LÖSUNGEN
(Teil mit Hilfsmitteln)

1a) allg. Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$A(-2|-5)$ auf $f \Rightarrow f(-2) = -5$
$4a - 2b + c = -5$

$B(1|4)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 4$
$a + b + c = 4$

$C(3|20)$ auf $f \Rightarrow f(3) = 20$
$9a + 3b + c = 20$

I. $4a - 2b + c = -5$
II. $a + b + c = 4$
III. $9a + 3b + c = 20$

Umformen von II: $c = 4 - a - b$

Einsetzen in I und III:
I. $4a - 2b + 4 - a - b = -5$
III. $9a + 3b + 4 - a - b = 20$

I. $3a - 3b = -9$
III. $8a + 2b = 16$

Umformen von I: $3a - 3b = -9$
$3a = -9 + 3b \quad | :3$
$a = -3 + b$

Einsetzen in III: $8\cdot(-3+b)+2b=16$

$-24+8b+2b=16$

$-24+10b=16 \quad |+24$

$10b=40 \quad |:10$

$b=4$

$\Rightarrow a=-3+4=1$

$\Rightarrow c=4-1-4=-1$

$\Rightarrow f(x)=x^2+4x-1$

b) y-Achse: $f(0)=-1$

$\Rightarrow S_y\,(0|-1)$

x-Achse: $f(x)=0$

$x^2+4x-1=0$

$x=-2\pm\sqrt{4+1}$

$x=-2\pm\sqrt{5}$

$x_1\approx 0{,}24$

$x_2\approx -4{,}24$

$\Rightarrow N_1\,(0{,}24/0)$

$N_2\,(-4{,}24/0)$

c) $y=f(5)$

$y=5^2+4\cdot 5-1$

$y=25+20-1$

$y=44$

d) $f(x) = 10$

$x^2 + 4x - 1 = 10 \quad | -10$

$x^2 + 4x - 11 = 0$

$x = -2 \pm \sqrt{4 + 11}$

$x = -2 \pm \sqrt{15}$

$x_1 \approx 1{,}87$

$x_2 \approx -5{,}87$

e) $f(x) = x^2 + 4x - 1$

$= (x+2)^2 - 1 - 4$

$= (x+2)^2 - 5$

$\Rightarrow S(-2/-5)$

f) $f(x) = g(x)$

$x^2 + 4x - 1 = x + 1 \quad | -x$

$x^2 + 3x - 1 = 1 \quad | -1$

$x^2 + 3x - 2 = 0$

$x = -1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 + 2}$

$x = -1{,}5 \pm \sqrt{4{,}25}$

$x_1 \approx 0{,}56$

$x_2 \approx -3{,}56$

y-Werte: $g(0{,}56) = 0{,}56 + 1 = 1{,}56$

$g(-3{,}56) = -3{,}56 + 1 = -2{,}56$

$\Rightarrow S_1(0{,}56/1{,}56)$

$S_2(-3{,}56/-2{,}56)$

g) $f(x) = h(x)$

$$x^2 + 4x - 1 = 2x^2 - x + 4 \quad | -x^2$$
$$4x - 1 = x^2 - x + 4 \quad | -4x$$
$$-1 = x^2 - 5x + 4 \quad | +1$$
$$0 = x^2 - 5x + 5$$
$$x = 2{,}5 \pm \sqrt{6{,}25 - 5}$$
$$x = 2{,}5 \pm \sqrt{1{,}25}$$
$$x_1 \approx 3{,}62$$
$$x_2 \approx 1{,}38$$

y-Werte: $f(3{,}62) = 3{,}62^2 + 4 \cdot 3{,}62 - 1$
$= 26{,}5844$

$f(1{,}38) = 1{,}38^2 + 4 \cdot 1{,}38 - 1$
$= 6{,}4244$

$\Rightarrow S_1(3{,}62 / 26{,}5844)$
$S_2(1{,}38 / 6{,}4244)$

h) $f(-1) = (-1)^2 + 4 \cdot (-1) - 1$
$= 1 - 4 - 1$
$= -4$

$f(1{,}5) = 1{,}5^2 + 4 \cdot 1{,}5 - 1$
$= 2{,}25 + 6 - 1$
$= 7{,}25$

$\Rightarrow F(-1 / -4)$
$G(1{,}5 / 7{,}25)$

$$m = \frac{7{,}25 - (-4)}{1{,}5 - (-1)} = \frac{11{,}25}{2{,}5} = 4{,}5$$

$\Rightarrow i(x) = 4{,}5x + b$

$F(-1/-4)$ auf $i \Rightarrow i(-1) = -4$

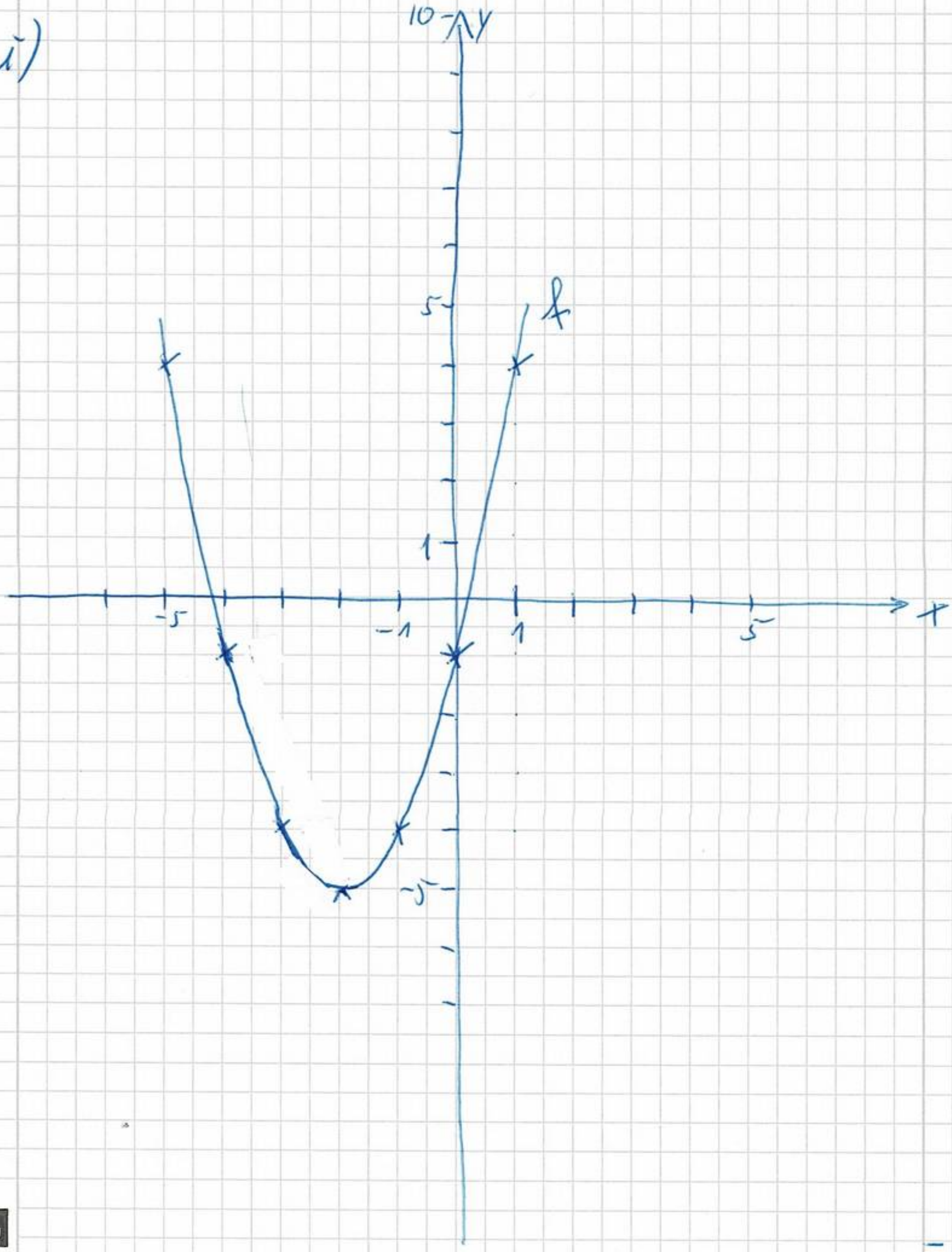
$4{,}5 \cdot (-1) + b = -4$

$-4{,}5 + b = -4 \quad | + 4{,}5$

$b = 0{,}5$

$\Rightarrow i(x) = 4{,}5x + 0{,}5$

i)



j) Scheitelpunkt vorher: $S(-2/-5)$
eine Einheit nach rechts:
$S(-1/-5)$

keine Streckung / Stauchung
$\Rightarrow$ a bleibt gleich

$$\Rightarrow j(x) = 1 \cdot (x+1)^2 - 5$$
$$= (x+1)^2 - 5$$
$$= x^2 + 2x + 1 - 5$$
$$= x^2 + 2x - 4$$

2a) $f(x) = 2x^2 - 2x + 4$
$$= 2 \cdot (x^2 - x + 2)$$
$$= 2\left((x-0{,}5)^2 + 2 - 0{,}25\right)$$
$$= 2\left((x-0{,}5)^2 + 1{,}75\right)$$
$$= 2(x-0{,}5)^2 + 3{,}5$$

$\Rightarrow S(0{,}5/3{,}5)$

b) y-Achse: $f(0) = 4$
$\Rightarrow S_y(0/4)$

x-Achse: $f(x) = 0$
$$2x^2 - 2x + 4 = 0 \quad |:2$$
$$x^2 - x + 2 = 0$$
$$x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 - 2}$$
$$x = 0{,}5 \pm \sqrt{-1{,}75}$$
$\lightning$ keine Nullstellen

c) $y = f(2)$

$y = 2 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4$

$y = 8 - 4 + 4$

$y = 8$

d) $f(x) = 10$

$2x^2 - 2x + 4 = 10 \quad | :2$

$x^2 - x + 2 = 5 \quad | -5$

$x^2 - x - 3 = 0$

$x = 0{,}5 \pm \sqrt{0{,}25 + 3}$

$x = 0{,}5 \pm \sqrt{3{,}25}$

$x_1 \approx 2{,}3$

$x_2 \approx -1{,}3$

e) $f(x) = g(x)$

$2x^2 - 2x + 4 = x + 5 \quad | -x$

$2x^2 - 3x + 4 = 5 \quad | -5$

$2x^2 - 3x - 1 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 1{,}5x - 0{,}5 = 0$

$x = 0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 + 0{,}5}$

$x = 0{,}75 \pm \sqrt{1{,}0625}$

$x_1 \approx 1{,}78$

$x_2 \approx -0{,}28$

y-Werte: $g(1{,}78) = 1{,}78 + 5 = 6{,}78$

$g(-0{,}28) = -0{,}28 + 5 = 4{,}72$

$\Rightarrow S_1(1{,}78 / 6{,}78)$

$S_2(-0{,}28 / 4{,}72)$

f) $f(x) = h(x)$

$2x^2 - 2x + 4 = x^2 + 5 \quad | -x^2$

$x^2 - 2x + 4 = 5 \quad | -5$

$x^2 - 2x - 1 = 0$

$x = 1 \pm \sqrt{1+1}$

$x = 1 \pm \sqrt{2}$

$x_1 \approx 2{,}41$

$x_2 \approx -0{,}41$

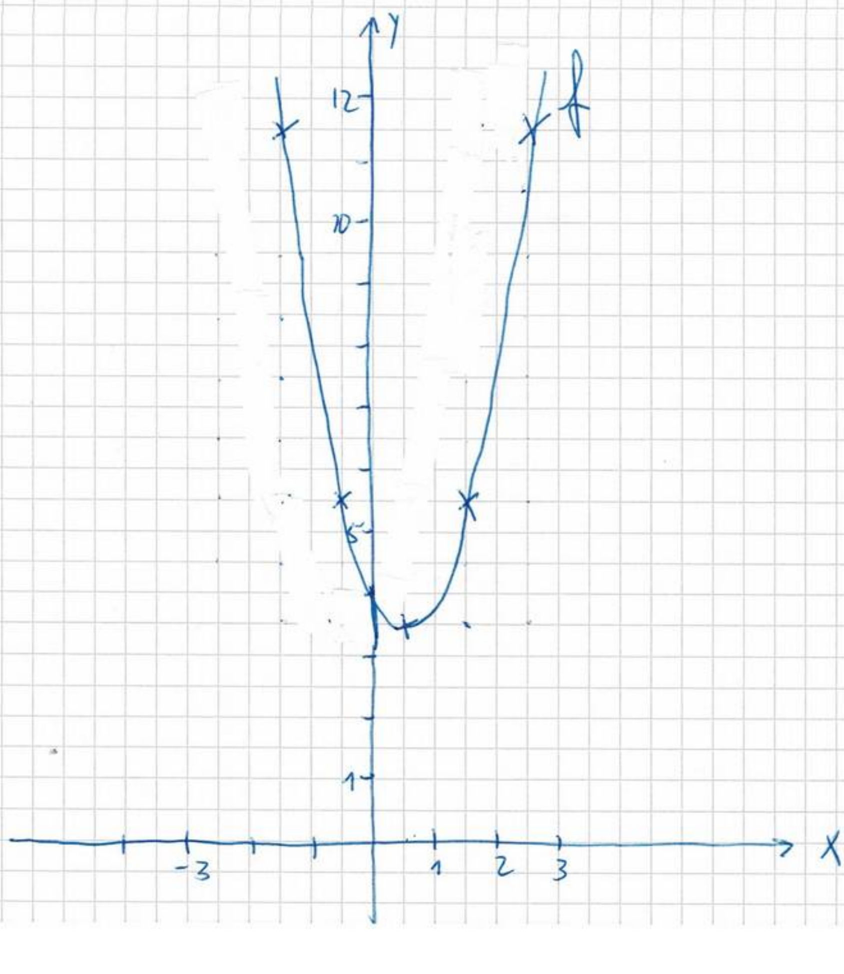
y-Werte: $h(2{,}41) = 2{,}41^2 + 5 = 10{,}8081$

$h(-0{,}41) = (-0{,}41)^2 + 5 = 5{,}1681$

$\Rightarrow S_1(2{,}41 / 10{,}8081)$

$S_2(-0{,}41 / 5{,}1681)$

g)



h) alter Scheitelpunkt: $S(0{,}5/3{,}5)$
3 Einh. nach unten & 1 nach links:
$S(-0{,}5/0{,}5)$

Keine Streckung/Stauchung: a bleibt gleich

$\Rightarrow i(x) = 2(x-0{,}5)^2 + 0{,}5$
$= 2(x^2 - x + 0{,}25) + 0{,}5$
$= 2x^2 - 2x + 0{,}5 + 0{,}5$
$= 2x^2 - 2x + 1$

3a) erkennbare Punkte:
$A(1/2)$
$B(4/1)$

$m = \frac{1-2}{4-1} = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x + b$

$A(1/2)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 2$
$-\frac{1}{3} \cdot 1 + b = 2$
$-\frac{1}{3} + b = 2 \quad | + \frac{1}{3}$
$b = \frac{7}{3}$

$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$

b) y-Achse: $f(0)=\frac{7}{3} \Rightarrow S_y(0/\frac{7}{3})$

x-Achse: $f(x)=0$

$$-\frac{1}{3}x+\frac{7}{3}=0 \quad |-\frac{7}{3}$$

$$-\frac{1}{3}x=-\frac{7}{3} \quad |\cdot(-3)$$

$$x=7$$

$\Rightarrow N(7/0)$

c) g parallel zu f $\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x+b$

A(1|1) auf g $\Rightarrow g(1)=1$

$$-\frac{1}{3}\cdot 1+b=1$$

$$-\frac{1}{3}+b=1 \quad |+\frac{1}{3}$$

$$b=\frac{4}{3}$$

$\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{4}{3}$

d) $h(x)=mx+b$

$$m\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=-1 \quad |\cdot(-3)$$

$$m=3$$

$\Rightarrow h(x)=3x+b$

A(1|1) auf h $\Rightarrow h(1)=1$

$$3\cdot 1+b=1$$

$$3+b=1 \quad |-3$$

$$b=-2$$

$\Rightarrow h(x)=3x-2$

e) $f(x) = h(x)$

$-\frac{1}{3}x + \frac{7}{3} = 3x - 2 \quad | + \frac{1}{3}x$

$\frac{7}{3} = \frac{10}{3}x - 2 \quad | + 2$

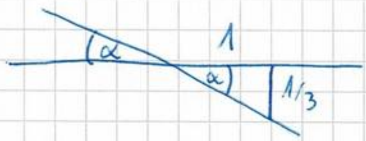
$\frac{13}{3} = \frac{10}{3}x \quad | \cdot 3$

$13 = 10x \quad | : 10$

$1{,}3 = x$

y-Wert: $h(1{,}3) = 3 \cdot 1{,}3 - 2 = 1{,}9$

$\Rightarrow S(1{,}3 / 1{,}9)$

f) 

$\tan \alpha = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \underline{18{,}43°}$

4a) allg. Form: $f(x) = ax^2 + bx + c$

$A(-1/10)$ auf $f \Rightarrow f(-1) = 10$

$a - b + c = 10$

$B(2/1)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 1$

$4a + 2b + c = 1$

$C(4/15)$ auf $f \Rightarrow f(4) = 15$

$16a + 4b + c = 15$

I. $a - b + c = 10$

II. $4a + 2b + c = 1$

III. $16a + 4b + c = 15$

Umformen von I: $c = 10 - a + b$

Einsetzen in II und III:

II. $4a + 2b + 10 - a + b = 1$
III. $16a + 4b + 10 - a + b = 15$

II. $3a + 3b = -9$
III. $15a + 5b = 5$

Umformen von II: $3a + 3b = -9 \quad | :3$

$a + b = -3 \quad | -a$

$b = -3 - a$

Einsetzen in III:

III $15a + 5 \cdot (-3 - a) = 5$

$15a - 15 - 5a = 5$

$10a - 15 = 5 \quad | +15$

$10a = 20 \quad | :10$

$a = 2$

$\Rightarrow b = -3 - 2 = -5$

$\Rightarrow c = 10 - 2 - 5 = 3$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

b) y-Achse: $f(0) = 3 \Rightarrow S_y (0|3)$

x-Achse: $f(x) = 0$

$2x^2 - 5x + 3 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 2{,}5x + 1{,}5 = 0$

$x = 1{,}25 \pm \sqrt{1{,}5625 - 1{,}5}$

$x = 1{,}25 \pm \sqrt{0{,}0625}$

$x = 1{,}25 \pm 0{,}25$

$x_1 = 1$

$x_2 = 1{,}5$

$\Rightarrow N_1(1/0)$

$N_2(1{,}5/0)$

c) $f(x) = 2x^2 - 5x + 3$

$= 2(x^2 - 2{,}5x + 1{,}5)$

$= 2((x-1{,}25)^2 + 1{,}5 - 1{,}5625)$

$= 2((x-1{,}25)^2 - 0{,}0625)$

$= 2(x-1{,}25)^2 - 0{,}125$

$\Rightarrow S(1{,}25/-0{,}125)$

d) $f(x) = g(x)$

$2x^2 - 5x + 3 = 3x + 2 \quad | -3x$

$2x^2 - 8x + 3 = 2 \quad | -2$

$2x^2 - 8x + 1 = 0 \quad | :2$

$x^2 - 4x + 0{,}5 = 0$

$x = 2 \pm \sqrt{4 - 0{,}5}$

$x = 2 \pm \sqrt{3{,}5}$

$x_1 \approx 3{,}87$

$x_2 \approx 0{,}13$

y-Werte:

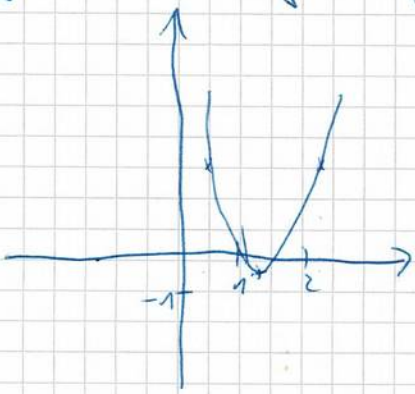
$g(3{,}87) = 3 \cdot 3{,}87 + 2 = 13{,}61$

$g(0{,}13) = 3 \cdot 0{,}13 + 2 = 2{,}39$

$\Rightarrow S_1(3{,}87/13{,}61)$

$S_2(0{,}13/2{,}39)$

e) ungefährer Verlauf des Graphen:



Wir brauchen eine Gerade, die diesen Graphen nicht schneidet

→ z.B. Achsenabschnitt weit im Negativen und dann langsames Wachstum

$\Rightarrow i(x) = 0{,}1\,x - 100$

f) alter Scheitelpunkt:

$S(1{,}25 / -0{,}125)$

3 Einheiten nach links:

$S(-1{,}75 / -0{,}125)$

Keine Stauchung / Streckung: a bleibt gleich

$\Rightarrow h(x) = 2(x + 1{,}75)^2 - 0{,}125$

$= 2(x^2 + 3{,}5x + 3{,}0625) - 0{,}125$

$= 2x^2 + 7x + 6{,}125 - 0{,}125$

$= 2x^2 + 7x + 6$

5a) $f(x) = -0{,}5x + 80$

b) $f(x) = 40$

$-0{,}5x + 80 = 40 \quad |-80$

$-0{,}5x = -40 \quad |:(-0{,}5)$

$x = 80$

$\Rightarrow$ nach 80 min

c) $f(x) = 0$

$-0{,}5x + 80 = 0 \quad |-80$

$-0{,}5x = -80 \quad |:(-0{,}5)$

$x = 160$

$\Rightarrow$ nach 160 min

d) $f(x) = -0{,}5x + 80$

$g(x) = -0{,}7x + 120$

$f(x) = g(x)$

$-0{,}5x + 80 = -0{,}7x + 120 \quad |-80$

$-0{,}5x = -0{,}7x + 40 \quad |+0{,}7x$

$0{,}2x = 40 \quad |:0{,}2$

$x = 200$

$\Rightarrow$ nach 200 min

e) 15 min — 10 l

1 min — $\frac{2}{3}$ l $\quad$:15

$f(x) = -0{,}5x + 80$

$h(x) = -\frac{2}{3}x + 100$

$f(x) = h(x)$

$-\frac{1}{2}x + 80 = -\frac{2}{3}x + 100 \quad | -80$

$-\frac{1}{2}x = -\frac{2}{3}x + 20 \quad | + \frac{2}{3}x$

$\frac{1}{6}x = 20 \quad | \cdot 6$

$x = 120$

$\Rightarrow$ nach 120 min

6a) $f(0{,}7) = 0 \Rightarrow 0{,}7^2 + 2 \cdot 0{,}7 + a = 0$

$0{,}49 + 1{,}4 + a = 0$

$1{,}89 + a = 0 \quad | -1{,}89$

$a = -1{,}89$

b) $f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + a = 5$

$\Rightarrow a = 5$

c) $f(2) = 0 \Rightarrow 2^2 + a \cdot 2 + b = 0$

$4 + 2a + b = 0$

$2a + b = -4$

$f(3) = 0 \Rightarrow 3^2 + a \cdot 3 + b = 0$

$9 + 3a + b = 0$

$3a + b = -9$

I. $2a + b = -4$

II. $3a + b = -9$

Umformen von I: $b = -4 - 2a$

Einsetzen in II:

$3a - 4 - 2a = -9$

$a - 4 = -9 \quad | +4$

$\underline{a = -5}$

$\Rightarrow b = -4 - 2 \cdot (-5)$

$b = -4 + 10$

$\underline{b = 6}$

7a) $f(x) = -\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x$

$$= -\frac{2}{625} \cdot (x^2 - 50x)$$

$$= -\frac{2}{625} \cdot ((x-25)^2 + 0 - 25^2)$$

$$= -\frac{2}{625} \cdot ((x-25)^2 - 625)$$

$$= -\frac{2}{625}(x-25)^2 + 2$$

$\Rightarrow S(25/2)$

Antwort: Die höchste Höhe liegt bei 2 m.

b) $f(x) = 0$

$$-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x = 0 \quad | \cdot (-625)$$

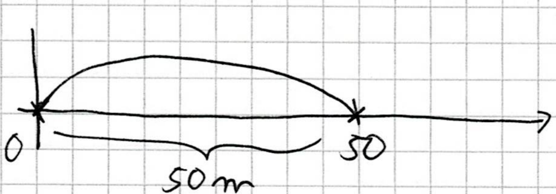
$$2x^2 - 100x = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - 50x = 0$$

$$x \cdot (x - 50) = 0 \quad | \text{Nullprodukt}$$

$$x_1 = 0 \qquad x - 50 = 0$$

$$x_2 = 50$$



Antwort: Der Ball erreicht den Boden wieder nach 50 m.

c) $f(x) = 1$

$$-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x = 1$$

$$-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x - 1 = 0 \quad | \cdot (-625)$$

$$2x^2 - 100x + 625 = 0 \quad | : 2$$

$$x^2 - 50x + 312{,}5 = 0$$

$$x = 25 \pm \sqrt{625 - 312{,}5}$$

$$= 25 \pm \sqrt{312{,}5}$$

$$= 25 \pm 17{,}67...$$

$$x_1 = 7{,}32$$

$$x_2 = 42{,}68$$

Antwort: Die Stellen sind $P_2(42{,}68|1)$ und $P_1(7{,}32|1)$.

d) $P(0|0)$

$A(30|3)$

$\Rightarrow g(x) = a \cdot (x-30)^2 + 3$

$P(0|0)$ auf $g \Rightarrow g(0) = 0$

$$a \cdot (0-30)^2 + 3 = 0$$

$$900a + 3 = 0$$

$$900a = -3$$

$$a = -\frac{3}{900}$$

$$a = -\frac{1}{300}$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{300}(x-30)^2 + 3$$

$$= -\frac{1}{300}(x^2 - 60x + 900) + 3$$

$$= -\frac{1}{300}x^2 + \frac{1}{5}x$$

$$\Rightarrow g(x) = -\frac{1}{300}x^2 + \frac{1}{5}x$$

e) $f(x) = g(x)$

$$-\frac{2}{625}x^2 + \frac{4}{25}x = -\frac{1}{300}x^2 + \frac{1}{5}x \quad \Big| + \frac{1}{300}x^2$$

$$\frac{1}{7500}x^2 + \frac{4}{25}x = \frac{1}{5}x \quad \Big| - \frac{1}{5}x$$

$$\frac{1}{7500}x^2 - \frac{1}{25}x = 0 \quad \Big| \cdot 7500$$

$$x^2 - 300x = 0$$

$$x \cdot (x - 300) = 0 \quad \text{| Nullprodukt}$$

$$x_1 = 0 \qquad x - 300 = 0$$

$$x_2 = 300$$

$$f(0) = 0$$

$$f(300) = -\frac{2}{625} \cdot 300^2 + \frac{4}{25} \cdot 300 = -240$$

$$\Rightarrow S_1(0|0)$$

$$S_2(300|-240)$$

Antwort: Mathematisch gibt es 2 Schnittpunkte ($S_1(0|0)$ und $S_2(300|-240)$). Der zweite liegt aber unter dem Boden.
In der Realität gibt es daher nur einen (S_1).