Aufgaben

Teil A (Teil ohne Hilfsmittel)

Aufgabe 1

Gib das jeweilige Ergebnis an:

a) $\log_3(9)=?$
b) $\log_3(27)=?$
c) $\log_3(3)=?$
d) $\log_3(1)=?$
e) $\log_3(\frac{1}{3})=?$
f) $\log_2(8)=?$
g) $\log_2(4)=?$
h) $\log_2(2)=?$
i) $\log_2(1)=?$
j) $\log_2(\frac{1}{4})=?$

Aufgabe 2

Bestimme jeweils x:

a) $\log_2(32)=x$
b) $\log_x(49)=2$
c) $\log_5(x)=3$
d) $\log_x(64)=3$

Aufgabe 3

Eine Bakterienkultur hat um 12 Uhr eine Größe von 10 cm². Sie wächst pro Stunde um 10%.

a) Gib die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion an, welche das Wachstum der Bakterienkultur beschreibt.
b) Bestimme die Größe der Bakterienkultur um 14 Uhr.
c) Eine zweite Bakterienkultur hat um 12 Uhr eine Größe von 8 cm². Um 13 Uhr ist sie genau so groß wie die erste Bakterienkultur. Gib die Funktionsgleichung einer Exponentialfunktion an, welche das Wachstum der zweiten Bakterienkultur beschreibt.

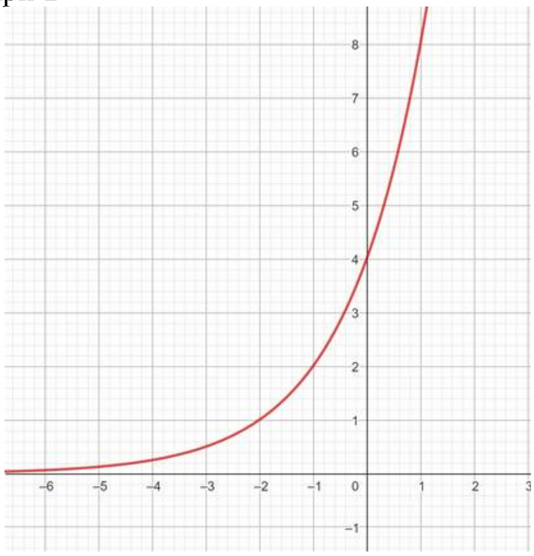
Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktion $f(x)=4\cdot 1{,}5^x$. Einer der nachfolgend abgebildeten Graphen gehört zu dieser Funktion.

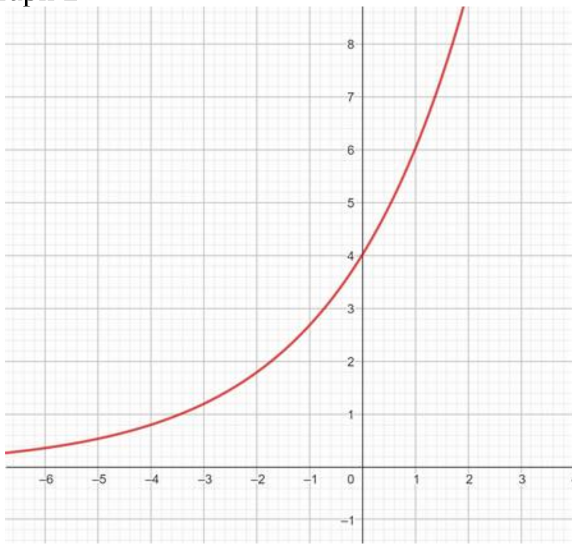
a) Gib an, welcher der Graphen zu f gehört. Und begründe, warum die anderen Graphen nicht zu f gehören können.

b) Bestimme die Funktionsgleichungen der drei Exponentialfunktionen, die zu den drei anderen Graphen gehören.

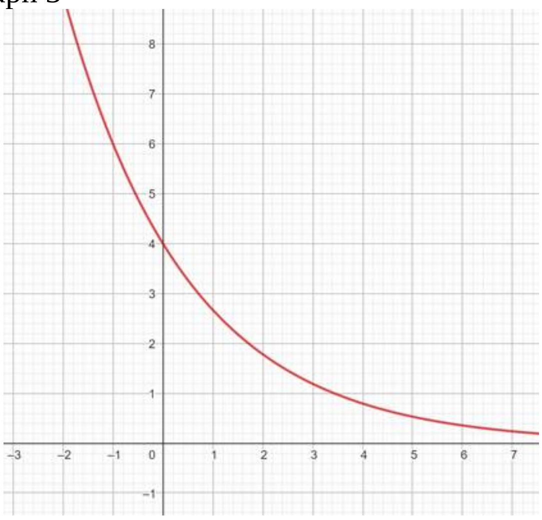
Graph 1



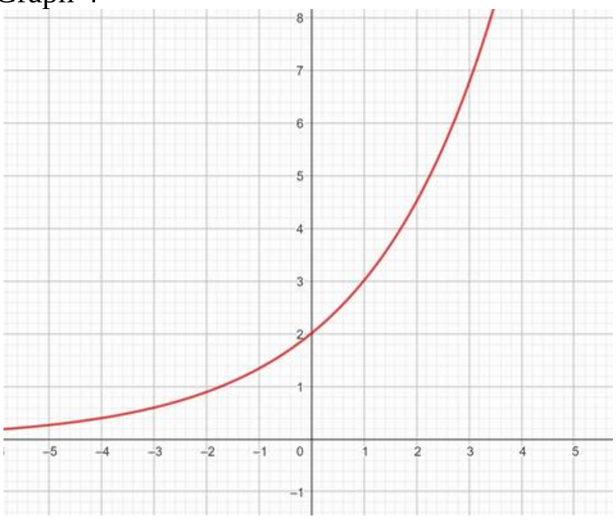
Graph 2



Graph 3



Graph 4



Aufgabe 5

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x)=x^3-ax$ mit $a\in\mathbb{R}$.

a) Bestimme die Nullstellen der Schar in Abhängigkeit von a.

b) Bestimme, welchen Wert man für a einsetzen muss, damit der Punkt P (1 / 3) auf der dazu gehörenden Funktion liegt.

c) Alle Funktionen der Schar schneiden sich in einem bestimmten Punkt. Bestimme seine Koordinaten.

Aufgabe 6

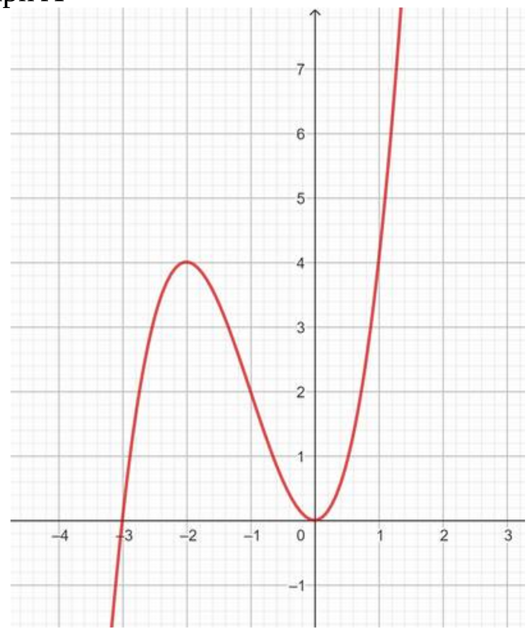
Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x) = x^3 + 3ax^2$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Einer der nachfolgend abgebildeten Graphen gehört zur Funktion $f_1(x) = x^3 + 3x^2$. Gib an, welcher der beiden Graphen zu f_1 gehört.

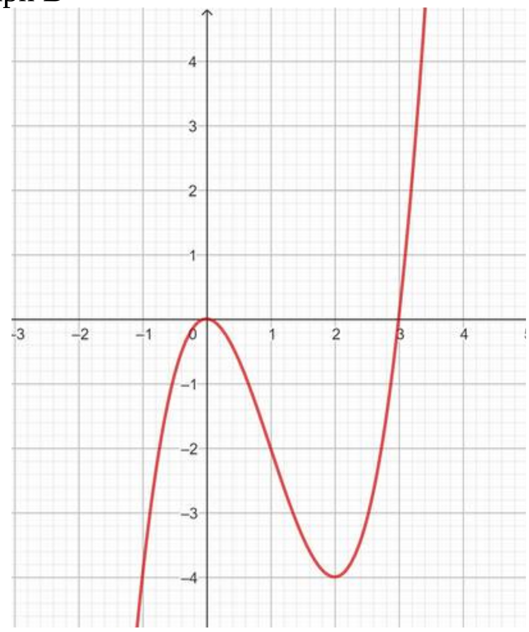
b) Der zweite Graph gehört zu einer anderen Funktion der Schar. Bestimme den zu ihr gehörenden Wert von a.

c) Bestimme die Nullstellen von f_a in Abhängigkeit von a.

Graph A



Graph B



Aufgabe 7 (Abitur Baden-Württemberg 2022)

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten ganzrationalen Funktionen f_k mit
$f_k(x) = x^4 + (2-k) \cdot x^3 - k \cdot x^2$ mit $k \in \mathbb{R}$.

a) Begründen Sie, dass der Graph von f_2 symmetrisch bezüglich der y-Achse ist.

b) Es gibt einen Wert von k, für den x = 1 eine Wendestelle von f_k ist. Berechnen Sie diesen Wert von k.

Aufgabe 8 (Hamburg Nr. 26)

Für jeden Wert von a (mit $a \neq 0$) ist eine Funktion f_a gegeben mit $f_a(x) = a \cdot x^6 - x^4$.

a) Bestimmen Sie diejenigen Wert von a, für die f_a mehr als eine Nullstelle hat.

b) Für genau einen Wert von a hat f_a an der Stelle x = 1 ein Minimum. Bestimmen Sie diesen Wert von a.

Aufgabe 9 (Aufgabensammlung Berlin Nr. 7)

Der Graph der Funktion $f(x) = x^2 + bx + c$ hat im Punkt A (3 / 2) den Anstieg $m = 1$. Berechnen Sie die Werte für die Parameter b und c.

Aufgabe 10

Die Exponentialfunktion $f(x)=b\cdot a^x$ beschreibt das Wachstumsverhalten einer Bakterienkultur. Zeige: Die Verdopplungszeit lässt sich dann mit dem Term $\log_a(2)$ berechnen.

Teil B (Teil mit Hilfsmitteln)

Aufgabe 1

Das Wachstum einer Bakterienkultur wird beschrieben durch die Funktion $f(x)=10\cdot 1{,}22^x$.
Dabei steht x für die Zeit in Stunden ab 8 Uhr und f(x) für die Größe der Kultur in cm².

a) Gib an, wie groß die Bakterienkultur um 8 Uhr ist.
b) Gib an, um wie viel Prozent die Größe der Kultur pro Stunde zunimmt.
c) Bestimme rechnerisch die Größe der Bakterienkultur um 10:30 Uhr.
d) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Bakterienkultur eine Größe von 24 cm² erreicht.
e) Bestimme rechnerisch den Zeitraum, welchen die Bakterienkultur für eine Verdopplung ihrer Größe benötigt.
f) Eine zweite Kultur ist anfangs kleiner, wächst aber schneller. Ihr Wachstum wird beschrieben von der Funktion $g(x)=4\cdot 1{,}9^x$, wobei x die Zeit in Stunden ab 8 Uhr ist und g(x) die Größe in cm². Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die beiden Kulturen gleich groß sind, und gib an, wie groß die Kulturen dann sind.
g) Um 13 Uhr entfernt ein Wissenschaftler 10 cm² der ersten Kultur. Bestimme rechnerisch, wie lange die Kultur braucht, um die verlorenen 10 cm² durch ihr Wachstum wieder auszugleichen.
h) Eine dritte Kultur hat um 8 Uhr eine Größe von 20 cm². Sie erreicht um 10 Uhr eine Größe von 60 cm². Beschreibe das Wachstum dieser Kultur mit einer Exponentialfunktion, wobei x für die Zeit in Stunden ab 8 Uhr stehen soll.

Aufgabe 2

Gegeben ist die Funktionenschar $f_a(x)=x^3+6ax^2$ mit $a\in\mathbb{R}$.

a) Bestimme rechnerisch die Nullstellen der Funktionenschar in Abhängigkeit von a.
b) Bestimme rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte der Funktionenschar in Abhängigkeit von a.
c) Bestimme rechnerisch die Koordinaten der Wendepunkte der Funktionenschar.
d) Es gibt einen Punkt, der auf allen Funktionen der Funktionsschar liegt. Bestimme rechnerisch seine Koordinaten.

e) (i) Berechne das folgende Integral in Abhängigkeit von a:

$$\int_0^1 f_a(x)\,dx$$

(ii) Bestimme rechnerisch den Wert von a, für den gilt:

$$\int_0^1 f_a(x)\,dx=1$$

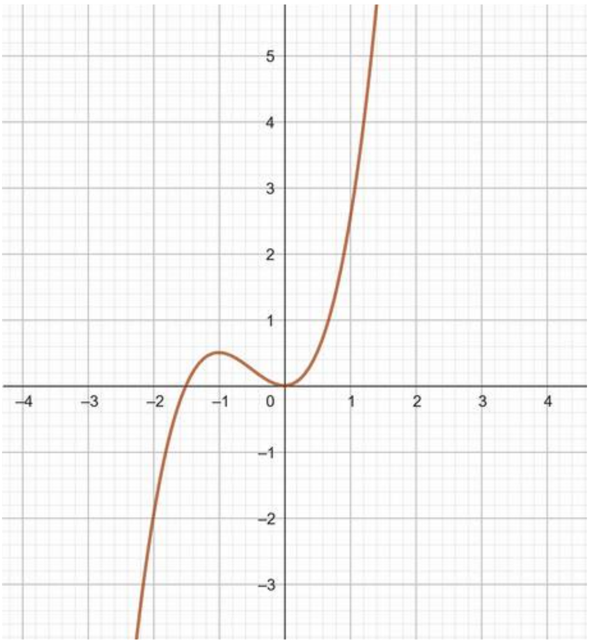
(iii) Bestimme rechnerisch den Wert von a, für den gilt:

$$\int_0^1 f_a(x)\,dx=a$$

f) Der nachfolgend abgebildete Graph gehört zu einer Funktion der Funktionenschar. Bestimme rechnerisch den zu ihr gehörenden Wert von a.

g) Die Funktion g(x) = 15 x – 8 ist eine Tangente durch den Punkt $P(1/f_a(1))$ an den Graphen einer Funktion f_a für ein bestimmtes a. Bestimme rechnerisch den Wert von a.

Graph:
(zu Aufgabenteil f)



Aufgabe 3

Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben durch $f_t(x)=-4x^3+12tx^2$

a) Bestimme rechnerisch die Nullstellen von f_t in Abhängigkeit von t.

b) (i) Bestimme rechnerisch den Wert von t, für den der Punkt P (1 / 16) auf dem Graphen von f_t liegt.

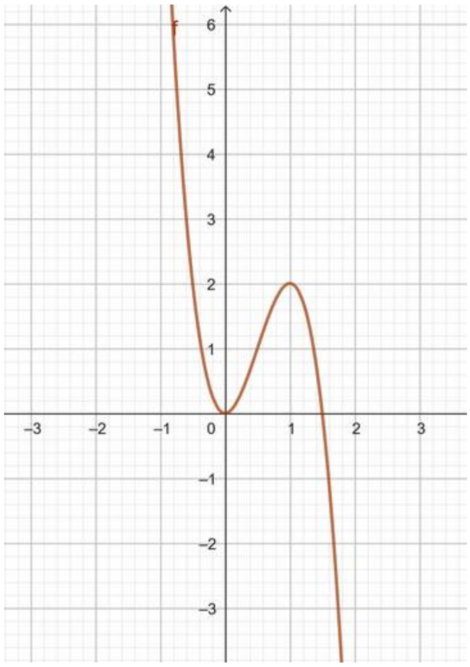
(ii) Bestimme rechnerisch die Werte von t, für die der Punkt $P(1/f_t(1))$ einen negativen y-Wert hat.

c) Bestimme rechnerisch die Koordinaten und die Art der Extrempunkte von f_t .

d) Bestimme rechnerisch die Koordinaten der Wendepunkte der Funktionsschar.

e) Der nachfolgend abgebildete Graph gehört zu einer Funktion der Funktionenschar. Bestimme rechnerisch den zu ihr gehörenden Wert von t.

Graph:
(zu Aufgabenteil e)



Aufgabe 4

Gegeben ist die Funktionenschar $f_k(x) = \frac{1}{2k} \cdot x^3 - 3x^2 + \frac{9}{2}kx$ mit $k \in \mathbb{R}$

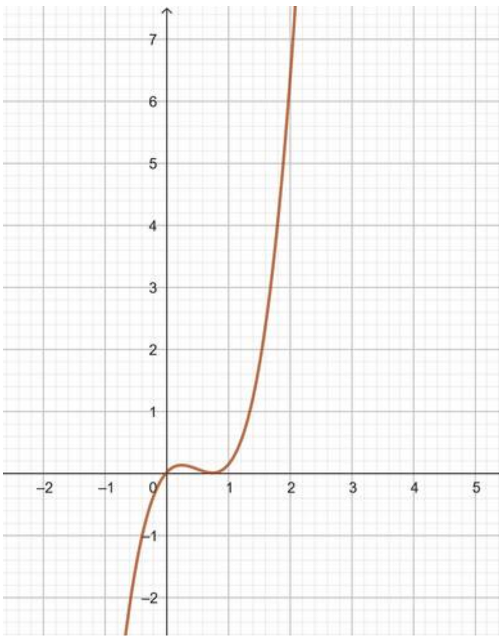
a) Die Funktion $f(x) = 0{,}25x^3 - 3x^2 + 9x$ gehört zur Funktionenschar f_k. Gib das zu ihr gehörende k an.

b) Der nachfolgend abgebildete Graph gehört zu einer Funktion der Funktionenschar. Bestimme rechnerisch das zu ihr gehörende k.

c) Zeige rechnerisch, dass der Punkt A (0 / 0) auf jeder Funktion der Funktionenschar liegt.

d) Bestimme rechnerisch die Nullstellen der Funktionenschar in Abhängigkeit von k.

Graph:
(zu Aufgabenteil b)



Aufgabe 5

Gegeben ist eine Bakterienkultur, die jetzt 50 cm² bedeckt. Sie wächst pro Stunde um 4%.

a) Beschreibe das Wachstum der Bakterienkultur mit einer Exponentialfunktion f. Dabei soll x für die Zeit in Stunden ab jetzt stehen und f(x) für die Größe in cm².
b) Bestimme rechnerisch die Größe der Kultur nach 5 Stunden.
c) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die Kultur eine Größe von 75 cm² erreicht.
d) Bestimme rechnerisch den Zeitraum, den die Kultur für eine Verdopplung ihrer Größe benötigt.
e) Eine zweite Kultur bedeckt jetzt auch 50 cm², hat aber eine Verdopplungszeit von 6 Stunden. Beschreibe das Wachstum dieser zweiten Kultur mit einer Exponentialfunktion g. Dabei soll x für die Zeit in Stunden ab jetzt stehen und g(x) für die Größe in cm².
f) Bestimme rechnerisch den Zeitpunkt, zu dem die erste und zweite Kultur gleich groß sind.

Aufgabe 6 (Vorbild: Abitur Baden Württemberg 2019)

Für jedes t > 0 ist eine Funktion f_t gegeben mit $f_t(x)=x^4-2tx^2+8t$.

a) Bestimme rechnerisch den Wert von t, für den der Punkt P (1 / 4) auf dem Graphen liegt.
b) Jede Funktion f_t hat an der Stelle $x=\sqrt{t}$ einen Tiefpunkt. Berechne denjenigen Wert von t, für den dieser Tiefpunkt so hoch wie möglich liegt.
c) Zeige rechnerisch, dass es genau zwei Punkte gibt, durch die alle Funktionen der Schar verlaufen.