AUFGABEN (TEIL A)

AUFGABE 1

Berechne die Nullstellen der folgenden Funktionen:

a) $f(x) = x^2 + 2x - 8$

b) $f(x) = 2x^2 - 8x - 24$

c) $f(x) = x^2 + 4x$

d) $f(x) = x^3 + 4x^2$

e) $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

f) $f(x) = x^5 - 8x^3 + 16x$

g) $f(x) = x^3 - 27$

AUFGABE 2

Löse das folgende lineare Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
\text{I.}\quad & x + y + z = 4 \\
\text{II.}\quad & x + 2y + 3z = 8 \\
\text{III.}\quad & 2x - y - 2z = -2
\end{aligned}
$$

AUFGABE 3

Gegeben ist die Funktion $f(x) = 3x^2 + 4x + 1$.

a) Bestimme f' und f''

b) Gib zwei verschiedene Stammfunktionen von f an.

c) Bestimme die Stammfunktion F, für die der Punkt $A(1|1)$ auf dem Graphen von F liegt.

AUFGABE 4

Berechne die folgenden Integrale:

a) $\int_2^3 2x + 3 \, dx$

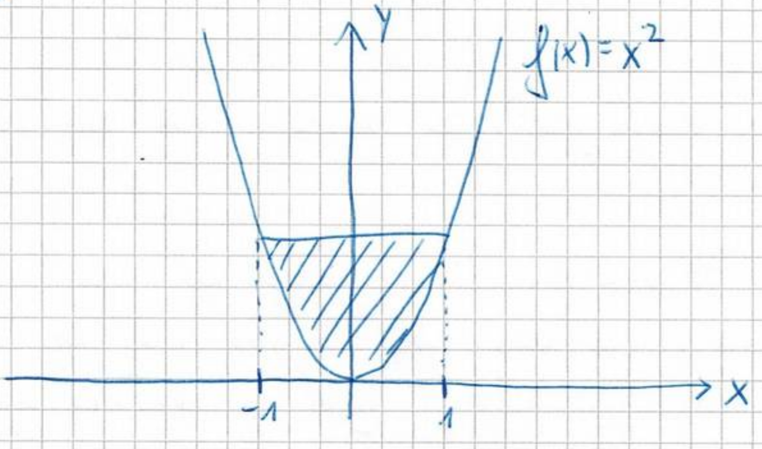
b) $\int_1^4 6x^2 + 2x \, dx$

c) $\int_1^2 \frac{1}{x^2} \, dx$

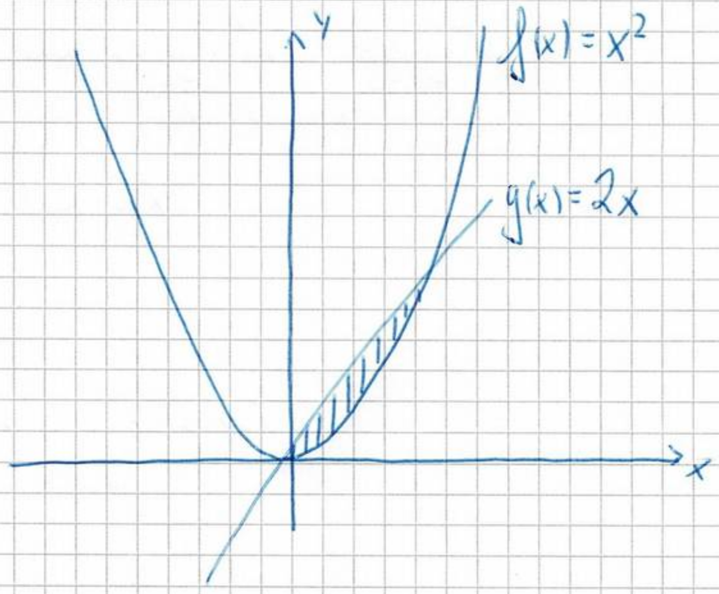
AUFGABE 5

Berechne jeweils den Flächeninhalt der schraffierten Fläche:

a)



b)



AUFGABE 6 (Aufgabensammlung Hamburg 12)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -2x^2 + 4x$

a) Berechne die Nullstellen von f

b) Bestimme den Wert für a, für den

$$\int_0^a f(x)\,dx = 0 \text{ gilt}$$

AUFGABE 7 (Aufgabensammlung Hamburg 13)

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2$

a) Bestätige, dass $x_1 = -2$ und $x_2 = 0$ die einzigen Nullstellen von f sind.

b) Berechne den Inhalt der Fläche, die der Graph von f mit der x-Achse einschließt.

AUFGABE 8

Löse die Gleichung $x^4 = 4 + 3x^2$

AUFGABE 9 (Aufgabensammlung Hamburg 16)

Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = -6x^2 + 12x + 18,\ x \in \mathbb{R}$.
Die Abbildung 9 zeigt den Graphen von f, der durch die Punkte $H(1|24)$ und $N(3|0)$ verläuft.

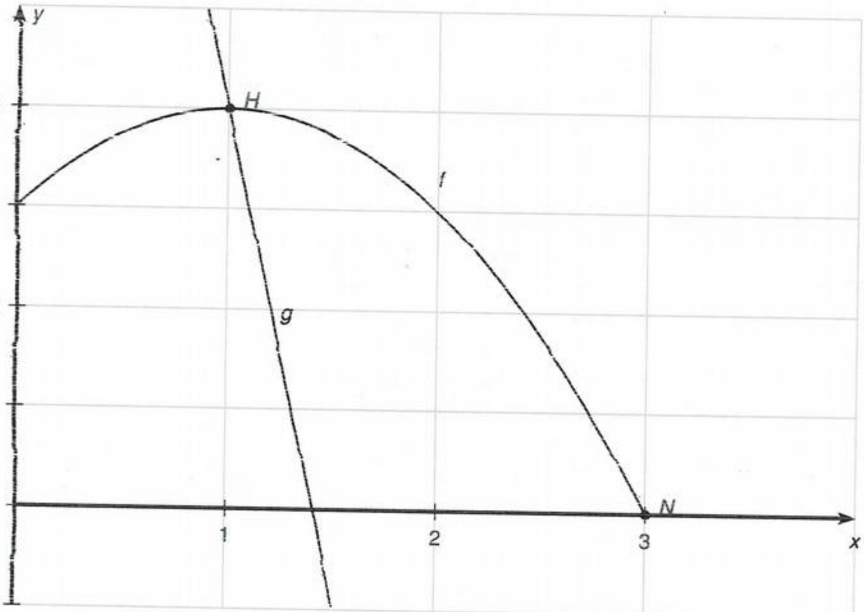
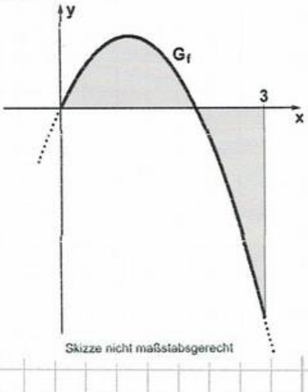


Abb. 9

a) **Zeigen** Sie, dass $\int_0^1 f(x)\,dx = 22$ gilt.

b) Die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, hat den Inhalt 54. Eine Gerade g verläuft durch den Punkt H und hat die Steigung $m = -57{,}6$.
Zeigen Sie, dass die Gerade g die Fläche, die der Graph von f im ersten Quadranten mit den Koordinatenachsen einschließt, in zwei Teilflächen gleichen Inhalts teilt.

Aufgabe 10 (Aufgabensammlung Berlin Nr. 1)



Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $f(x) = -3x^2 + 6x$.
Der Graph von f ist in der Abbildung skizziert.

a) Geben Sie eine Stammfunktion von f an.

b) Ermitteln Sie den Flächeninhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse im Bereich [0 ; 3] eingeschlossen wird (in der Abbildung grau unterlegt).

AUFGABE 11 (Aufgabensammlung Hamburg 36)

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = -x^3 + 12x$. Die Abbildung 18 zeigt den Graphen von f sowie dessen Hochpunkt $H(2|16)$.

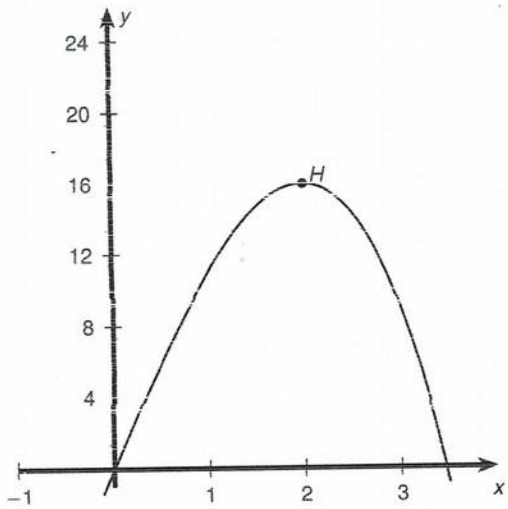


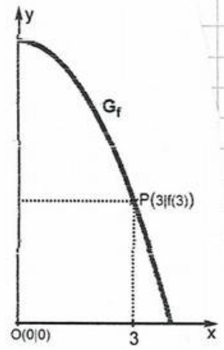
Abb. 18

a) Der Graph von f, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = 2$ schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche ein.
Zeigen Sie, dass diese Fläche den Inhalt 20 besitzt.

b) Die Gerade g verläuft durch den Punkt H und besitzt eine negative Steigung. Der Graph von f, die y-Achse und die Gerade g schließen für $0 \leq x \leq 2$ eine Fläche mit dem Inhalt 20 ein.
Bestimmen Sie die Koordinaten des Schnittpunkts der Geraden g mit der y-Achse.

AUFGABE 12 (Aufgabensammlung Berlin Nr. 2)

Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{1}{2}(16 - x^2)$; $0 \leq x \leq 4$.
Jeder Punkt $P(x|f(x))$ auf dem Graphen legt ein achsenparalleles Rechteck mit den Eckpunkten $O(0|0)$ und P fest.



a) Weisen Sie nach, dass der Umfang des Rechtecks 13 LE beträgt, wenn P die Koordinaten $P(3|f(3))$ hat.

b) Für einen beliebigen Punkt $P(x|f(x))$ ergibt sich für den Umfang die Gleichung $U(x) = 2x + 2f(x)$.
Ermitteln Sie den Wert für x, für den der Umfang des Rechtecks maximal ist.
Hinweis: Es genügt die Betrachtung der notwendigen Bedingung.

AUFGABEN (TEIL 3)

AUFGABE 1 (Abitur Berlin 2011)

Gegeben sind die Funktionen f und g durch die Gleichung $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 3x$ und den Graphen von g in der Anlage.

Die Graphen von f und g begrenzen für $1 \le x \le 3$ einen See. Der Graph von f bildet modellhaft die nördliche und die zu g gehörende quadratische Parabel die südliche Uferbegrenzungslinie.

Die x-Achse verläuft in West-Ost-Richtung. Die Längeneinheit ist 1 km.

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung von g.
   [Zur Kontrolle: $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$.]

b) Zeigen Sie, dass der Punkt $S_x(1\,|\,0)$ ein gemeinsamer Punkt der Graphen von f und g ist. Der Graph der Funktion f schneidet die x-Achse in zwei weiteren Punkten. Ermitteln Sie deren Koordinaten.

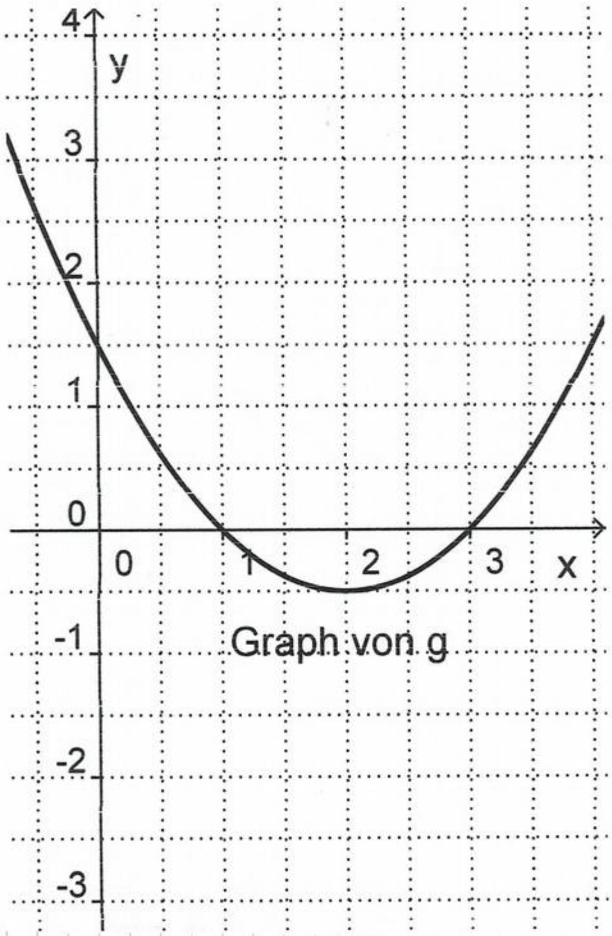
c) Bestimmen Sie für den Graphen von f die Koordinaten der lokalen Extrempunkte und deren Art. Für die Koordinaten der Extrempunkte genügen Näherungswerte. Zeichnen Sie auf der Grundlage Ihrer bisherigen Ergebnisse den Graphen von f in der Anlage ein.

d) Berechnen Sie die Länge des Sees zwischen seinem nördlichsten und seinem südlichsten Punkt in Metern.

e) Berechnen Sie die Größe der Seefläche.

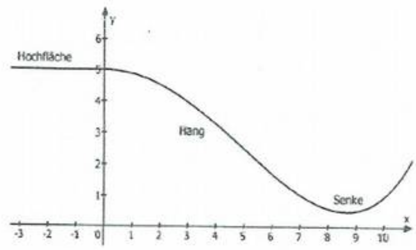
f) Im Punkt $P(3\,|\,0)$ befinden sich Start und Ziel einer Schwimmveranstaltung. Für die Schwimmveranstaltung soll durch zwei Bojen im See ein 5 km langer Kurs in Form eines gleichseitigen Dreiecks abgesteckt werden, wobei eine der drei Schwimmbahnen in West-Ost-Richtung verläuft.
   Berechnen Sie für den beschriebenen Schwimmkurs die exakten Koordinaten der Bojen.

Anlage zu Aufgabe 1



AUFGABE 2 (Abitur Baden-Württemberg 2021)

Das Gelände eines Abenteuerspielplatzes besteht aus einer Hochfläche, an die sich ein Hang mit einer Senke anschließt.
Die Profillinie des Geländes wir für $-3 \leq x \leq 0$ durch die Gerade mit der Gleichung $y = 5$ und für $0 \leq x \leq 11$ durch den Graphen der Funktion f mit $f(x) = 0{,}0008x^4 - 0{,}12x^2 + 5$ beschrieben.
Die Abbildung zeit diese Profillinie.
(1 LE entspricht 1m)



a) Berechnen Sie die Koordinaten des tiefsten Punktes der Profillinie.

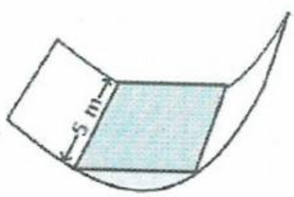
Weisen Sie rechnerisch nach, dass der Hang zwischen Hochfläche und Senke an der Stelle x = 5 am steilsten abfällt und dort ein Gefälle von 80% hat. (

Zeigen Sie, dass die Profillinie beim Übergang von der Hochfläche zum Hang knickfrei ist.
(Teilergebnis: Der tiefste Punkt hat die y-Koordinate 0,5)

b) Zwischen zwei Befestigungspunkten, die im Modell durch P(5|f(5)) und Q(10|f(10)) dargestellt werden, wird ein Seil straff gespannt.
Berechnen Sie die Länge des Seils.

Beschreiben Sie ein Verfahren, mit dem man die maximale vertikale Höhe des Seils über dem Gelände berechnen kann.

c) Bei einem Umbau soll die Senke auf 5m Länge so mit Sand aufgefüllt werden, dass eine horizontale rechteckige Fläche entsteht, die 0,5m oberhalb des tiefsten Punktes der Senke liegt.
Berechnen Sie das Volumen des dafür benötigten Sandes.



AUFGABE 3 (Abitur Bremen 2007)

Abbildung 1 zeigt den Querschnitt eines Wassergrabens mit seinen Uferlinien. Seine Böschung verläuft auf einer Seite sanft (knickfrei) von einer horizontal verlaufenden Uferlinie ($Ufer_1$) nach unten, auf der anderen Seite mit einem scharfen Knick zur Uferlinie ($Ufer_2$).
Das Koordinatensystem wurde so gelegt, dass sich der Querschnitt des Grabens zwischen den x-Werten -4 und 2 durch eine ganzrationale Funktion f dritten Grades beschreiben lässt, die in $T(0|0)$ ihren Tief- und in $H(-4|3{,}2)$ ihren Hochpunkt hat.
Eine Einheit auf jeder Achse entspricht jeweils 1 m.

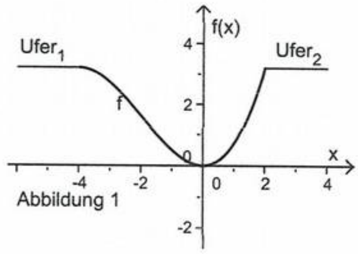


Abbildung 1

a) Bestimmen Sie die Funktionsgleichung der Funktion f in Abhängigkeit von x.

In Abbildung 2 blickt man aus der entgegen gesetzten Richtung auf den Querschnitt. Zwischen den x-Werten -2 und 4 beschreibt die Funktion h mit $h(x) = -0{,}1 \cdot x^3 + 0{,}6 \cdot x^2$ für das hier gewählte Koordinatensystem ebenfalls den Querschnitt des Grabens ohne die Uferlinien.
Eine Einheit auf jeder Achse entspricht wie in a) jeweils 1 m.

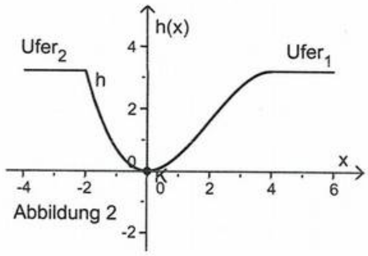


Abbildung 2

b) Skizzieren Sie, ausgehend vom Graphen von h, den Graphen der Ableitungsfunktion h' in ein neues Koordinatensystem.
Begründen Sie den Verlauf des Graphen von h' aus dem Verlauf des Graphen von h.

c) Ein Käfer befindet sich im Punkt $K(0/0)$. Er möchte aus dem Graben hinauskrabbeln. Er schafft höchstens eine Steigung von $1{,}5 = 150\%$. Kann er aus dem Graben zum $Ufer_1$ gelangen?
Begründen Sie Ihre Antwort.

d) Ermitteln Sie mit Hilfe einer Stammfunktion den Wert für

$$I = \int_{-2}^{4} \left(3{,}2 - h(x)\right) dx = \int_{-2}^{4} \left(3{,}2 + 0{,}1 \cdot x^3 - 0{,}6 \cdot x^2\right) dx$$

Zur Kontrolle: $I = 10{,}8$.
Erläutern Sie, auch mit Hilfe einer Skizze, die Bedeutung des Integrals.
Der zurzeit noch leere 2 km lange Wassergraben soll geflutet werden.
Berechnen Sie das Wasservolumen in m^3, das der bis zu den Uferlinien gefüllte Graben fassen kann.

AUFGABE 4 (Abitur Thüringen 2010)

Gegeben ist die Funktion f durch $y = f(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{3}{2}x^2$ mit $x \in R$.

a) Zeigen Sie, dass der Graph der Funktion f außer dem Koordinatenursprung noch zwei weitere Schnittpunkte mit der x-Achse hat!
Untersuchen Sie den Graphen von f auf Symmetrie, auf das Verhalten im Unendlichen, auf lokale Extrempunkte und auf Wendepunkte! Geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-4{,}5 \le x \le 4{,}5$!
Geben Sie alle Werte für c an, für die gilt:
„Die Gerade h mit der Gleichung $y = c$ $(c \in R)$ und der Graph der Funktion haben genau zwei gemeinsame Punkte."!

b) Bestimmen Sie diejenige Stammfunktion F von f, welche die y-Achse im Punkt $P(0; 3)$ schneidet!
Durch Spiegelung des Graphen von f an der x-Achse entsteht der Graph einer weiteren Funktion g.
Skizzieren Sie den Graphen von g in das Koordinatensystem aus Teilaufgabe a)!
Geben Sie eine Gleichung für g an!
Die Graphen der Funktionen f und g schließen für $x > 0$ ein Flächenstück vollständig ein.
Berechnen Sie den Inhalt dieses Flächenstücks!

c) Im Punkt $R(\sqrt{3}; f(\sqrt{3}))$ des Graphen von f wird eine Tangente t_1 gelegt.
Bestimmen Sie eine Gleichung für die Tangente t_1!
Eine weitere Tangente t_2 an den Graphen von f hat die Gleichung $y = t_2(x) = 2\sqrt{3} \cdot x + \frac{9}{4}$.
Skizzieren Sie beide Tangenten in das Koordinatensystem aus Aufgabenteil a)!
Geben Sie ohne weitere Rechnung die Koordinaten des zugehörigen Berührungspunktes der Tangente t_2 mit dem Graphen von f an!
Beide Tangenten schneiden einander im Punkt S.
Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S an und bestimmen Sie die Größe des Schnittwinkels der Tangenten t_1 und t_2!

Aufgabe 5 (Abitur Thüringen 2007)

Gegeben ist eine Funktion f durch $y = f(x) = \frac{6x^2 - x^3}{4}$ mit $x \in R$.

a) Untersuchen Sie den Graphen von f auf Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen, lokale Extrempunkte, Wendepunkte und geben Sie gegebenenfalls deren Koordinaten an!
Skizzieren Sie den Graphen von f im Intervall $-2 \le x \le 6{,}5$!

b) Auf dem Graphen der Funktion f existiert ein Punkt $Q(q;\ f(q))$ mit $0 < q < 6$.
Die Parallele zur y-Achse durch Q schneidet die x-Achse im Punkt P.
O bezeichnet den Koordinatenursprung.
Ermitteln Sie die Koordinaten von Q so, dass der Flächeninhalt des Dreiecks OPQ maximal ist!

c) Bestimmen Sie eine Gleichung der Wendetangente an den Graphen von f an!
Ermitteln Sie, wie viele Tangenten es an den Graphen von f gibt, die die Wendetangente senkrecht schneiden?

d) Der Graph von f und die ~~x~~-Achse begrenzen eine Fläche vollständig.
Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis diese Fläche durch die Gerade mit der Gleichung $y = 2x$ geteilt wird!