# LÖSUNGEN (Nr. 1)

1a) $f(2) = 2^3 - 11 \cdot 2^2 + 28 \cdot 2 = 20$

Die Veränderungsrate beträgt 20.000 €/h.

---

1b) Gesucht ist der x-Wert, für den $f(x) = 100$.

$$x^3 - 11x^2 + 28x = 100$$

$0{,}13 \cdot 60 = 7{,}8 \approx 8$

Taschenrechner → $x = 9{,}13$

A: Der gesuchte Zeitpunkt liegt bei ca. 19:08 Uhr.

---

1c) Gesucht sind die Nullstellen:

$$x^3 - 11x^2 + 28x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 11x + 28) = 0$$

$x_1 = 0$ und $x^2 - 11x + 28 = 0$

$$x = 5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25 - 28}$$

$$x = 5{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}$$

$$x = 5{,}5 \pm 1{,}5$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 7$$

A.: Die gesuchten Zeitpunkte sind 10 Uhr, 14 Uhr und 17 Uhr.

---

1d) $f(0) = 0$

$f(1) = 18 > 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = -10 < 0$

$f(7) = 0$

$f(10) = 180 > 0$

Also: für $0 < x < 4$ : $f(x) > 0$
für $4 < x < 7$ : $f(x) < 0$
für $7 < x < 10$ : $f(x) > 0$

A.: Von 10 Uhr bis 14 Uhr fließt Wasser zu,
von 14 Uhr bis 17 Uhr fließt es ab
und ab 17 Uhr fließt es wieder zu.

---

1e) Gesucht wird das absolute Minimum.

N.B.: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 22x + 28$

$3x^2 - 22x + 28 = 0$

$x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{28}{3} = 0$

$x = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{9} - \frac{28}{3}}$

$x = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{37}{9}}$

$x_1 = 5,694$
$x_2 = 1,639$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$f''(x) = 6x - 22$

$f''(5,694) = 6 \cdot 5,694 - 22 > 0$
$\Rightarrow$ lokales Minimum
$f''(1,639) = 6 \cdot 1,639 - 22 < 0$
$\Rightarrow$ lokales Maximum

Ränder: $f(0) = 0$
$f(5,694) = -12,597$
$f(10) = 180$

$5,694 \hat{=} 5\,h$ und $0,694\,h$
$0,694 \cdot 60 = 41,64$ min
$0,64 \cdot 60 = 38,4$ sek

A.: Die höchste Abflussrate lag um 15:41 Uhr und ca. 38 Sek. vor. Sie betrug 12.597 l/h.

---

1 f) Gesucht wird das absolute Maximum.

N.B.: $f'(x) = 0$
$\Rightarrow x = 1,639$ (siehe 1e)
H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$
$\Rightarrow f''(1,639) < 0$ (siehe 1e)

Ränder: $f(0)=0$

$f(1{,}639)=20{,}745$

$f(10)=180$

Antwort: Die höchste Zuflussrate lag um 20 Uhr (ganz am Ende) vor mit 180.000 $\ell/h$.

---

1g) Gesucht ist die Extremstelle der Ableitung, also die Wendestelle.

N.B.: $f''(x)=0$

$6x-22=0$

$6x=22$

$x=\frac{11}{3}$

H.B.: $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$

$f'''(x)=6$

$f'''(\frac{11}{3})=6\neq 0$

Ränder: $f'(x)=3x^2-22x+28$

$f'(0)=28$

$f'(\frac{11}{3})=-12{,}\overline{3}$  $\frac{11}{3}=3{,}\overline{6}$

$f'(10)=108$

A.: Die stärkste Vergrößerung der Veränderungsrate liegt um 20 Uhr (ganz am Ende) vor mit 108.000 $\ell/h^2$.

Die stärkste Verminderung der Veränderungsrate liegt um 13:40 Uhr z mit einer Abnahme um 12.300 $\frac{l}{h^2}$.

---

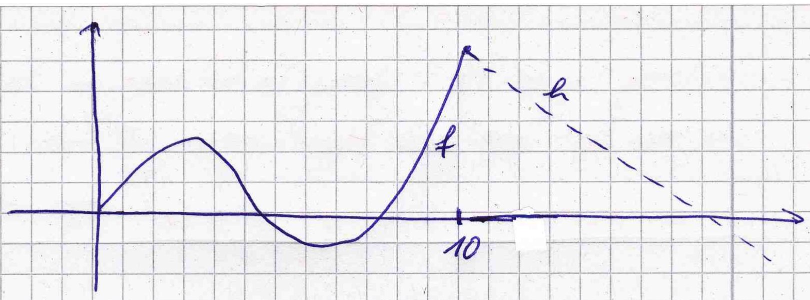
1h) Zur Erinnerung:
In den ersten 4 h läuft Wasser hinein mit einer maximalen Zulaufrate von 20.745 l/h. Dann läuft 3 h lang Wasser aus mit einer maximalen Ablaufrate von 12.597 l/h. Es läuft also weniger Wasser wieder ab als in den ersten 4 h zugelaufen ist. Um 17 Uhr muss mehr Wasser im Stausee sein als um 10 Uhr. Ab 17 Uhr läuft mit rapide größer werdender Geschwindigkeit wieder Wasser hinein. Das Maximum nun beträgt 180.000 l/h. Es fließt also in den letzten 3 h mehr Wasser hinein als in den 3 h davor ausgelaufen ist.

Ergebnis: geringste Menge 10 Uhr
größte Menge 20 Uhr

---

1i) Wir suchen die Gleichung von h.
Wir haben zwei Informationen über h:

① Sie setzt da an, wo f um 20 Uhr aufhört. Die beiden Graphen müssen sich berühren um 20 Uhr (also x=10).




Also haben f und h einen Punkt gemeinsam: $P_1(10/y)$

Für y gilt: $y = h(10)$ und $y = f(10)$. Das Letztgenannte können wir ausrechnen:

$y = 180. \Rightarrow P_1(10/180)$

② Nach 8 h wird wieder der Wert 0 erreicht, also eine Nullstelle.

$\Rightarrow P_2(18/0)$

Wenn man zwei Punkte hat, kann man dazu eine lineare Funktion aufstellen:

$h(x) = mx + b$

$m = \frac{180-0}{10-18} = \frac{180}{-8} = -22{,}5$

$\Rightarrow h(x) = -22{,}5x + b$

$P_1(10/180)$ auf $h \Rightarrow h(10) = 180$

$\Rightarrow -22{,}5 \cdot 10 + b = 180$

$-225 + b = 180$

$b = 405$

$\Rightarrow h(x) = -22{,}5x + 405$

# Lösungen (Nr. 2)

2 a) nach Süden:

Gesucht wird der Schnittpunkt mit der y-Achse. Also:

$$f(0) = 0^3 - 11 \cdot 0^2 + 34 \cdot 0 - 24 = 24$$

A: Man muss 24 km nach Süden gehen

nach Osten:

Gesucht wird die erste Nullstelle (= Schnittpunkt mit der x-Achse). Also:

$$f(x) = 0$$

$$x^3 - 11x^2 + 34x - 24 = 0$$

geratene NS: $x_1 = 1$

(denn $1^3 - 11 \cdot 1^2 + 34 \cdot 1 - 24 = 0$ ✓)

$$(x^3 - 11x^2 + 34x - 24) : (x-1) = x^2 - 10x + 24$$

$$\begin{array}{l} -(x^3 - x^2) \\ \hline \quad -10x^2 + 34x \\ \quad -(-10x^2 + 10x) \\ \hline \qquad 24x - 24 \\ \qquad -(24x - 24) \\ \hline \qquad\qquad 0 \end{array}$$

$$x^2 - 10x + 24 = 0$$

$$x = 5 \pm \sqrt{25 - 24}$$

$$x = 5 \pm 1$$

$$x_2 = 4$$

$$x_3 = 6$$

Die gesuchte Nullstelle ist $x_1 = 1$.

A: Man muss 1 km nach Osten gehen.

---

2b) ① gesucht: absolutes Maximum für

$0 \leq x \leq 6{,}5$

N.B.: $f'(x) = 0$

$f'(x) = 3x^2 - 22x + 34$

$3x^2 - 22x + 34 = 0$

$x^2 - \frac{22}{3}x + \frac{34}{3} = 0$

$x = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{121}{9} - \frac{34}{3}}$

$x = \frac{11}{3} \pm \sqrt{\frac{19}{9}}$

$x_1 \approx 5{,}12$

$x_2 \approx 2{,}21$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$f''(x) = 6x - 22$

$f''(5{,}12) = 6 \cdot 5{,}12 - 22 > 0$

$\Rightarrow$ lokales Minimum

$f''(2{,}21) = 6 \cdot 2{,}21 - 22 < 0$

$\Rightarrow$ lokales Maximum

Ränder:

$f(0) = -24$

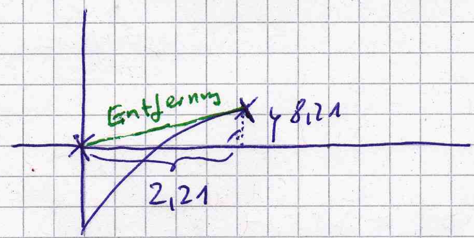
$f(2{,}21) \approx 8{,}21$

$f(6{,}5) = 6{,}875$

A.: Der Punkt hat die Koordinaten P (2,21/8,21). Er ist 8,21 km von X entfernt.

---

2b) ⓘⓘ




Wir verwenden den Satz von Pythagoras:

$(\text{Entfernung})^2 = 2{,}21^2 + 8{,}21^2$

$\text{Ent.}^2 = 72{,}2882$

$\text{Ent.} \approx 8{,}50 \text{ km}$

---

2b) ⓘⓘⓘ

$8{,}5 : 3 = 2{,}8\overline{3} \leftarrow 2{,}8\overline{3}$ Stunden

$0{,}8\overline{3} \cdot 60 = 50$

Es sind 2 Stunden und 50 Minuten.

---

2c) ①

Schnittpunkte rechnet man aus, indem man die Gleichungen gleichsetzt

$$x^3 - 11x^2 + 34x - 24 = 6x - 24 \quad | +24$$
$$x^3 - 11x^2 + 34x = 6x \quad | -6x$$
$$x^3 - 11x^2 + 28x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 11x + 28) = 0$$

$x_1 = 0$ bzw. $x^2 - 11x + 28 = 0$

$$x = 5{,}5 \pm \sqrt{30{,}25 - 28}$$
$$x = 5{,}5 \pm \sqrt{2{,}25}$$
$$x = 5{,}5 \pm 1{,}5$$
$$x_2 = 7$$
$$x_3 = 4$$

$h(0) = -24$ $\quad h(4) = 6 \cdot 4 - 24 = 0$ $\quad h(7) = 6 \cdot 7 - 24 = 18$

Antwort: Die gesuchten Punkte sind $S_1(0/-24)$, $S_2(4/0)$ und $S_3(7/18)$.

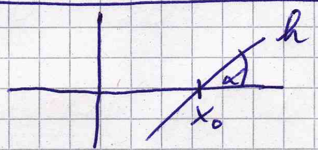
---

2c) II

Gesucht ist die Nullstelle von h. Diese kann man Aufgabe 2c) I entnehmen: N(4/0). Da h eine lineare Funktion ist, kann es nur eine Nullstelle geben.

---

2c III




$h(x) = 6x - 24$
$h'(x) = 6$

$$\tan \alpha = h'(x_0)$$
$$\tan \alpha = 6$$
$$\Rightarrow \alpha = \tan^{-1}(6) \approx 80{,}54°$$

A.: Es sind ca. 80,54°.

# LÖSUNGEN (Nr. 3)

3a) Gesucht werden die Extremstellen

N.B.: $f'(x) = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 24x + 32$$

$$3x^2 - 24x + 32 = 0$$

$$x^2 - 8x + \frac{32}{3} = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - \frac{32}{3}}$$

$$x = 4 \pm \sqrt{\frac{16}{3}}$$

$$x_1 \approx 1{,}69$$

$$x_2 \approx 6{,}31$$

H.B.: $f'(x) = 0$ und $f''(x) \neq 0$

$$f''(x) = 6x - 24$$

$$f''(1{,}69) = 6 \cdot 1{,}69 - 24 < 0$$

$\Rightarrow$ lok. Maximum

$$f''(6{,}31) = 6 \cdot 6{,}31 - 24 > 0$$

$\Rightarrow$ lok. Minimum

Ränder:

$f(0) = 0$

$f(1{,}69) = 24{,}63$

$f(6{,}31) = -24{,}63$ X Minimum

$f(9) = 45$ X Maximum

A.: Die am weitesten nördlich gelegene Stelle ist $P_1(9/45)$ und die am weitesten südliche Stelle $P_2(6{,}31/-24{,}63)$.

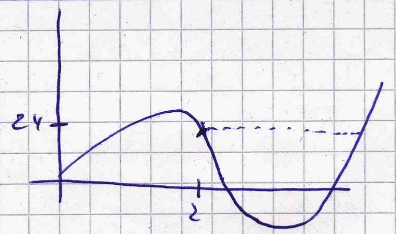
---

3b) Zu zeigen: $f(2)=24$

$f(2) = 2^3 - 12\cdot 2^2 + 32\cdot 2 = 24$ ✓

---

3c)




Gesucht sind Punkte rechts von Tiexdorf, die wieder den y-Wert 24 haben.

$x^3 - 12x^2 + 32x = 24$

Taschenrechner $\rightarrow x \approx 8{,}61$

A: Es sind $\approx 8{,}618$m.

---

3d) 1 N.B.: $f''(x)=0$

$f''(x) = 6x-24$

$6x-24=0$

$6x=24$

$x=4$

H.B.: $f''(x)=0$ und $f'''(x)\neq 0$

$f'''(x)=6$

$f'''(4)=6\neq 0$

$f(4)=0$

A: Die Wendestelle liegt bei $W(4/0)$.

3d (II) Es handelt sich um den Punkt der Straße, wo die Rechts- in eine Links-Krümmung übergeht. Im Punkt selbst liegt keine Krümmung vor.
Während man das Lenkrad vorher nach rechts gedreht hat, ist es im Punkt selbst kurz geradlinig ausgerichtet und anschließend nach links gedreht.

3e)

$$x^3 - 12x^2 + 32x = 2x$$
$$x^3 - 12x^2 + 30x = 0$$
$$x \cdot (x^2 - 12x + 30) = 0$$
$$x_1 = 0 \text{ und } x^2 - 12x + 30 = 0$$
$$x = 6 \pm \sqrt{36-30}$$
$$x = 6 \pm \sqrt{6}$$
$$x_2 = 3{,}55$$
$$x_3 \approx 8{,}45$$

$h(0) = 0$ $\quad h(3{,}55) = 7{,}1$ $\quad h(8{,}45) = 16{,}9$

A: Die Schnittpunkte sind $S_1(0/0)$, $S_2(3{,}55/7{,}1)$ und $S_2(8{,}45/16{,}9)$.