5) a) ① Temperatur 1900

$$f(0) = 2{,}8 \cdot e^0 - 0{,}03 \cdot 0 + 11{,}1$$
$$= 2{,}8 + 11{,}1$$
$$= 13{,}9$$

Es sind 13,9 °C.

② gesucht: Minimum

$$f'(t) = 0{,}0224\, e^{0{,}008t} - 0{,}03$$
$$f''(t) = 0{,}0001792 \cdot e^{0{,}008t}$$

N.B.: $f'(x) = 0$

$$0{,}0224\, e^{0{,}008t} - 0{,}03 = 0$$
$$0{,}0224\, e^{0{,}008t} = 0{,}03$$

(GTR...)

$$t = 36{,}517$$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f''(36{,}517) = 0{,}0001792 \cdot e^{0{,}008 \cdot 36{,}517} > 0$$
$$\Rightarrow \text{lok. Min. bei } x = 36{,}517$$

Ränder:

$$f(0) = 13{,}9$$
$$f(36{,}517) = 13{,}754$$
$$f(200) = 18{,}97$$

Die niedrigste D.temp. liegt im Jahre ≈ 1936 mit 13,754 °C.

(III) Überschreiten von 16°C

$f(x) = 16$

$2{,}8 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1 = 16$

(GTR ...)

$t = 152{,}3$

Es ist im Jahre 2052 der Fall.

(IV) Änderungsrate 2000

gesucht: $f'(100)$

$f'(100) = +0{,}01985$ grad Cel./Jahr

(V) Mittelwert

$$m = \frac{1}{200} \cdot \int_0^{200} f(x)\,dx$$

gesucht: Stammfunktion

$$\int_a^b 2{,}8 \cdot e^{0{,}008t} - 0{,}03t + 11{,}1 \; dx$$

$$= \left[\frac{2{,}8}{0{,}008} e^{0{,}008t} - \frac{0{,}03}{2} t^2 + 11{,}1t\right]_a^b$$

$$= \left[350 e^{0{,}008t} - 0{,}0\cancel{2}15 t^2 + 11{,}1t\right]_a^b$$

$$\Rightarrow F(t) = 350 e^{0{,}008t} - 0{,}015 t^2 + 11{,}1t$$

$$m = \frac{1}{200} \cdot \int_0^{200} f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{200} \cdot \left[350 e^{0{,}008t} - 0{,}015t^2 + 11{,}1t\right]_0^{200}$$

$= \frac{1}{200} \cdot \left(\left(350 \cdot e^{0,008 \cdot 200} - 0,015 \cdot (200)^2 + 11,1 \cdot 200 \right) - \left(350 \cdot e^0 - 0,015 \cdot 0^2 + 11,1 \cdot 0 \right) \right)$

$= \frac{1}{200} \cdot \left(350 \cdot e^{1,6} - 600 + 2220 - 350 \right)$

$= 15,0178$

Der Mittelwert beträgt ca. 15,02 °C.

b) ① In welchem Intervall von 10 Jahren steigt die Durchschnittstemperatur um 0,5 °C an?

⑪ immer schnellerer Anstieg $\Leftrightarrow f''(x) > 0$

$f''(x) > 0$ bedeutet, dass $f'(x)$ immer größer wird. $f'(x)$ ist aber die Wachstumsgeschwindigkeit

$f''(x) = 0,0001792 \cdot e^{0,008x} > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ✓

c) Ab t_0 verläuft der Temperaturanstieg in Form einer Geraden (Änderungsrate konstant), und zwar als Tangente an den Graphen von f

Wir müssen die Tangente suchen, für die $t(150) = 15,7$ gilt.

Wir stellen zuerst eine Gleichung für alle Tangenten auf:

$f'(t) = 0{,}0224\,e^{0{,}008t} - 0{,}03$

$\Rightarrow t(x) = (0{,}0224\,e^{0{,}008t_0} - 0{,}03)\cdot x + b$

$P(t_0 \mid f(t_0))$ auf $t \Rightarrow t(t_0) = f(t_0)$

$(0{,}0224\,e^{0{,}008t_0} - 0{,}03)\cdot t_0 + b = 2{,}8\,e^{0{,}008t_0} - 0{,}03t_0 + 11{,}1$

$0{,}0224\,e^{0{,}008t_0}\cdot t_0 - \cancel{0{,}03t_0} + b = 2{,}8\,e^{0{,}008t_0} - \cancel{0{,}03t_0} + 11{,}1$

$0{,}0224\,e^{0{,}008t_0}\cdot t_0 + b = 2{,}8\,e^{0{,}008t_0} + 11{,}1$

$b = 2{,}8\,e^{0{,}008t_0} - 0{,}0224\,e^{0{,}008t_0}\cdot t_0 + 11{,}1$

$\Rightarrow t(x) = (0{,}0224\,e^{0{,}008t_0} - 0{,}03)\cdot x + 2{,}8\,e^{0{,}008t_0} - 0{,}0224\,e^{0{,}008t_0}\cdot t_0 + 11{,}1$

Es gilt: $t(150) = 15{,}7$

$\Rightarrow (0{,}0224\cdot e^{0{,}008t_0} - 0{,}03)\cdot 150 + 2{,}8\,e^{0{,}008t_0} - 0{,}0224\cdot e^{0{,}008t_0}\cdot t_0 + 11{,}1 = 15{,}7$

(GTR...)

$t_1 = 122{,}36$

$t_2 = 174{,}08$ (wäre nach 2050 ↯)

$\Rightarrow$ Der spätest mögliche Zeitpunkt wäre nach 122,36 Jahren, also 2022.

d) Erinnerung: begrenztes Wachstum

$$g(x) = a + b \cdot e^{-kx}$$

mit a Grenzwert

a+b Anfangsbestand

I. Grenzwert von 16,8°C

$\Rightarrow g(x) = 16{,}8 + b \cdot e^{-kx}$

II. Anfangswert im Jahre 2020:

$f(120) = 14{,}813$

$\Rightarrow a + b = 14{,}813$

$16{,}8 + b = 14{,}813$

$b = -1{,}987$

$\Rightarrow g(x) = 16{,}8 - 1{,}987 \cdot e^{-kx}$

III. ohne Knick: $f'(120) = g'(0)$

$f'(120) = 0{,}0285$

$g'(x) = +1{,}987k \cdot e^{-kx}$

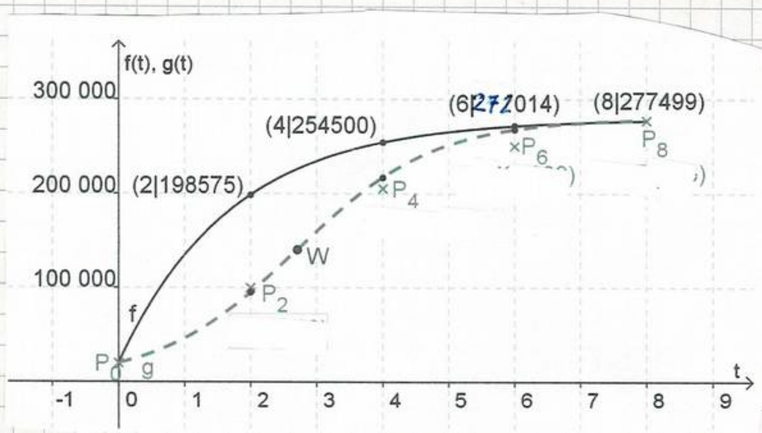
$g'(0) = 1{,}987k \cdot e^{0} = 1{,}987k$

$1{,}987k = 0{,}0285$

$k = 0{,}0143$

$\Rightarrow g(x) = 16{,}8 - 1{,}987 \cdot e^{-0{,}0143x}$

6)a)



durchgezogene Linie: $f(t)$ (Aufgabe a)
gestrichelte Linie: $g(t)$ (Aufgabe b)

größte Abweichung: P_2

$$\frac{f(2) - 100.000}{100.000} \approx 0{,}9858$$

Die Abweichung beträgt ca. 98,58 %.
Der errechnete Wert ist fast doppelt so groß wie der echte. Die Abweichung ist sehr groß & f daher eigentlich für die Beschreibung des Vorgangs ungeeignet.

$$f'(t) = -260.000 \cdot (-0{,}5805) \cdot e^{-0{,}5805t}$$
$$= 150.930 \cdot e^{-0{,}5805t}$$

$f'(t) > 0$ für alle t
$\Rightarrow$ f streng monoton wachsend

b) $$g(0) = \frac{5{,}6 \cdot 10^9}{20.000 + 260.000 \cdot e^0} = \frac{5{,}6 \cdot 10^9}{20.000 + 260.000} = 20.000$$

$$\lim_{t \to \infty} \frac{5{,}6 \cdot 10^9}{20.000 + 260.000 \cdot e^{-0{,}9509 t}} = \frac{5{,}6 \cdot 10^9}{20.000} = 280.000$$

da $\lim\limits_{t \to \infty} 260.000 \cdot e^{-0{,}9509t} = 0$

Auf lange Sicht ist damit zu rechnen, dass 280.000 Server befallen werden.

Der Graph von g ist die gestrichelte Linie im Graphen bei Aufgabe a

c) $g(t) = \frac{5,6 \cdot 10^9}{20.000 + 260.000 \cdot e^{-0,9509t}} = 5,6 \cdot 10^9 \cdot (20.000 + 260.000 e^{-0,9509t})^{-1}$

$$g'(t) = 5,6 \cdot 10^9 \cdot (-1) \cdot (20.000 + 260.000 \cdot e^{-0,9509t})^{-2} \cdot 260.000 \cdot (-0,9509) \cdot e^{-0,9509t}$$

$$= \frac{-5,6 \cdot 10^9 \cdot 260.000 \cdot (-0,9509) \cdot e^{-0,9509t}}{(20.000 + 260.000 \cdot e^{-0,9509})^2}$$

$$= \frac{1,38451 \cdot 10^{15} \cdot e^{-0,9509t}}{(20.000 + 260.000 \cdot e^{-0,9509t})^2}$$

$$g'(0) = \frac{1,38451 \cdot 10^{15} \cdot e^0}{(20.000 + 260.000 \cdot e^0)^2} = \frac{1,38451 \cdot 10^{15}}{(280.000)^2} \approx 17659,57$$

$$\lim_{t \to \infty} g'(t) = \frac{1,38451 \cdot 10^{15} \cdot e^{-0,9509t}}{(20.000 + 260.000 \cdot e^{-0,9509t})^2} = 0$$

(sowohl $e^{-0,9509t}$ oben als auch unten gehen gegen 0. Im Nenner bleiben aber die 20.000 stehen.

Der Grenzwert ist $\frac{0}{20.000} = 0$)

Am Anfang verbreitet sich das Virus mit 17.659,57 Server/Stunde. Auf Dauer kommt die Verbreitung allerdings zum Stillstand.

$g(2,6974) = 140\,000,58 \approx 140.000$

Es sind 140.000 Server. Es handelt sich um den Zeitpunkt des stärksten Wachstums der Virusverbreitung.

Verfahren:

$g''(t)$ und $g'''(t)$ bestimmen

N.B.: $g''(t) = 0$

HB: $g''(t) = 0 \wedge g'''(t) \neq 0$

e) $a = 20.000$

$S = 280.000$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{20.000 \cdot 280.000}{20.000 + (280.000 - 20.000) \cdot e^{-280.000 \cdot k \cdot t}}$$

$$= \frac{5{,}6 \cdot 10^9}{20.000 + 260.000 \cdot e^{-280.000 \cdot k t}}$$

$h(4) = 205.000$

$$\Rightarrow \frac{5{,}6 \cdot 10^9}{20.000 + 260.000 \cdot e^{-280.000 \cdot k \cdot 4}} = 205.000$$

$5{,}6 \cdot 10^9 = 205.000 \cdot (20.000 + 260.000 \cdot e^{-1.120.000 k})$

$5{,}6 \cdot 10^9 = 4{,}1 \cdot 10^9 + 5{,}33 \cdot 10^{10} \cdot e^{-1{,}12 \cdot 10^6 k}$

$1{,}5 \cdot 10^9 = 5{,}33 \cdot 10^{10} \cdot e^{-1{,}12 \cdot 10^6 k}$

$0{,}02814 = e^{-1{,}12 \cdot 10^6 k} \quad | \ln$

$-3{,}57047 = -1{,}12 \cdot 10^6 k$

$-3{,}1879 \cdot 10^{-6} = k$

$-3{,}188 \cdot 10^{-6} = k$

7) a) $f_a(x) = x \cdot e^{-ax}$

$f_a'(x) = e^{-ax} + -a \cdot x \cdot e^{-ax}$

$= (1-ax) \cdot e^{-ax}$

$f_a''(x) = -a \cdot e^{-ax} + (1-ax) \cdot (-a) \cdot e^{-ax}$

$= -a \cdot e^{-ax} + (-a + a^2 x) \cdot e^{-ax}$

$= (-2a + a^2 x) \cdot e^{-ax}$

<u>ES</u>

N.B.: $f_a'(x) = 0$

$(1-ax) \cdot e^{-ax} = 0 \quad | : e^{-ax} \ (\neq 0)$

$1 - ax = 0$

$-ax = -1$

$x = \frac{1}{a} \quad (a > 0)$

H.B.: $f_a'(x) = 0 \wedge f_a''(x) \neq 0$

$f_a''(\frac{1}{a}) = (-2a + a^2 \cdot \frac{1}{a}) \cdot e^{-a \cdot \frac{1}{a}}$

$= (-2a + a) \cdot e^{-1}$

$= -a \cdot e^{-1} < 0$

$\Rightarrow$ HP bei $x = \frac{1}{a}$

y-Wert:

$f_a(\frac{1}{a}) = \frac{1}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{1}{a}} = \frac{1}{a} \cdot e^{-1} = \frac{1}{ae}$

<u>WS</u>

$f_a'''(x) = a^2 \cdot e^{-ax} + (-2a + a^2 x) \cdot (-a) \cdot e^{-ax}$

$= a^2 \cdot e^{-ax} + (2a^2 - a^3 x) \cdot e^{-ax}$

$= (3a^2 - a^3 x) \cdot e^{-ax}$

N.B.: $f_a''(x) = 0$

$(-2a + a^2x) \cdot e^{-ax} = 0 \quad | : e^{-ax} \ (\neq 0)$

$-2a + a^2x = 0$

$a^2x = 2a \quad | : a^2 \ (a>0)$

$x = \frac{2}{a}$

H.B.: $f_a''(x) = 0 \wedge f_a'''(x) \neq 0$

$f_a'''(\frac{2}{a}) = (3 \cdot a^2 - a^3 \cdot \frac{2}{a}) \cdot e^{-a \cdot \frac{2}{a}}$

$= a^2 \cdot e^{-2} > 0$

$\Rightarrow$ WS bei $x = \frac{2}{a}$

y-Wert: $f_a(\frac{2}{a}) = \frac{2}{a} \cdot e^{-a \cdot \frac{2}{a}} = \frac{2}{a} \cdot e^{-2}$

$\Rightarrow$ HP $(\frac{1}{a} / \frac{1}{ae})$

WP $(\frac{2}{a} / \frac{2}{ae^2})$

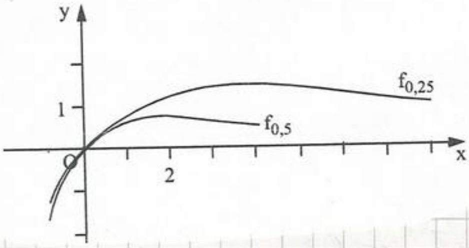
Skizze der Graphen $G_{0,5}$ und $G_{0,25}$:

$f_{0,5}(x) = x\,e^{-0,5x}$

x	−1	0	1	2	3	4
$f_{0,5}$	−1,65	0	0,61	0,74	0,67	0,54

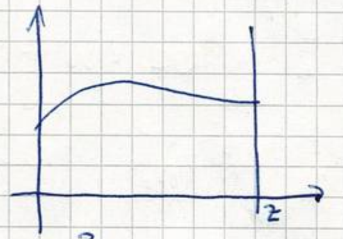
$f_{0,25}(x) = x\,e^{-0,25x}$

x	−1	0	1	2	4	6	8
$f_{0,25}$	−1,28	0	0,78	1,2	1,47	1,34	1,08



b) $f_a'(0) = (1-a\cdot 0)\cdot e^{-a\cdot 0}$
$= 1\cdot e^0$
$= 1$

c) $F'(x) = -\frac{1}{a}\cdot(-a)\cdot e^{-ax}\cdot(x+\frac{1}{a}) + \frac{-1}{a}\cdot e^{-ax}\cdot 1$
$= e^{-ax}(x+\frac{1}{a}) + \frac{-1}{a}\cdot e^{ax}$
$= e^{-ax}(x+\frac{1}{a}-\frac{1}{a})$
$= e^{ax}\cdot x$



$A(z) = \int_0^z f(x)\,dx$
$= \int_0^z x e^{-ax}\,dx$
$= \left[-\frac{1}{a}e^{-ax}\cdot(x+\frac{1}{a})\right]_0^z$
$= -\frac{1}{a}\cdot e^{-az}\cdot(z+\frac{1}{a}) - (-\frac{1}{a}\cdot e^{-a\cdot 0}\cdot(0+\frac{1}{a}))$
$= -\frac{1}{a}\cdot e^{-az}\cdot z - \frac{1}{a^2}e^{-az} - (-\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{a})$
$= -\frac{1}{a}e^{-az}\cdot z - \frac{1}{a^2}\cdot e^{-az} + \frac{1}{a^2}$

$\lim_{z\to\infty} A(z) = \frac{1}{a^2}$ (da $\lim_{z\to\infty} e^{-az} = 0$)