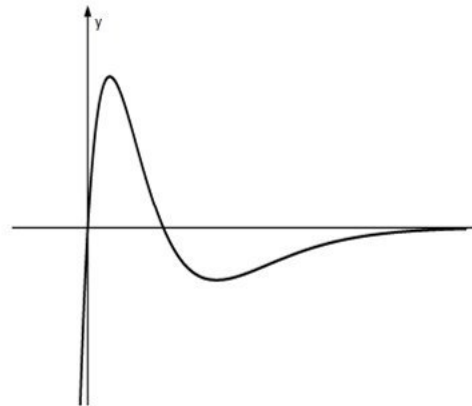
- Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte des Graphen von f mit den Koordinatenachsen.
Ermitteln Sie Art und Lage aller Extrempunkte des Graphen von f .
[Zur Kontrolle: $f'(x) = (-x^2 + 4x - 3) \cdot e^{-x}$]
- Zeichnen Sie den Graphen der Funktion f im oben angegebenen Intervall.
- Im Intervall $[0;2]$ gibt es eine Stelle x_p , an der der Graph von f die maximale positive Steigung hat.
Bestimmen Sie den Wert von x_p und die Steigung des Graphen von f an dieser Stelle.
Hinweis: Es genügt die Untersuchung der notwendigen Bedingung.
- Für eine Veranstaltung soll unter einem Dachelement eine Trennwand errichtet werden. Diese Trennwand wird im Intervall $[0;1]$ durch den Funktionsgraphen und die x -Achse begrenzt.
Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = (-x^2 - 1) \cdot e^{-x}$ eine Stammfunktion von f ist.
Berechnen Sie den Flächeninhalt der Trennwand, $1 \text{ LE} = 10 \text{ m}$.
- Es wird vorgeschlagen, statt der Trennwand eine kleinere Wand zu verwenden, die begrenzt ist durch die Koordinatenachsen und die Tangente an den Graphen von f im Punkt $R(0|1)$.
Ermitteln Sie eine Gleichung für diese Tangente.
Berechnen Sie, wie viele Quadratmeter Wandfläche durch den Vorschlag eingespart werden.
- Der Graph einer quadratischen Funktion p soll in den Punkten $R(0|1)$ und $S(1|0)$ tangential zum Graphen von f verlaufen.
Geben Sie vier Bedingungen an, die p erfüllen muss und untersuchen Sie, ob es eine solche Funktion p gibt.

Verteilung der Bewertungseinheiten (BE) auf die Teilaufgaben							
Teilaufgabe	a)	b)	c)	d)	e)	f)	Summe
BE	11	3	5	5	9	7	40

Aufgabe 2 (Abitur Baden-Württemberg 2022)

Aufgabe A 2.1 (13 VP)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit $f(t) = (2t - t^2) \cdot e^{2-t}$, die für $0 \leq t \leq 10$ die momentane Änderungsrate des Wasservolumens in einem Becken beschreibt (t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $f(t)$ in Kubikmeter pro Stunde).



- a) Geben Sie die momentane Änderungsrate des Wasservolumens eine Stunde nach Beobachtungsbeginn an. (0,5 VP)

Begründen Sie, dass das Wasservolumen in den ersten beiden Stunden nach Beobachtungsbeginn niemals abnimmt. (1,5 VP)

Die momentane Änderungsrate des Wasservolumens besitzt ein Minimum. Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem dieses Minimum angenommen wird. (Teilergebnis: $t_{\min} = 2 + \sqrt{2}$) (2,5 VP)

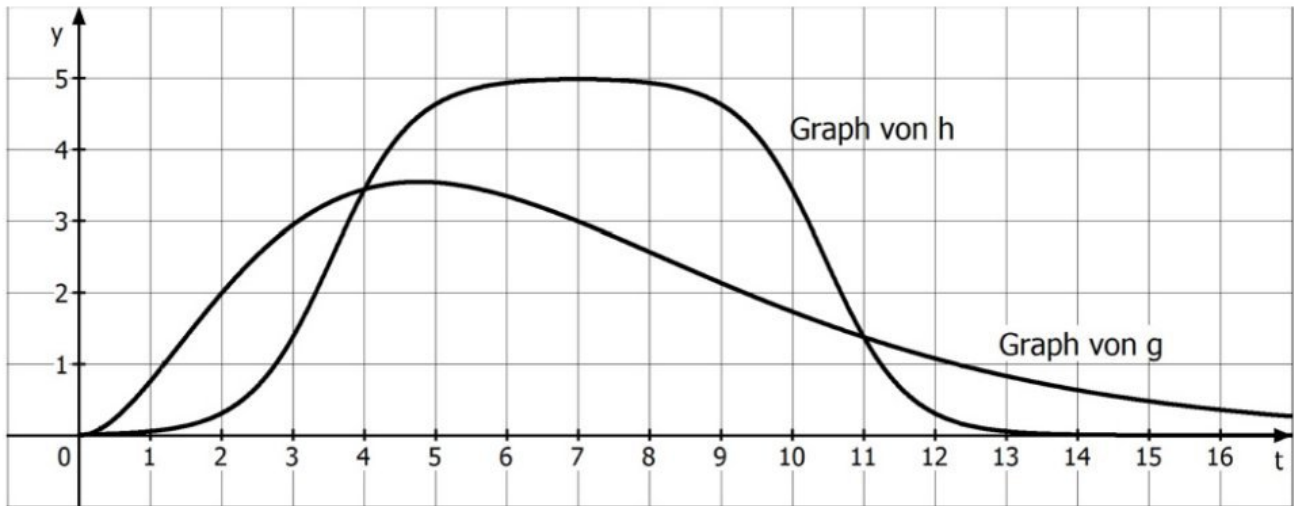
Die Funktion F mit $F(t) = t^2 \cdot e^{2-t}$ ist eine Stammfunktion von f . Zwei Stunden nach Beobachtungsbeginn enthält das Becken 6m^3 Wasser.

- b) Ermitteln Sie das Wasservolumen, das sich zu Beobachtungsbeginn im Becken befand. (1,5 VP)

Für ein anderes Becken beschreiben die Funktion g die momentane Zuflussrate und die Funktion h die momentane Abflussrate des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit t ($0 \leq t \leq 17$, t in Stunden nach Beobachtungsbeginn, $g(t)$ und $h(t)$ in Kubikmeter pro Stunde). Die Abbildung zeigt die Graphen der beiden Funktionen g und h .

- c) Geben Sie den Zeitraum an, in dem das Wasservolumen in diesem Becken abnimmt. (0,5 VP)

Das abfließende Wasser wird in einem quaderförmigen Tank mit der Grundfläche 12m^2 gesammelt. Dieser ist zu Beobachtungsbeginn leer. Untersuchen Sie, ob das Wasser im Tank höher als 5m steigt. (2 VP)



Aufgabe 3 (Abitur Bremen 2010)

Ausbreitung eines Internetvirus

Der *Code Red Worm* ist ein Internetvirus. Das Virus richtet nur auf zentralen Computern (Servern) einen Schaden an. Von einem Virus befallene Server sind nicht mehr einsatzfähig. Der *Code Red Worm* hat am 13.07.2001 innerhalb einiger Stunden von insgesamt 280000 Servern viele befallen. Die Anzahl der befallenen Server wird vom CERT * über ein Meldesystem ausgezählt. Mit Hilfe der Daten werden mathematische Modelle entwickelt, um Vorhersagen über die Ausbreitung von ähnlichen Viren zu machen. Dazu sollen Sie in dieser Aufgabe mathematische Modelle überprüfen.

Die Tabelle gibt die Anzahl der am 13.07.2001 befallenen Server zu einer bestimmten Zeit an, die in Stunden ab 10 Uhr gemessen wird:

Vergangene Zeit ab 10 Uhr in Stunden	0	2	4	6	8
Anzahl der infizierten Server (Messwerte)	20000	100000	205000	250000	277500

- a) Eine Modellierung der Ausbreitung des Virus soll mit Hilfe der Funktion f mit der Funktionsgleichung

$$f(t) = 20000 \cdot e^{0,5818t}, \quad t \geq 0$$

beschrieben werden. t ist die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $f(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

Entscheiden Sie auch mit Hilfe von Rechnungen, ob der Modellierungsansatz mit der Funktion f gut geeignet ist, um diesen Wachstumsprozess zu beschreiben und begründen Sie Ihre Entscheidung.

Im Weiteren soll eine Modellierung der Virusausbreitung mit Hilfe der Funktion g mit der Funktionsgleichung

$$g(t) = 280000 - 260000 \cdot e^{-0,3599t}, \quad t \geq 0$$

betrachtet werden. t ist die ab 10 Uhr vergangene Zeit in Stunden, $g(t)$ die Anzahl der zum Zeitpunkt t von Viren befallenen Server.

- b) Zeigen Sie unter Angabe des Rechenwegs, dass mit Hilfe des Messwertes zur Zeit $t=6$ die Wachstumskonstante k in der Funktionsgleichung $g(t) = 280000 - 260000 \cdot e^{-kt}$ zu $k \approx 0,3599$ bestimmt werden kann.

Berechnen Sie den fehlenden Wert $g(t)$ in der folgenden Tabelle. Runden Sie auf eine ganze Zahl.

Vergangene Zeit ab 10 Uhr in Stunden, t	0	2	4	6	8
Anzahl infizierter Server, berechnet mit dem Funktionsterm $g(t)$	20000	153419		249997	265393

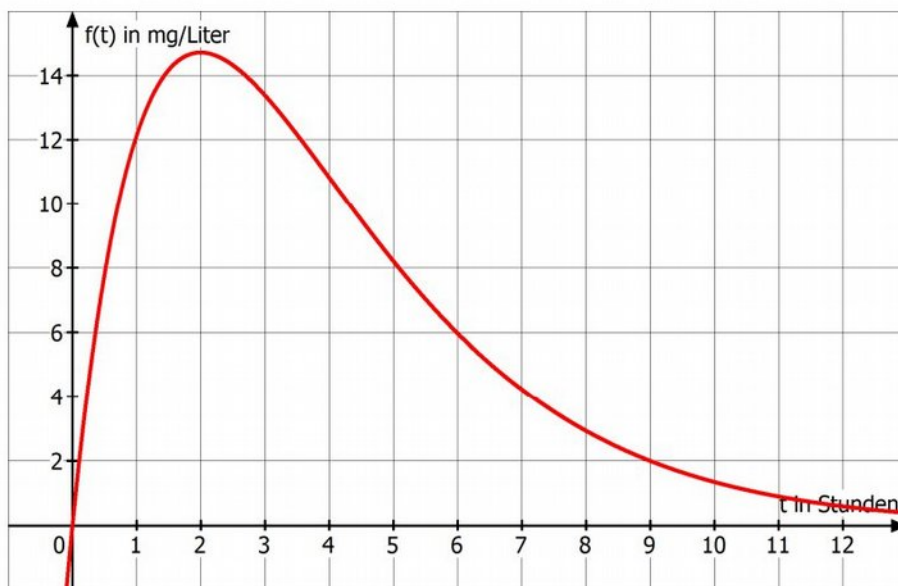
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion g für $0 \leq t \leq 8$ in ein Koordinatensystem unter Verwendung der fünf Punkte aus der zweiten Tabelle.

Zeichnen Sie die in der ersten Tabelle angegebenen fünf Messpunkte zum Vergleich ein.

- c) Ermitteln Sie den Zeitpunkt t , zu dem 140000 Server mit dem Virus infiziert sind.
Bestimmen Sie ohne Verwendung eines Taschenrechners den Grenzwert von g für $t \rightarrow \infty$ und interpretieren Sie diesen im Sachzusammenhang.
- d) Bestimmen Sie die erste Ableitung der Funktion g unter Angabe des Rechenwegs. (Zur Kontrolle: $g'(t) = 93574 \cdot e^{-0,3599t}$.)
Berechnen Sie $g'(2)$. Ermitteln Sie $\lim_{t \rightarrow \infty} g'(t)$. Interpretieren Sie die Ergebnisse in Bezug auf die Ausbreitung der Viren.

Aufgabe 4 (Abitur Baden-Württemberg 2006)

Durch $f(t) = 20t \cdot e^{-0,5t}$ wird die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten beschrieben. Dabei wird t in Stunden seit der Einnahme und $f(t)$ in $\frac{\text{mg}}{\text{l}}$ gemessen.



- a) Nach welcher Zeit erreicht die Konzentration ihren höchsten Wert?
Wie groß ist dieser höchste Wert?
Weise rechnerisch nach, dass die Konzentration nach dem Erreichen des höchsten Werts ständig abnimmt.

Gegeben ist die Gleichung $f(u) - f(u + 2) = 5$.

Wie lautet die Fragestellung im Sachzusammenhang, die auf diese Gleichung führt?

- b) Das Schaubild von f besitzt eine Wendestelle.
Bestimme rechnerisch die Wendestelle und interpretiere die Bedeutung der Wendestelle im Sachzusammenhang.
Wie groß ist die momentane Änderungsrate der Konzentration an der Stelle $t = 4$?
Ab dem Zeitpunkt $t = 4$ wird die Konzentration des Medikaments nun durch die Tangente an das Schaubild von f an der Stelle $t = 4$ beschrieben.
Bestimme damit den Zeitpunkt, zu dem das Medikament vollständig abgebaut ist.
- c) Anstelle der Näherung aus Teilaufgabe b) wird nun wieder die Beschreibung der Konzentration durch f verwendet.
Vier Stunden nach der ersten Einnahme wird das Medikament in der gleichen Dosierung erneut eingenommen. Es wird angenommen, dass sich dabei die Konzentration im Blut des Patienten addiert.
Gib die Gleichung der Funktion $g(t)$ für $t \geq 4$ an, die die Konzentration des Medikaments zum Zeitpunkt t beschreibt.