LÖSUNGEN
(TEIL A)

AUFGABE 1

a) $2^3 = 8$

b) $4^{-1} = \frac{1}{4}$

c) $(-3)^3 = -27$

d) $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{9} = 3$

e) $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$

f) $4^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt[2]{4}} = \frac{1}{2}$

g) $8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$

h) $4^{\frac{3}{2}} = (\sqrt[2]{4})^3 = 2^3 = 8$

i) $4^0 = 1$

AUFGABE 2

a) $x^3 = 27$
$x = 3$

b) $x^3 = -8$
$x = -2$

c) $x^4 = 16$
$x_1 = 2$
$x_2 = -2$

d) $2^x = 32$
$x = 5$

e) $\log_2(8) = x$
$x = 3$ (denn $2^3 = 8$)

f) $\log_2(16) = x$
$x = 4$ (denn $2^4 = 16$)

g) $\log_2(x) = 2$
$x = 4$ (denn $2^2 = 4$)

h) $\log_x(16) = 2$
$\Leftrightarrow \quad x^2 = 16$
$\Rightarrow \quad x = 4$

i) $x^3 = 1$
$x = 1$

j) $\log_3(1) = x$
$x = 0$ (denn $3^0 = 1$)

k) $\log_3(x) = 3$
$x = 27$ (denn $3^3 = 27$)

l) $\log_3(9) + 1 = x$
$2 + 1 = x$
$3 = x$
(denn $3^2 = 9$)

Aufgabe 3

a) $(x-3) \cdot (x+1)^2 = 0$ | Satz v. Nullprodukt
$x - 3 = 0$ oder $(x+1)^2 = 0$
$x_1 = 3$ $\quad$ $(x+1)^2 = 0$ | $\sqrt{}$
$x + 1 = 0$
$x_2 = -1$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 3$ und $x_2 = -1$

b) $x^4 + 5x^3 = 0$
$x^3 \cdot (x+5) = 0$ | Satz v. Nullprodukt
$x^3 = 0$ oder $x + 5 = 0$
$x_1 = 0$ $\quad$ $x_2 = -5$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -5$

c) $x^4 + 5x^2 = 0$
$x^2 \cdot (x^2 + 5) = 0$ | Satz vom Nullprodukt
$x^2 = 0$ oder $x^2 + 5 = 0$
$x_1 = 0$ $\quad$ $x^2 = -5$ ↯ $\quad$ $\Rightarrow$ Nullstelle $x = 0$

d) $x^3 + 4x^2 - 12x = 0$

$x \cdot (x^2 + 4x - 12) = 0$ | Satz v. Nullprodukt

$x = 0$ oder $x^2 + 4x - 12 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x = -2 \pm \sqrt{4 + 12}$

$x = -2 \pm \sqrt{16}$

$x = -2 \pm 4$

$x_2 = -6$

$x_3 = 2$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 0$; $x_2 = -6$ und $x_3 = 2$

e) $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 - 4x + 4) = 0$ | Satz v. Nullprodukt

$x^2 = 0$ oder $x^2 - 4x + 4 = 0$

$x_1 = 0$ $\quad x = 2 \pm \sqrt{4 - 4}$

$x_2 = 2$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = 2$

f) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ | Substitution $x^2 = z$

$z^2 - 5z + 4 = 0$

$z = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 4}$

$z = 2{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}$

$z = 2{,}5 \pm 1{,}5$

$z_1 = 4$

$z_2 = 1$

| Resubstitution $z = x^2$

$x^2 = 4 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 2$

$x_2 = -2$

$x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$x_3 = 1$

$x_4 = -1$

$\Rightarrow$ Nullstellen

$x_1 = 2$; $x_2 = -2$;

$x_3 = 1$; $x_4 = -1$

g) $x^4 + 2x^2 - 3 = 0 \quad | \text{Substitution } x^2 = z$

$z^2 + 2z - 3 = 0$

$z = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$

$z = -1 \pm \sqrt{4}$

$z = -1 \pm 2$

$z_1 = -3$

$z_2 = 1 \quad | \text{Resubstitution } z = x^2$

$x^2 = -3 \quad | \sqrt{\ }$ $\quad$ $x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$\lightning$ $\quad$ $x_1 = 1$

$x_2 = -1$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$

h) $x^5 + 4x^3 - 5x = 0$

$x \cdot (x^4 + 4x^2 - 5) = 0 \quad | \text{Satz v. Nullprodukt}$

$x = 0$ oder $x^4 + 4x^2 - 5 = 0$

$x_1 = 0 \qquad x^4 + 4x^2 - 5 = 0 \quad | \text{Substitution } x^2 = z$

$z^2 + 4z - 5 = 0$

$z = -2 \pm \sqrt{4 + 5}$

$z = -2 \pm \sqrt{9}$

$z = -2 \pm 3$

$z_1 = -5$

$z_2 = 1 \quad | \text{Resubstitution } z = x^2$

$x^2 = -5 \quad | \sqrt{\ }$ $\quad$ $x^2 = 1 \quad | \sqrt{\ }$

$\lightning$ $\quad$ $x_2 = 1$

$x_3 = -1$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ und $x_3 = -1$

i) $x^6 + 2x^3 - 3 = 0$ | Substitution $x^3 = z$

$z^2 + 2z - 3 = 0$

$z = -1 \pm \sqrt{1 + 3}$

$z = -1 \pm \sqrt{4}$

$z = -1 \pm 2$

$z_1 = -3$ | Resubstitution $z = x^3$

$z_2 = 1$

$x^3 = -3 \;|\sqrt[3]{\;}$ $\qquad$ $x^3 = 1 \;|\sqrt[3]{\;}$

$x_1 = \sqrt[3]{-3} = -\sqrt[3]{3}$ $\qquad$ $x_2 = 1$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = -\sqrt[3]{3}$ und $x_2 = 1$

Aufgabe 4

a) $f(x) = (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)$

b) $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-3)^2$

c) $f(x) = (x-2)^3$

d) $f(x) = (x-2)^2 \cdot (x-3) \cdot (x-4) \cdot (x-5)$

Aufgabe 5

$f(x)$ ——— VI

$g(x)$ ——— III

Aufgabe 6

a)

x	0	1
y	2	6

$\cdot 3$

$$f(x) = 2 \cdot 3^x$$

b)

x	0	1	2
y	2		32

$a > 0$

$\cdot a$ $\cdot a$

$\cdot 16$

$$2 \cdot a^2 = 32$$
$$a^2 = 16$$
$$a = 4$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot 4^x$$

Aufgabe 7

a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

AUFGABE 8

x	0	1	2	3
y		6		24

$\cdot a$ $\cdot a$

$\cdot 4$

$$6 \cdot a^2 = 24 \qquad a > 0$$

$$a^2 = 4$$

$$a = 2$$

$$\Rightarrow f(x) = b \cdot 2^x$$

$A(1|6)$ liegt auf $f \Rightarrow f(1) = 6$

$$b \cdot 2^1 = 6$$

$$b \cdot 2 = 6$$

$$b = 3$$

$$\Rightarrow f(x) = 3 \cdot 2^x$$

LÖSUNGEN
(Teil B)

AUFGABE 1

a) $A(4|y)$ liegt auf $f \Rightarrow$ $y = f(4)$

$y = 0{,}9 \cdot 1{,}3^4$

$y \approx 2{,}57$

$\Rightarrow A(4/2{,}57)$

$B(x|12)$ liegt auf $f \Rightarrow$ $f(x) = 12$

$0{,}9 \cdot 1{,}3^x = 12 \quad |:0{,}9$

$1{,}3^x = 13{,}\overline{3}$

$x = \log_{1,3}(13{,}\overline{3})$

$x \approx 9{,}87$

$\Rightarrow B(9{,}87/12)$

b) Schnittpunkt mit y-Achse:

$f(0) = 0{,}9 \cdot 1{,}3^0 = 0{,}9$

$\Rightarrow S_y(0|0{,}9)$

Schnittpunkt mit x-Achse:

nicht vorhanden, da es keine Nullstellen gibt

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

d) ①

$f(x) = g(x)$

$0{,}9 \cdot 1{,}3^x = 2 \cdot 0{,}8^x \quad | :0{,}9$

$1{,}3^x = \frac{20}{9} \cdot 0{,}8^x \quad | :0{,}8^x \qquad (0{,}8^x \neq 0)$

$\frac{1{,}3^x}{0{,}8^x} = \frac{20}{9}$

$\left(\frac{13}{8}\right)^x = \frac{20}{9}$

$x = \log_{\frac{13}{8}}\left(\frac{20}{9}\right) \approx 1{,}64$

$y = f(1{,}64) = 0{,}9 \cdot 1{,}3^{1{,}64} \approx 1{,}38$

$\Rightarrow S(1{,}64 / 1{,}38)$

(II) $\lim_{x \to \infty} g(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$

Aufgabe 2

a) $A(4|y)$ liegt auf f $\Rightarrow$ $f(4) = y$

$2 \cdot 4^4 = y$

$512 = y$

$\Rightarrow A(4/512)$

$B(x|12)$ liegt auf $f \Rightarrow f(x) = 12$

$$2 \cdot x^4 = 12 \quad |:2$$
$$x^4 = 6 \quad |\sqrt[4]{\ }$$
$$x_1 \approx 1{,}57$$
$$x_2 \approx -1{,}57$$

$\Rightarrow B_1 (1{,}57/12)$
$B_2 (-1{,}57/12)$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

c) Es handelt sich um Graph II

- Graph I zeigt eine quadratische Funktion.
  $f(2) = 2 \cdot 2^4 = 2 \cdot 16 = 32$
  Bei Graph I ist aber $f(2) = 4$
- Graph III verläuft links von $x=0$ im Negativen. Der Graph von f müsste aber im Positiven verlaufen.
- Graph IV gehört zu einer Exponentialfunktion.

Aufgabe 3

a) $f(0) = 12 \cdot 1{,}2^0 = 12$

$\Rightarrow$ Die Kultur ist 12 cm^2 groß.

b) $1{,}2 = 1 + \frac{20}{100}$

$\Rightarrow$ Es sind 20%.

c) von 10 bis 14:30 Uhr: 4,5 Stunden

$f(4{,}5) = 12 \cdot 1{,}2^{4{,}5} = 27{,}26$

$\Rightarrow$ Es sind 27,26 cm^2

d) von 9 bis 10 Uhr: 1 Stunde

$f(-1) = 12 \cdot 1{,}2^{-1} = 10$

$\Rightarrow$ Es waren 10 cm^2.

e) $f(x) = 20$

$12 \cdot 1{,}2^x = 20 \quad | :12$

$1{,}2^x = 1{,}\overline{6}$

$x = \log_{1{,}2}(1{,}\overline{6}) \approx 2{,}8$

$2{,}8\,h \mathrel{\hat{=}} 2\,h + 0{,}8\,h$

$0{,}8\,h = 48$ min

$0{,}8 \cdot 60 = 48$

$\Rightarrow$ Es sind ca. 2,8 h.
Also 12:48 Uhr

f) $24 = 12 \cdot 1{,}2^x$

$2 = 1{,}2^x$

$x = \log_{1{,}2}(2) \approx 3{,}8$

$3{,}8\,h \mathrel{\hat{=}} 3\,h + 0{,}8\,h$

$0{,}8 \cdot 60 = 48$ min

$\Rightarrow$ Es sind ca. 3,8 h.
Also 13:48 Uhr

g) $f(x) = g(x)$

$12 \cdot 1{,}2^x = 6 \cdot 1{,}5^x \quad | :12$

$1{,}2^x = 0{,}5 \cdot 1{,}5^x \quad | : 1{,}5^x \quad (1{,}5^x \neq 0)$

$\frac{1{,}2^x}{1{,}5^x} = 0{,}5$

$\left(\frac{4}{5}\right)^x = \frac{1}{2}$

$x = \log_{\frac{4}{5}}\left(\frac{1}{2}\right) \approx 3{,}1$

$3{,}1\,h = 3h + 0{,}1\,h$

$0{,}1 \cdot 60 = 6$ min

$\Rightarrow$ Das Überholen findet nach ca. 3,1 h statt, also 13:06 Uhr.

h) $h(x) = 20 \cdot 0{,}9^x$ $\quad$ x: Zeit ab 9 Uhr

$h(1) = 20 \cdot 0{,}9 = 18$ $\quad$ Größe um 10 Uhr

$h_{neu}(x) = 18 \cdot 0{,}9^x$

$f(x) = h_{neu}(x)$

$12 \cdot 1{,}2^x = 18 \cdot 0{,}9^x \quad | :12$

$1{,}2^x = 1{,}5 \cdot 0{,}9^x \quad | : 0{,}9^x \quad (0{,}9^x \neq 0)$

$\frac{1{,}2^x}{0{,}9^x} = 1{,}5$

$\left(\frac{4}{3}\right)^x = 1{,}5$

$x = \log_{\frac{4}{3}}(1{,}5) \approx 1{,}41$

$1{,}41\,h = 1h + 0{,}41\,h$

$0{,}41 \cdot 60 = 24{,}6$ min

$f(1{,}41) = 12 \cdot 1{,}2^{1{,}41}$
$\approx 15{,}52$

$\Rightarrow$ Der Zeitpunkt ist nach ca. 1,41 h, also ca. 11:25 Uhr. Die Kulturen sind dann ca. 15,52 cm² groß.

Aufgabe 4

a) $f(x) = 28 \cdot 3^x$

b) $75\ min = \underset{60\ min}{1h} + \underset{15\ min}{0{,}25\ h}$

$f(1{,}25) = 28 \cdot 3^{1{,}25} \approx 110{,}55$

$\Rightarrow$ Die Kultur hat eine Größe von ca. 110,55 cm^2.

c) $f(x) = 100$

$28 \cdot 3^x = 100 \quad | :28$

$3^x = \frac{25}{7}$

$x = \log_3\left(\frac{25}{7}\right) \approx 1{,}16$

$\Rightarrow$ Dies ist nach ca. 1,16 h der Fall.

d)

$56 = 28 \cdot 3^x$

$2 = 3^x$

$x = \log_3(2) \approx 0{,}63$

$\Rightarrow$ Für eine Verdopplung werden ca. 0,63 h benötigt.

e)

x	0	1	2
y	28		84

$\cdot a \quad \cdot a$

$28 \cdot a^2 = 84 \qquad a > 0$

$a^2 = 3$

$a \approx 1{,}73$

$\Rightarrow f(x) = 28 \cdot 1{,}73^x$

Aufgabe 5

a) $(x-3)\cdot(x^2-5)=0 \quad |$ Satz v. Nullprodukt

$x-3=0$ oder $x^2-5=0$

$x_1=3 \qquad x^2=5$

$x_2 \approx 2{,}24$

$x_3 \approx -2{,}24$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1=3$; $x_2=2{,}24$ und $x_3=-2{,}24$

b) $x^4-5x^2+6=0 \quad |$ Substitution $x^2=z$

$z^2-5z+6=0$

$z=2{,}5\pm\sqrt{6{,}25-6}$

$z=2{,}5\pm\sqrt{0{,}25}$

$z=2{,}5\pm 0{,}5$

$z_1=3 \qquad z_2=2 \quad |$ Resubstitution $z=x^2$

$x^2=3 \;|\sqrt{\ } \qquad x^2=2\;|\sqrt{\ }$

$x_1=1{,}73 \qquad x_3=1{,}41$

$x_2=-1{,}73 \qquad x_4=-1{,}41$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1=1{,}73$; $x_2=-1{,}73$; $x_3=1{,}41$ und $x_4=-1{,}41$

c) $x^6-6x^4+5x^2=0$

$x^2\cdot(x^4-6x^2+5)=0 \quad |$ Satz v. Nullprodukt

$x^2=0$ oder $x^4-6x^2+5=0 \quad |$ Substitution $x^2=z$

$x_1=0 \qquad z^2-6z+5=0$

$z=3\pm\sqrt{9-5}$

$z=3\pm\sqrt{4}$

$z=3\pm 2$

$z_1 = 5 \quad z_2 = 1$ | Resubstitution $z = x^2$

$x^2 = 5 \mid \sqrt{\ } \quad x^2 = 1 \mid \sqrt{\ }$

$x_2 = 2{,}24 \quad x_4 = 1$

$x_3 = -2{,}24 \quad x_5 = -1$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 0$; $x_2 = 2{,}24$; $x_3 = -2{,}24$; $x_4 = 1$ und $x_5 = -1$

d) $3 \cdot 2^x - 8 = 0$

$3 \cdot 2^x = 8$

$2^x = \frac{8}{3}$

$x = \log_2\left(\frac{8}{3}\right) \approx 1{,}42 \quad \Rightarrow$ Nullstelle $x \approx 1{,}42$

e) $x^4 - 9x^3 + 20x^2 = 0$

$x^2 \cdot (x^2 - 9x + 20) = 0$ | Satz v. Nullprodukt

$x^2 = 0$ oder $x^2 - 9x + 20 = 0$

$x_1 = 0 \quad x = 4{,}5 \pm \sqrt{20{,}25 - 20}$

$x = 4{,}5 \pm \sqrt{0{,}25}$

$x = 4{,}5 \pm 0{,}5$

$x_2 = 5$

$x_3 = 4$

$\Rightarrow$ Nullstellen $x_1 = 0$; $x_2 = 5$ und $x_3 = 4$

f) $x^3 - x^2 + 9x = 0$

$x \cdot (x^2 - x + 9) = 0$ | Satz v. Nullprodukt

$x = 0 \quad x^2 - x + 9 = 0$

$x_1 = 0 \quad x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 9}$

$x = 0{,}5 \pm \sqrt{-8{,}75}$

$\lightning$

$\Rightarrow$ Nullstelle: $x = 0$

Aufgabe 6

a) $x = 3$ Nullstelle von $f \Rightarrow f(3) = 0$

$$3^3 + a \cdot 3^2 = 0$$
$$27 + 9a = 0$$
$$9a = -27 \quad |:9$$
$$a = -3$$

$\Rightarrow a = -3$

b) $A(1|5)$ liegt auf $f \Rightarrow f(1) = 5$

$$1^3 + a \cdot 1^2 = 5$$
$$1 + a = 5 \quad |-1$$
$$a = 4$$

$\Rightarrow a = 4$

c)
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

Aufgabe 7

x	0	1	2	3	4
y		16,5			21,9615

$\cdot a$ $\quad \cdot a$ $\quad \cdot a$

$\cdot 1{,}331$

$$16{,}5 \cdot a^3 = 21{,}9615$$
$$a^3 = 1{,}331 \quad \left|\ \sqrt[3]{\ }\right.$$
$$a = 1{,}1$$

$$\Rightarrow f(x) = b \cdot 1{,}1^x$$

$A(1|16{,}5)$ liegt auf $f \Rightarrow f(1) = 16{,}5$

$$b \cdot 1{,}1 = 16{,}5 \quad |:1{,}1$$
$$b = 15$$

$$\Rightarrow f(x) = 15 \cdot 1{,}1^x$$

AUFGABE 8

x	0	1	2	3
y	4	2	1	0,5

$\cdot 0{,}5 \quad \cdot 0{,}5 \quad \cdot 0{,}5$

$$f(x) = 4 \cdot 0{,}5^x$$