LÖSUNGEN (Hilfsmittelfreier Teil)

1a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -z = -1$

$z = 1$

$\Rightarrow -y + 2 = 0$

$y = 2$

$\Rightarrow x + 2 + 1 = 4$

$x = 1$

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 2 & 2 & 11 \\ 1 & -1 & -2 & -7 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & 3 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot\mathrm{II}+\mathrm{III} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow z = 3$

$\Rightarrow -y - 3 = -5$

$-y = -2$

$y = 2$

$\Rightarrow x + 2 + 3 = 6$

$x = 1$

c)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 2 \cdot \underline{\mathrm{I}} - \underline{\mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{I}} - \underline{\underline{\mathrm{III}}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 3 \cdot \underline{\mathrm{III}} + \underline{\mathrm{II}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & -9 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 9z = -9$

$z = -1$

$\Rightarrow 3y - 3 = 3$

$3y = 6$

$y = 2$

$\Rightarrow x + 2 - 1 = 2$

$x + 1 = 2$

$x = 1$

d)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \underline{\mathrm{I}} - \underline{\mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{I}} - \underline{\underline{\mathrm{III}}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 2 \cdot \underline{\mathrm{III}} + \underline{\mathrm{II}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow -2z = -4$

$z = 2$

$\Rightarrow 2y = -2$

$y = -1$

$\Rightarrow x - 1 + 2 = 2$

$x + 1 = 2$

$x = 1$

e) $$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \underline{\mathrm{I} - \mathrm{II}} \\ \underline{\mathrm{I} + \mathrm{III}} \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \end{array}\right) 3 \cdot \mathrm{II} + \underline{\mathrm{III}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & 8 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 8z = 8$

$z = 1$

$\Rightarrow -y + 2 = 1$

$-y = -1$

$y = 1$

$\Rightarrow x + 1 + 1 = 3$

$x = 1$

f) $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & -5 \end{array}\right)$ I − II

$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right)$

$\Rightarrow 3z = 9$

$z = 3$

$\Rightarrow x + 3 = 4$

$x = 1$

2) Wir setzen $x = 1$, $y = 1$ und $z = 1$ in das Gleichungssystem ein:

I. $1 + 1 + 1 = 3$ ✓

II. $1 + a + 2 = 7$

III. $1 - 3 + a = 2$

Aus II folgt: $1 + a + 2 = 7$

$a + 3 = 7$

$a = 4$

Aus III folgt: $1 - 3 + a = 2$

$-2 + a = 2$

$a = 4$

$\Rightarrow a = 4$

3) Wir setzen $x = 1$, $y = 1$ und $z = 1$ in das Gleichungssystem ein:

I. $1 + 1 + 1 = 3$ ✓

II. $b + 1 + a = 5$

III. $1 + 2 + a = 6$

Aus III folgt: $1+2+a=6$

$$3+a=6$$

$$\underline{a=3}$$

Das setzen wir in II ein:

$$b+1+a=5$$

$$b+1+3=5$$

$$b+4=5$$

$$\underline{b=1}$$

4 a) 4

b) 3

c) 2

d) f'' ist von 2. Grad

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+\ldots$ Grad 4

$f'(x)=4ax^3+3bx^2+\ldots$ Grad 3

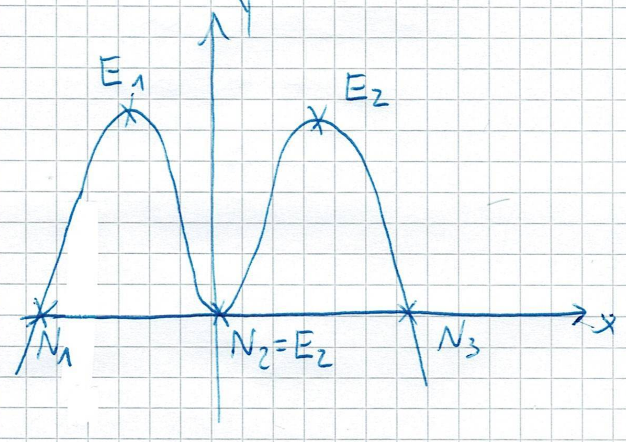
$f''(x)=12ax^2+6bx+\ldots$ Grad 2

e) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

Bei ganzrat. Funktionen, deren größter Exponent gerade ist, müssen die beiden Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ bzw. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ übereinstimmen.

5) a) 3 Nullstellen weisen auf eine ganzrat. Funktion von mind. Grad 3 hin.
3 Extremstellen allerdings verlangen eine ganzrat. Funktion von mind. Grad 4
$\Rightarrow$ Grad 4

b)



6) a) 2

b) 4

c) 3 Ein Sattelpunkt steht für 2 Extremstellen.

7) Kubische Funktion:

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

A(0|0) auf f $\Rightarrow$ $f(0) = 0$
$d = 0$

in $x = 0$ Steigung 2 $\Rightarrow$ $f'(0) = 2$
$c = 2$

$B(1|1)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 1$

$a + b + c + d = 1$

$C(2|4)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 4$

$8a + 4b + 2c + d = 4$

$\Rightarrow$ I. $d = 0$

II. $c = 2$

III. $a + b + c + d = 1$

IV. $8a + 4b + 2c + d = 4$

Wir setzen die Information von I und II in III und IV ein

III. $a + b + 2 = 1 \quad |-2$

IV. $8a + 4b + 2 \cdot 2 = 4 \quad |-4$

III. $a + b = -1$

IV. $8a + 4b = 0$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 8 & 4 & 0 \end{array}\right) \; 8 \cdot \text{I} - \text{II}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & -8 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow 4b = -8$

$b = -2$

$\Rightarrow a - 2 = -1$

$a = 1$

$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x^2 + 2x$

Es wurde kein Punkt verwendet, beim dem eine hinreichende Bedingung eine Rolle spielen würde

$\Rightarrow$ Wir müssen keine hinr. Bed. überprüfen

8) a) x_1: Nullstelle

x_2: Extremstelle (Hochpunkt)

x_3: Wendestelle

x_4: Sattelpunkt und Wendestelle

x_5: Wendestelle

x_6: Extremstelle (Tiefpunkt) und Nullstelle

b) Wir haben 2 Extremstellen und einen Sattelpunkt. Der Sattelpunkt zählt wie 2 Extremstellen

$\rightarrow$ sozusagen 4 Extremstellen

$\rightarrow$ Grad mindestens 5

Das wird von den 3 Wendestellen bestätigt.

9) Die dargestellte Funktion ist $g(x) = (x-1)^2+1$.

f kann es nicht sein. Es gilt $f(1) = 1^2+2 = 3$

$\Rightarrow A(1|3)$ liegt auf dem Graphen von f

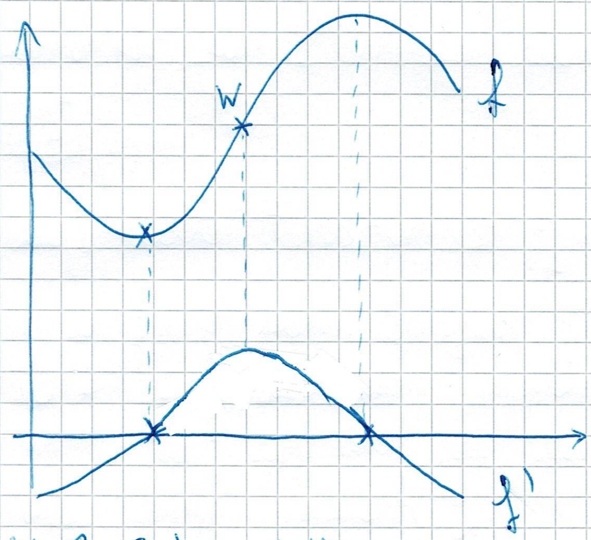
$A(1|3)$ liegt aber nicht auf dem dargestellten Graphen ↯

h kann es nicht sein. Es gilt
$h(-1) = (-1)^3 - 2\cdot(-1)^2 + 2 = -1 - 2\cdot 1 + 2 = -1$
$\Rightarrow$ B(-1/-1) liegt auf dem Graphen von h
B(-1/-1) liegt aber nicht auf dem
dargestellten Graphen $\quad ε$

10) a) Es gilt:
Extremstellen von f sind Nullstellen von f'.
Wenn f wächst, so ist f' positiv.
Wenn f fällt, so ist f' negativ.
Die Stellen, wo f am stärksten wächst, sind
Hochpunkte von f'.
Die Stellen von f, wo es am stärksten fällt, sind
Tiefpunkte von f'.

f	N	E	W		
f'		N	E	W	
f''			N	E	W

N : Nullstelle
E : Extremstelle
W : Wendestelle



b) Es gibt 2 Extremstellen.