LÖSUNGEN (Teil mit Hilfsmitteln)

1) a) $A(1/25{,}3)$
$B(3/33{,}1)$
$C(5/22{,}5)$
$D(10/10)$

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$A(1/25{,}3)$ auf f $\Rightarrow f(1) = 25{,}3$
$a + b + c + d = 25{,}3$

$B(3/33{,}1)$ auf f $\Rightarrow f(3) = 33{,}1$
$27a + 9b + 3c + d = 33{,}1$

$C(5/22{,}5)$ auf f $\Rightarrow f(5) = 22{,}5$
$125a + 25b + 5c + d = 22{,}5$

$D(10/10)$ auf f $\Rightarrow f(10) = 10$
$1000a + 100b + 10c + d = 10$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 25{,}3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 33{,}1 \\ 125 & 25 & 5 & 1 & 22{,}5 \\ 1000 & 100 & 10 & 1 & 10 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$a = 0{,}3$
$b = -5$
$c = 20$
$d = 10$

Es gibt keine hinr. Bed., die nachzuprüfen wäre.

$\Rightarrow f(x) = 0{,}3x^3 - 5x^2 + 20x + 10$

b) gesucht: Extremstellen

$f'(x) = 0{,}9x^2 - 10x + 20$

$f''(x) = 1{,}8x - 10$

N.B.: $f'(x) = 0$

$0{,}9x^2 - 10x + 20 = 0$

(GTR ...)

$x_1 = 2{,}62$

$x_2 = 8{,}50$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(2{,}62) = 1{,}8 \cdot 2{,}62 - 10 < 0$

$\Rightarrow$ lok. Maximum bei $x = 2{,}62$

$f''(8{,}50) = 1{,}8 \cdot 8{,}5 - 10 > 0$

$\Rightarrow$ lok. Minimum bei $x = 8{,}5$

Ränder:

$f(0) = 10$

$f(2{,}62) = 33{,}47$

$f(8{,}5) = 2{,}99$

$f(12) = 48{,}4$

Antwort:

Die geringste Entfernung wird um 18:30 mit 2,99 km erreicht.

Die größte Entfernung wird am Ende um 22 Uhr mit 48,4 km erreicht.

c) $f(x) = 30$

$0{,}3x^3 - 5x^2 + 20x + 10 = 30$

(GTR ...)

$x_1 = 1{,}53$ $1{,}53\,h \approx 1\,h\ 31{,}8\,min$

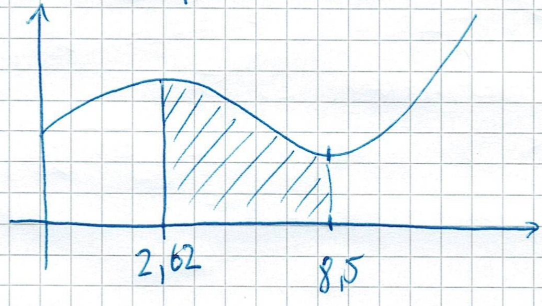
$x_2 = 3{,}85$ $3{,}85\,h \approx 3\,h\ 51\,min$

$x_3 = 11{,}28$ $11{,}28\,h \approx 11\,h\ 16{,}8\,min$

Antwort:

Die Entfernung 30 km wird erreicht um ca. 11:32 Uhr, 13:51 Uhr und um ca. 21:17 Uhr.

d) Verlauf des Graphen laut Teilaufgabe b:



$2{,}62\,h \mathrel{\hat=} 2\,h\ 37{,}2\,min$

Er fährt von ca. 12:37 Uhr bis ca. 18:30 Uhr auf Neuss zu.

e) Geschwindigkeit $v(x)$:

$v(x) = f'(x)$

$v(x) = 0{,}9x^2 - 10x + 20$

gesucht: Maximum von $v(x)$

N.B.: $v'(x) = 0$

$v'(x) = 1{,}8x - 10$

$1{,}8x - 10 = 0$

$1{,}8x = 10$

$x = 5{,}\bar{5}$

H.B.: $v'(x) = 0$ und $v''(x) \neq 0$

$v''(x) = 1{,}8$

$v''(5{,}\bar{5}) = 1{,}8 > 0$

$\Rightarrow$ lokales Minimum bei $x = 5{,}\bar{5}$

Ränder: $v(0) = 20$

$v(5{,}\bar{5}) = -7{,}\bar{7}$ $\quad 5{,}\bar{5}\,h \approx 5\,h\ 33\ min$

$v(12) = 29{,}6$

Antwort: höchste Geschwindigkeit von Neuss weg am Ende um 22 Uhr mit $29{,}6\ ^{km}/_{h}$

höchste Geschwindigkeit auf Neuss zu um ca. 15:33 Uhr mit $7{,}\bar{7}\ ^{km}/_{h}$

2a) $A(0|15)$

$B(50|35)$

$f(x) = ax^2 + bx$

$f'(x) = 2ax + b$

$A(0|15)$ auf f $\Rightarrow$ $f(0) = 15$

$c = 15$

$B(50|35)$ auf f $\Rightarrow$ $f(50) = 35$

$2500a + 50b + c = 35$

Steigung $0{,}5$ in B $\Rightarrow$ $f'(50) = 0{,}5$

$100a + b = 0{,}5$

$\Rightarrow$ I. $c = 15$

II. $2500a + 50b + c = 35$

III. $100a + b = 0{,}5$

Wir setzen $c = 15$ in II ein:

II. $2500a + 50b + 15 = 35$

III. $100a + b = 0{,}5$

II. $2500a + 50b = 20$

III. $100a + b = 0{,}5$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2500 & 50 & 20 \\ 100 & 1 & 0{,}5 \end{array}\right)$$

(GTR...)

$a = 0{,}002$

$b = 0{,}3$

Es gibt keine hinreichende Bed., die geprüft werden müsste

$\Rightarrow f(x) = 0{,}002x^2 + 0{,}3x + 15$

b) gesucht: Maximum der Ableitung

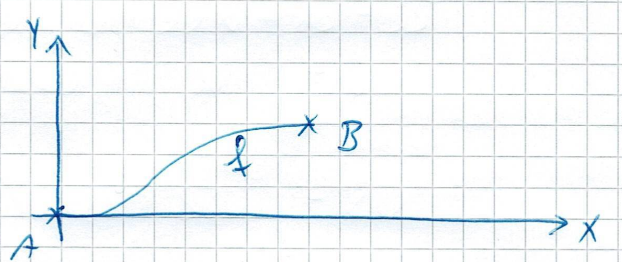
$f'(x) = 0{,}004x + 0{,}3$
$f''(x) = 0{,}004$

N.B.: $f''(x) = 0$
$0{,}004 = 0$ ↯

Ränder: $f'(0) = 0{,}3$
$f'(50) = 0{,}5$

Antwort: Der Verlauf ist bei B(50/35) am steilsten.

3) a)



A(0|0)
B(5|1)
waagerecht: Ableitung 0
(waagerechte Tangente)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$A(0|0)$ auf $f \Rightarrow f(0)=0$

$d=0$

$B(5|1)$ auf $f \Rightarrow f(5)=1$

$125a+25b+5c+d=1$

waagerecht bei A $\Rightarrow f'(0)=0$

$c=0$

waagerecht bei B $\Rightarrow f'(5)=0$

$75a+10b+c=0$

$\Rightarrow$ I. $d=0$

II. $125a+25b+5c+d=1$

III. $c=0$

IV. $75a+10b+c=0$

Wir setzen I und III in II und IV ein:

II. $125a+25b=1$

IV. $75a+10b=0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 125 & 25 & 1 \\ 75 & 10 & 0 \end{array}\right)$$

(GTR ...)

$$a=-\frac{2}{125}$$

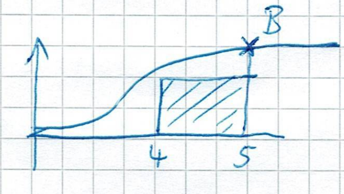
$$b=\frac{3}{25}$$

Es gibt keine hinr. Bed., die geprüft werden müsste.

$\Rightarrow f(x)=-\frac{2}{125}x^3+\frac{3}{25}x^2, \quad 0 \leq x \leq 5$

b) $f(4) = 0{,}896$

Am linken Rand der Platte befindet sich die Auffahrt auf 0,896 m Höhe, also über der 0,7 m hohen Platte. Da die Auffahrt anschließend weiter ansteigt, wird die Platte vollständig überdeckt.



c) gesucht: Maximum der Ableitung

$$f'(x) = -\frac{6}{125}x^2 + \frac{6}{25}x$$

$$f''(x) = -\frac{12}{125}x + \frac{6}{25}$$

$$f'''(x) = -\frac{12}{125}$$

N.B.: $f''(x) = 0$

$$-\frac{12}{125}x + \frac{6}{25} = 0$$

$$-\frac{12}{125}x = -\frac{6}{25}$$

$$x = 2{,}5$$

H.B.: $f''(x) = 0$ und $f'''(x) \neq 0$

$$f'''(2{,}5) = -\frac{12}{125} < 0$$

$\Rightarrow$ lokales Maximum bei $x = 2{,}5$

Ränder: $f'(0) = 0$
$f'(2,5) = 0,3$
$f'(5) = 0$ | $f(2,5) = 0,5$

Die gesuchte Stelle befindet sich bei $P(2,5/0,5)$.

d) gesucht: Schnittpunkt

$$f(x) = g(x)$$
$$-\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 = 0,5x - 1$$
$$-\frac{2}{125}x^3 + \frac{3}{25}x^2 - 0,5x + 1 = 0$$
$$-0,016x^3 + 0,12x^2 - 0,5x + 1 = 0$$

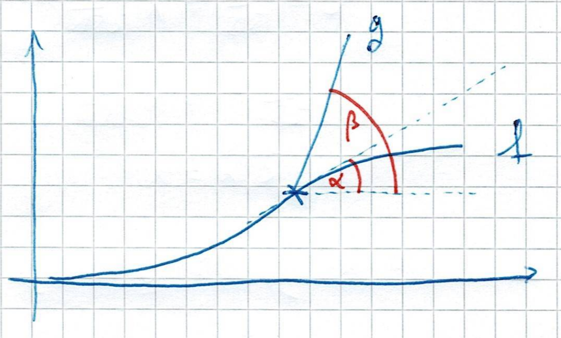
(GTR...)

$$x \approx 3,63$$

y-Wert:
$$g(3,63) = 0,5 \cdot 3,63 - 1 = 0,815$$

Antwort: Der Punkt ist $P(3,63/0,815)$

e)



α: Steigungswinkel von f an der Stelle $x = 3,63$
β: Steigungswinkel von g an der Stelle $x = 3,63$

Der gesuchte Winkel ergibt sich durch die Subtraktion der Winkel.

$\tan \alpha = f'(3,63) = 0,2387$

$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(0,2387) = 13,43°$

$\tan \beta = g'(3,63) = 0,5$

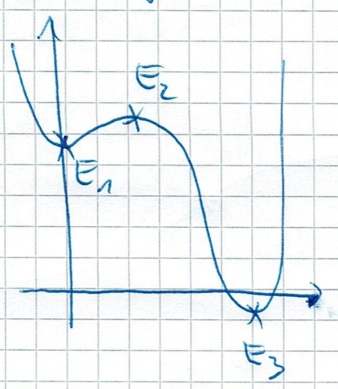
$\Rightarrow \beta = \tan^{-1}(0,5) = 26,57°$

Der gesuchte Winkel heiße γ.

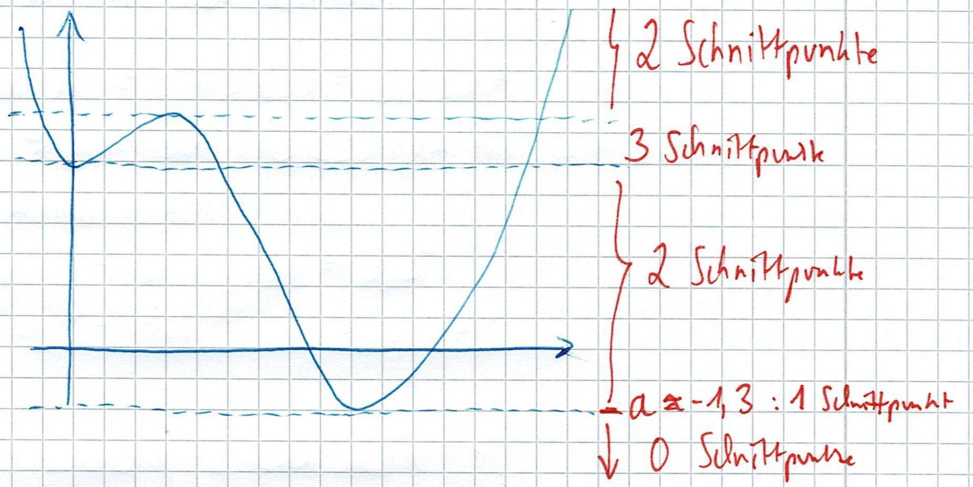
$\gamma = \beta - \alpha = 26,57° - 13,43° = 13,14°$

Antwort: Der gesuchte Winkel hat eine Größe von 13,14°.

4) a) Eine Funktion 4. Grades hat maximal 3 Extremstellen. Im dargestellten Bereich sieht man schon 3. Daher kann es keine weiteren geben.



b) $4 \leq a \leq 5$

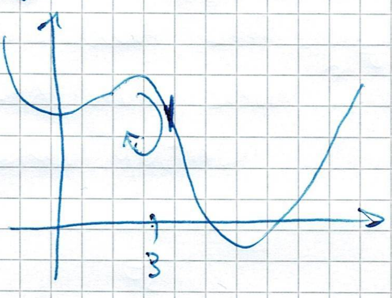


c) $g'(x)$ positiv → g wächst

$g''(x)$ positiv → nach links gekrümmt

$g'(x)$ negativ → g fällt

$g''(x)$ negativ → nach rechts gekrümmt



Eine Betrachtung des Graphen zeigt:

$g'(3) < 0$ (da der Graph fällt)

$g''(3) < 0$ (da der Graph rechtsgekrümmt)

$\Rightarrow g'(3) \cdot g''(3) > 0$, da beide Teile des Terms negativ sind

5)a) $T(-30|5)$
$H(0|20)$
Tiefpunkt in T
waagerecht in H

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$T(-30|5)$ auf f $\Rightarrow$ $f(-30) = 5$
$-27.000a + 900b - 30c + d = 5$

$H(0|20)$ auf f $\Rightarrow$ $f(0) = 20$
$d = 20$

Tiefpunkt T $\Rightarrow$ $f'(-30) = 0$
$2700a - 60b + c = 0$

waagerecht in H $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$
$c = 0$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} \text{I.} & -27.000a + 900b - 30c + d = 5 \\ \text{II.} & d = 20 \\ \text{III.} & 2700a - 60b + c = 0 \\ \text{IV.} & c = 0 \end{array}$$

Wir setzen II und IV in I und III ein:

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & -27.000a + 900b + 20 = 5 \\ \text{III.} & 2700a - 60b = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{I.} & -27.000a + 900b = -15 \\ \text{III.} & 2700a - 60b = 0 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} -27.000 & 900 & -1{,}5 \\ 2700 & -60 & 0 \end{array}\right)$$

(GTR...)

$a = -\frac{1}{900}$

$b = -\frac{1}{20} \quad \Rightarrow f(x) = -\frac{1}{900}x^3 - \frac{1}{20}x^2 + 20$

Überprüfung der hinr. Bed.:

$f'(x) = 0$ und $f''(x) > 0$

$f'(x) = -\frac{1}{300}x^2 - \frac{1}{10}x$

$f''(x) = -\frac{1}{150}x - \frac{1}{10}$

$f''(30) = 0{,}1 > 0$ ✓

b) N.B.: $h'(x) = 0$

$h'(x) = -\frac{3}{225}x^2 - \frac{1}{5}x$

$-\frac{3}{225}x^2 - \frac{1}{5}x = 0$

(GTR...)

$x_1 = -15$

$x_2 = 0$

Wegen der Aufgabenstellung (Aussage in der Klammer) können wir $x_2 = 0$ außer Acht lassen

H.B.: $h'(x) = 0$ und $h''(x) \neq 0$

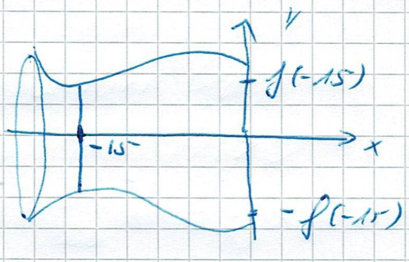
$h''(x) = -\frac{6}{225}x - \frac{1}{5}$

$h''(-15) = 0{,}2 > 0$

⇒ lok.abs Min. bei $x=-15$

Ränder: können wir wegen der Information in der Klammer außer Acht lassen

Durchmesser:



$$d = 2\cdot f(-15)$$
$$= 2\cdot 2{,}5$$
$$= 5$$

⇒ Der gesuchte Durchmesser ist 5 cm.

c) $g(x) = mx + b$

$$m = \frac{10-20}{0-(-25)} = \frac{-10}{25} = -0{,}4$$

$$\Rightarrow g(x) = -0{,}4x + b$$

H(0|10) auf g ⇒ $g(0) = 10$

$$-0{,}4\cdot 0 + b = 10$$
$$b = 10$$

$$\Rightarrow g(x) = -0{,}4x + 10$$

$$\tan\alpha = g'(x_n)$$

x_n: Nullstelle von g

$$g(x) = 0$$
$$-0{,}4x + 10 = 0$$

$$-0{,}4x = -10$$
$$x = 2{,}5$$

$$\Rightarrow \tan\alpha = k_3'(2{,}5)$$
$$\tan\alpha = -0{,}4$$
$$\alpha = \tan^{-1}(-0{,}4) \approx -21{,}8$$

Da die Grade fällt erhalten wir einen negativen Winkel.
Der Winkel ist 21,8° groß.