LÖSUNGEN

TEIL A (ohne Hilfsmittel)

1a) $\log_3(9)=2$, denn $3^2=9$

b) $\log_3(27)=3$, denn $3^3=27$

c) $\log_3(3)=1$, denn $3^1=3$

d) $\log_3(1)=0$, denn $3^0=1$

e) $\log_3\left(\frac{1}{3}\right)=-1$, denn $3^{-1}=\frac{1}{3^1}=\frac{1}{3}$

f) $\log_2(8)=3$, denn $2^3=8$

g) $\log_2(4)=2$, denn $2^2=4$

h) $\log_2(2)=1$, denn $2^1=2$

i) $\log_2(1)=0$, denn $2^0=1$

j) $\log_2\left(\frac{1}{4}\right)=-2$, denn $2^{-2}=\frac{1}{2^2}=\frac{1}{4}$

2a) $\log_2(32)=5$, denn $2^5=32$

b) $\log_x(49)=2 \Rightarrow x=7$

denn $7^2=49$

c) $\log_5(x)=3 \Rightarrow 5^3=x$

$125=x$

d) $\log_x(64)=3 \Rightarrow x=4$

denn $4^3=64$

3a) $f(x) = 10 \cdot 1{,}1^x$

x: Zeit in h ab 12 Uhr

$f(x)$: Größe der Kultur in cm^2

b) 14 Uhr $\hat{=}$ $x = 2$

$f(2) = 10 \cdot 1{,}1^2 = 10 \cdot 1{,}21$

$= 12{,}1$

Antwort: Sie ist $12{,}1\ cm^2$ groß.

c) 13 Uhr $\hat{=}$ $x = 1$

$f(1) = 10 \cdot 1{,}1^1 = 10 \cdot 1{,}1 = 11$

Für die zweite Kultur gilt:

Größe um 12 Uhr $8\ cm^2$ $P_1(0/8)$

" " 13 Uhr $11\ cm^2$ $P_2(1/11)$

x	0	1	2
y	8	11	

$\cdot\frac{11}{8}$ $\cdot\frac{11}{8}$

$g(x) = 8 \cdot \left(\frac{11}{8}\right)^x$

4a) Graph 1 kann nicht zu f gehören.

Der Punkt $P(1/8)$ liegt auf dem ersten Graphen.

Aber es gilt $f(1) = 4 \cdot 1{,}5^1 = 4 \cdot 1{,}5 = 6$ ↯

Graph 3 ist ein fallender Graph mit einer Gleichung der Form $g(x) = b \cdot a^x$ mit $0 < a < 1$.
Bei f gilt aber $a = 1{,}5$.
Daher kann Graph 3 nicht zu f gehören.

Graph 4 kann nicht zu f gehören.
P(0/2) liegt auf dem Graphen.
Aber es gilt $f(0) = 4 \cdot 1{,}5^0 = 4$ ↯

⇒ Graph 2 gehört zu f

b) Graph 1:

x	0	1
y	4	8

$\cdot 2$

$g(x) = 4 \cdot 2^x$

Graph 3

x	-1	0
y	6	4

$\cdot \frac{2}{3}$

$h(x) = 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Graph 4

x	0	1
y	2	3

$\cdot 1{,}5$

$i(x) = 2 \cdot 1{,}5^x$

5a) $x^3 - ax = 0$

$x \cdot (x^2 - a) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^2 - a = 0 \quad | +a$

$x^2 = a \quad | \sqrt{\ }$

$x = \pm\sqrt{a}$

Fallunterscheidung:

$a \leq 0$	$a > 0$
eine Nullstelle $x = 0$	drei Nullstellen $x_1 = -\sqrt{a}$ $x_2 = 0$ $x_3 = \sqrt{a}$

b) $P(1|3)$ auf $f_a \Rightarrow f_a(1) = 3$

$1^3 - a \cdot 1 = 3$

$1 - a = 3 \quad | -1$

$-a = 2 \quad | \cdot (-1)$

$a = -2$

c) Wir nehmen zwei konkrete Funktionen:

$f_0(x) = x^3$

$f_1(x) = x^3 - x$

$x^3 = x^3 - x \quad | -x^3$

$0 = -x \quad | \cdot (-1)$

$0 = x$

$\Rightarrow S(0/0)$

Probe: $f_a(0) = 0^3 - a \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ Der Punkt $P(0/0)$ liegt auf allen Funktionen.

6a) $f_1(1) = 1^3 + 3 \cdot 1^2 = 1 + 3 = 4$

$\Rightarrow$ Graph A

b) $P(1|-2)$ liegt auf $f_a \Rightarrow f_a(1) = -2$

$$1^3 + 3 \cdot a \cdot (1)^2 = -2$$
$$1 + 3a = -2 \quad |-1$$
$$3a = -3 \quad |:3$$
$$\underline{a = -1}$$

c) $x^3 + 3ax^2 = 0$

$x^2 \cdot (x + 3a) = 0$

$x_1 = 0 \qquad x + 3a = 0$

$\qquad\qquad x_2 = -3a$

$\Rightarrow$ zwei Nullstellen $x_1 = 0$

$x_2 = -3a$

7a) $f_2(x) = x^4 + (2-2) \cdot x^3 - 2 \cdot x^2$

$= x^4 - 2x^2$

Alle Exponenten sind gerade

$\Rightarrow$ Graph ist symmetrisch zur y-Achse

b) Für eine Wendestelle gilt die Notwendige Bedingung $f''(x) = 0$.

Dafür brauchen wir die 2. Ableitung:

$$f_k(x) = x^4 + (2-k)x^3 - kx^2$$
$$f_k'(x) = 4x^3 + 3(2-k)x^2 - 2kx$$
$$= 4x^3 + (6-3k)x^2 - 2kx$$

$$f_k''(x) = 12x^2 + 2(6-3k)x - 2k$$
$$= 12x^2 + (12-6k)x - 2k$$

$x = 1$ Wendestelle $\Leftrightarrow$ $f_k''(1) = 0$

$$\Rightarrow 12 \cdot 1^2 + (12-6k) \cdot 1 - 2k = 0$$
$$12 + (12-6k) - 2k = 0$$
$$12 + 12 - 6k - 2k = 0$$
$$24 - 8k = 0 \quad | +8k$$
$$24 = 8k \quad | :8$$
$$3 = k$$

Probe: $f_3(x) = x^4 + (2-3)x^3 - 3x^2$
$$= x^4 - x^3 - 3x^2$$
$$f_3'(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x$$
$$f_3''(x) = 12x^2 - 6x - 6 \qquad f_3'''(x) = 24x - 6$$

N.B.: $f_3''(x) = 0$

$$12x^2 - 6x - 6 = 0 \quad | :12$$
$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0$$
$$x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{2}}$$

$$x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{1}{16} + \frac{8}{16}}$$

$$x = \frac{1}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16}}$$

$$x = \frac{1}{4} \pm \frac{3}{4}$$

$$x_1 = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = 1$$

H.B.: $f_3''(x) = 0$ und $f_3'''(x) \neq 0$

$f_3'''(1) = 24 - 6 = 18 \neq 0$

$\Rightarrow$ WS bei $x = 1$

8a) $ax^6 - x^4 = 0$

$x^4 \cdot (ax^2 - 1) = 0$

$x^4 = 0$ oder $ax^2 - 1 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad$ $ax^2 = 1$

$x^2 = \frac{1}{a} \quad | \sqrt{}$

$x = \pm \sqrt{\frac{1}{a}}$

Fallunterscheidung:

$a \leq 0$	$a > 0$
eine NS	$x_1 = 0$
$x = 0$	$x_2 = -\sqrt{\frac{1}{a}}$
	$x_3 = \sqrt{\frac{1}{a}}$

$\Rightarrow$ Antwort: $a > 0$

b) f_a hat bei $x=1$ ein Minimum
$\Rightarrow f_a'(1)=0$

$f_a(x)=ax^6-x^4$

$f_a'(x)=6ax^5-4x^3$ $\quad f_a''(x)=30ax^4-12x^2$

f_a hat Min. bei $x=1$
$\Rightarrow f_a'(1)=0$
$\Rightarrow 6a\cdot 1^5-4\cdot 1^3=0$
$6a-4=0$
$6a=4$
$a=\frac{2}{3}$

Probe: $f_{2/3}(x)=\frac{2}{3}x^6-x^4$ $\quad f_{2/3}''(x)=20x^4-12x^2$

$f_{2/3}'(x)=4x^5-4x^3$

N.B.: $f_{2/3}'(x)=0$
$4x^5-4x^3=0 \quad |:4$
$x^5-x^3=0$
$x^3\cdot(x^2-1)=0$
$x^3=0$ oder $x^2-1=0$
$x_1=0$ $\quad x^2=1$
$x_2=1$
$x_3=-1$

H.B.: $f_{2/3}'(x)=0$ und $f_{2/3}''(x)\neq 0$
$f_{2/3}''(1)=20-12=8 \Rightarrow$ TP bei $x=1$ ✓

9) $f(x) = x^2 + bx + c$

$A(3|2)$ auf $f \Rightarrow f(3) = 2$

$$3^2 + b \cdot 3 + c = 2$$
$$9 + 3b + c = 2 \quad | -9$$
$$3b + c = -7$$

Bei $A(3|2)$ Anstieg $m = 1$

$\Rightarrow f'(3) = 1$

$f'(x) = 2x + b$

$$f'(3) = 1 \Rightarrow 2 \cdot 3 + b = 1$$
$$6 + b = 1$$
$$b = -5$$

$$\Rightarrow \quad 3 \cdot (-5) + c = -7$$
$$-15 + c = -7 \quad | +15$$
$$c = 8$$

Antwort: $b = -5$ und $c = 8$

10) Anfangswert: b

verdoppelt : $2b$

$$2b = b \cdot a^x \quad | : b \quad (b \neq 0)$$
$$2 = a^x$$
$$x = \log_a(2)$$

TEIL B (mit Hilfsmitteln)

1a) $10\ cm^2$

b) $22\ \%$

c) 10:30 Uhr $\hat{=}\ x = 2{,}5$

$f(2{,}5) = 10 \cdot 1{,}22^{2{,}5} \approx 16{,}44$

Antwort: Sie hat eine Größe von $16{,}44\ cm^2$.

d) $f(x) = 24$

$10 \cdot 1{,}22^x = 24 \quad |:10$

$1{,}22^x = 2{,}4$

$x = \log_{1{,}22}(2{,}4) \approx 4{,}4026$

$0{,}4026 \cdot 60 = 24{,}156$

Antwort: Die Kultur erreicht um 12:24 Uhr die Größe $24\ cm^2$

e) $20 = 10 \cdot 1{,}22^x \quad |:10$

$2 = 1{,}22^x$

$x = \log_{1{,}22}(2) \approx 3{,}4858$

$0{,}4858 \cdot 60 = 29{,}148$

$\Rightarrow$ Die Verdopplungszeit beträgt 3 h 29 min.

f) $f(x) = g(x)$

$10 \cdot 1{,}22^x = 4 \cdot 1{,}9^x \quad | :4$

$2{,}5 \cdot 1{,}22^x = 1{,}9^x \quad | : 1{,}22^x$

$2{,}5 = \frac{1{,}9^x}{1{,}22^x}$

$2{,}5 = \left(\frac{190}{122}\right)^x$

$x = \log_{\frac{190}{122}} (2{,}5) \approx 2{,}0684$

$0{,}0684 \cdot 60 = 4{,}104$

$f(2{,}0684) = 10 \cdot 1{,}22^{2{,}0684} \approx 15{,}0878$

Die beiden Kulturen sind um 10:04 Uhr gleich groß. Sie haben dann eine Größe von 15,09 cm².

g) 13 Uhr $\hat{=}$ $x = 5$

$f(5) = 10 \cdot 1{,}22^5 = 27{,}03$

Nach der Entfernung von 10 cm² sind noch 17,03 cm² da.

$17{,}03 \cdot 1{,}22^x = 27{,}03 \quad | : 17{,}03$

$1{,}22^x = \frac{2703}{1703}$

$x = \log_{1{,}22} \left(\frac{2703}{1703}\right) \approx 2{,}3232$

$0{,}3232 \cdot 60 = 19{,}392$

Antwort: Die Kultur braucht 2 h 19 min, um den Verlust auszugleichen.

h) 8 Uhr $\hat{=}$ $x = 0$

$f(0) = 20$

10 Uhr $\hat{=}$ $x = 2$

$f(2) = 60$

x	0	1	2
y	20		60

$\cdot a^2$

$\Rightarrow h(x) = 20 \cdot a^x$

$h(2) = 20 \cdot a^2 = 60$

$a^2 = 3$

$a = 1{,}73$

$\Rightarrow h(x) = 20 \cdot 1{,}73^x$

2a) $x^3 + 6ax^2 = 0$

$x^2 \cdot (x + 6a) = 0$

$x^2 = 0$ oder $x + 6a = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad x_2 = -6a$

Nullstellen: $x_1 = 0$

$x_2 = -6a$

b) $f_a(x) = x^3 + 6ax^2$

$f_a'(x) = 3x^2 + 12ax \qquad f_a''(x) = 6x + 12a$

N.B.: $f_a'(x) = 0$

$3x^2 + 12ax = 0$

$x \cdot (3x + 12a) = 0$

$x_1 = 0 \qquad 3x + 12a = 0$

$3x = -12a$

$x = -4a$

H.B.: $f_a'(x) = 0$ und $f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(0) = 12a$

$f_a''(-4a) = 6 \cdot (-4a) + 12a$

$= -24a + 12a$

$= -12a$

y-Werte:

$f_a(0) = 0$

$f_a(-4a) = (-4a)^3 + 6a \cdot (-4a)^2$

$= -64a^3 + 6a \cdot 16a^2$

$= -64a^3 + 96a^3$

$= 32a^3$

Fallunterscheidung:

$a > 0$	$a = 0$	$a < 0$
$P_1(0\|0)$ TP $P_2(-4a\|32a^3)$ HP	Sattelpunkt bei $x = 0$	$P_1(0\|0)$ HP $P_2(-4a\|32a^3)$ TP

$f_0(x) = x^3$
$f_0'(x) = 3x^2$

Bei $a = 0$ gibt es nur einen Kandidaten:
$x = -4a = -4 \cdot 0 = 0$

$f_0'(-1) = 3$ } kein VZW
$f_0'(1) = 3$ } $\Rightarrow$ Sattelpunkt

c) $f_a''(x) = 6x + 12a$ $\quad f_a'''(x) = 6$

N.B.: $f_a''(x) = 0$
$6x + 12a = 0$
$6x = -12a$
$x = -2a$

H.B.: $f_a''(x) = 0$ und $f_a'''(x) \neq 0$
$f_a'''(-2a) = 6 \neq 0$ ✓

y-Wert: $f(-2a) = (-2a)^3 + 6a \cdot (-2a)^2$
$= -8a^3 + 6a \cdot 4a^2$
$= -8a^3 + 24a^3$
$= 16a^3$

Antwort: WP $(-2a / 16a^3)$

d) Wir nehmen zwei konkrete Funktionen:
$f_0(x) = x^3$
$f_1(x) = x^3 + 6x^2$

$$x^3 = x^3 + 6x^2 \quad | -x^3$$
$$0 = 6x^2 \quad | :6$$
$$0 = x^2$$
$$x = 0$$

$\Rightarrow P(0|0)$

Probe: $f_a(0) = 0^3 + 6a \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow$ P(0|0) liegt auf allen Funktionen der Schar.

e) (I)
$$\int_0^1 f_a(x)\,dx = \int_0^1 x^3 + 6ax^2\,dx$$
$$= \left[\frac{1}{4}x^4 + 2ax^3\right]_0^1$$
$$= \frac{1}{4} + 2a - 0$$
$$= 2a + 0{,}25$$

(II)
$$2a + 0{,}25 = 1$$
$$2a = 0{,}75$$
$$a = 0{,}375$$

(III)
$$2a + 0{,}25 = a$$
$$0{,}25 = -a$$
$$-0{,}25 = a$$

f) $P(-2|-2)$ liegt auf $f_a \Rightarrow f_a(-2) = -2$

$$(-2)^3 + 6a \cdot (-2)^2 = -2$$
$$-8 + 6a \cdot 4 = -2$$
$$-8 + 24a = -2 \quad |+8$$
$$24a = 6$$
$$a = 0{,}25$$

g) $g(x) = 15x - 8$ Tangente an f durch $P(1|f_a(1))$ $\Rightarrow f_a'(1) = 15$

$$f_a'(x) = 3x^2 + 12ax$$

$$f_a'(1) = 15 \Rightarrow 3 + 12a = 15$$
$$12a = 12$$
$$a = 1$$

3a) $-4x^3 + 12tx^2 = 0$

$$x^2 \cdot (-4x + 12t) = 0$$

$x_1 = 0 \qquad -4x + 12t = 0$
$$12t = 4x$$
$$3t = x$$

Nullstellen: $x_1 = 0$
$x_2 = 3t$

b) ① $P(1|16)$ liegt auf $f_t \Rightarrow f_t(1) = 16$

$$-4 + 12t = 16 \quad |+4$$
$$12t = 20$$
$$t = 5/3$$

(II) $f_t(1) = -4 \cdot 1^3 + 12t \cdot 1^2$
$= -4 + 12t$

$-4 + 12t = 0 \quad | +4$
$12t = 4$
$t = \frac{1}{3}$

Probe: $f_1(1) = -4 + 12 = 8 > 0$
$f_{0,1}(1) = -4 + 12 \cdot 0{,}1$
$= -4 + 1{,}2$
$= -2{,}8 < 0$

Antwort: P hat für $0 < t < \frac{1}{3}$ einen negativen y-Wert

c) $f_t(x) = -4x^3 + 12t x^2$
$f_t'(x) = -12x^2 + 24tx$
$f_t''(x) = -24x + 24t$

N.B.: $f_t'(x) = 0$
$-12x^2 + 24tx = 0$
$x \cdot (-12x + 24t) = 0$
$x_1 = 0 \qquad -12x + 24t = 0$
$24t = 12x$
$2t = x_2$

H.B.: $f_t'(x) = 0$ und $f_t''(x) \neq 0$
$f_t''(0) = 24t > 0$ TP
$f_t''(2t) = -24t < 0$ HP

y-Werte $f_t(0) = 0$

$f_t(2t) = -4 \cdot (2t)^3 + 12t \cdot (2t)^2$
$= -4 \cdot 8t^3 + 12t \cdot 4t^2$
$= -32t^3 + 48t^3$
$= 16t^3$

Antwort: $TP(0|0)$
$HP(2t|16t^3)$

d) $f_t''(x) = -24x + 24t$ $\quad f_t'''(x) = -24$

N.B.: $f_t''(x) = 0$
$-24x + 24t = 0$
$24t = 24x$
$t = x$

H.B.: $f_t''(x) = 0$ und $f_t'''(x) \neq 0$
$f_t'''(t) = -24 \neq 0$ ✓

y-Wert:
$f_t(t) = -4t^3 + 12t \cdot t^2 = -4t^3 + 12t^3$
$= 8t^3$

Antwort: $WP(t/8t^3)$

e) $P(1|2)$ liegt auf f_t

$f_t(1) = -4 + 12t$
$-4 + 12t = 2$
$12t = 8$
$t = 1,5$

4a) $b = 2$

b) $P(2|6)$ liegt auf $f_k \Rightarrow f_k(2) = 6$

$$\frac{1}{2k} \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^2 + \frac{9}{2} \cdot 2 \cdot k = 6$$

$$\frac{1}{2k} \cdot 8 - 3 \cdot 4 + 9k = 6$$

$$\frac{8}{2k} - 12 + 9k = 6$$

$$\frac{4}{k} - 12 + 9k = 6 \quad | +12$$

$$\frac{4}{k} + 9k = 18 \quad | \cdot k$$

$$4 + 9k^2 = 18k$$

$$9k^2 - 18k + 4 = 0$$

$$k^2 - 2k + \frac{4}{9} = 0$$

$$k = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{4}{9}}$$

$$k = 1 \pm \sqrt{\frac{5}{9}}$$

$$k_1 = 1{,}75$$
$$k_2 = 0{,}25$$

c) $f_k(0) = \frac{1}{2k} \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + \frac{9}{2} k \cdot 0 = 0$ ✓

d) $\frac{1}{2k} \cdot x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2} kx = 0$

$x \cdot \left(\frac{1}{2k} x^2 - 3x + \frac{9}{2} k\right) = 0$

$x_1 = 0 \qquad \frac{1}{2k} x^2 - 3x + \frac{9}{2} k = 0 \quad | \cdot 2k$

$$x^2 - 6kx + 9k^2 = 0$$
$$x = 3k \pm \sqrt{9k^2 - 9k^2}$$
$$x_2 = 3k$$

Nullstellen: $x_1 = 0$
$x_2 = 3k$

5a) $f(x) = 50 \cdot 1{,}04^x$

b) $f(5) = 50 \cdot 1{,}04^5 = 60{,}83$

Sie hat eine Größe von $60{,}83\ cm^2$.

c) $f(x) = 75$

$50 \cdot 1{,}04^x = 75 \quad |:50$

$1{,}04^x = 1{,}5$

$x = \log_{1{,}04}(1{,}5) \approx 10{,}338$

$0{,}338 \cdot 60 = 20{,}28$

Eine Größe von $75\ cm^2$ wird nach 10h 20 min erreicht.

d) $100 = 50 \cdot 1{,}04^x \quad |:50$ $\qquad 0{,}673 \cdot 60 = 40{,}38$

$2 = 1{,}04^x$

$x = \log_{1{,}04}(2) \approx 17{,}6730$

Die Verdopplungszeit beträgt 17 h 40 min

e) $g(x) = 50 \cdot a^x$

Verdopplung nach 6h $\Rightarrow$

$$g(6) = 100$$

$$100 = 50 \cdot a^6$$

$$2 = a^6 \quad | \sqrt[6]{\ }$$

$$a = \sqrt[6]{2} \approx 1{,}1225$$

$$\Rightarrow g(x) = 50 \cdot 1{,}1225^x$$

f) $50 \cdot 1{,}04^x = 50 \cdot 1{,}1225^x \quad | :50$

$$1 \cdot 1{,}04^x = 1{,}1225^x$$

$$1 = \left(\frac{1{,}1225}{1{,}04}\right)^x$$

$$\Rightarrow x = 0$$

Der Zeitpunkt ist jetzt.

6a) $P(1/4)$ auf $f_t \Rightarrow f_t(1) = 4$

$$1^4 - 2t \cdot 1^2 + 8t = 4$$

$$1 - 2t + 8t = 4$$

$$1 + 6t = 4$$

$$6t = 3$$

$$t = 0{,}5$$

b) gesucht: y-Wert des Tiefpunktes

$$f_t(\sqrt{t}) = (\sqrt{t})^4 - 2t \cdot (\sqrt{t})^2 + 8t$$

$$= t^2 - 2t^2 + 8t$$

$$= -t^2 + 8t$$

gesucht: höchster y-Wert

$h(t) = -t^2 + 8t$

$h'(t) = -2t + 8$

$h''(t) = -2$

N.B.: $h'(t) = 0$

$-2t + 8 = 0$

$8 = 2t$

$4 = t$

H.B.: $h'(t) = 0$ und $h''(t) \neq 0$

$h''(4) = -2 < 0$ HP

Antwort: $t = 4$

c) Wir betrachten zwei konkrete Funktionen der Schar:

$f_0(x) = x^4$

$f_1(x) = x^4 - 2x^2 + 8$

$x^4 = x^4 - 2x^2 + 8 \quad | -x^4$

$0 = -2x^2 + 8$

$2x^2 = 8$

$x^2 = 4$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

Probe:

$f_t(2) = 2^4 - 2t \cdot 2^2 + 8t$

$= 16 - 8t + 8t$

$= 16$

$f_t(-2) = (-2)^4 - 2t \cdot (-2)^2 + 8t$

$= 16 - 8t + 8t$

$= 16$

$\Rightarrow$ gemeinsame Punkte $P_1(2|16)$ und $P_2(-2|16)$