AUFGABEN – TEIL A
(ohne Taschenrechner)

Aufgabe 1

Berechne die folgenden Wurzeln:

a) $\sqrt{25}$

b) $\sqrt{81}$

c) $\sqrt{-16}$

d) $\sqrt[3]{27}$

e) $\sqrt[3]{8}$

f) $\sqrt[3]{-8}$

g) $\sqrt[5]{1}$

h) $\sqrt[5]{0}$

Aufgabe 2

a) Gib an, welche der folgenden Zahlen zu den Ganzen Zahlen ($\mathbb{Z}$) gehören:

5 ; -7 ; $0{,}2$; $1/5$; 0 ; 20 ; $\sqrt{2}$

b) Gib an, welche der folgenden Zahlen zu den Rationalen Zahlen ($\mathbb{Q}$) gehören:

$\sqrt{5}$; 7 ; $1{,}2$; -2 ; $\sqrt{2}+1$; $\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) Gib eine ganze Zahl an, die nicht zu den natürlichen Zahlen gehört

d) Gib an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

(1) Jede rationale Zahl kann als Bruch dargestellt werden.

(2) Es gibt reelle Zahlen, die als Bruch dargestellt werden können.

(3) Die folgende Zahl ist eine rationale Zahl:

$0{,}1\,12\,123\,1234\,12345\ldots$

Aufgabe 3

Vereinfache so weit wie möglich:

a) $\sqrt{x^{12}}$

b) $\sqrt{x^{100}}$

c) $\sqrt{x^2 \cdot x^4}$

d) $(\sqrt{x})^6$

AUFGABEN – TEIL B
(mit Taschenrechner)

Aufgabe 1
Mit dem Heronverfahren kann man einen Näherungswert für $\sqrt{8}$ bestimmen.
Der Startwert sei 3. Bestimme die Werte, die sich bei den nächsten 3 Schritten des Heronverfahrens ergeben.

Aufgabe 2
Auch mit dem Intervallhalbierungsverfahren kann man einen Näherungswert für $\sqrt{8}$ bestimmen. Das erste Intervall sei $2 < \sqrt{8} < 3$.
Bestimme die 4 nächsten Intervalle, sich bei diesem Verfahren ergeben.

Aufgabe 3
Beweise, dass $\sqrt{5}$ eine irrationale Zahl ist.

Aufgabe 4
Vereinfache die folgenden Ausdrücke (wenn möglich) so weit, dass nur noch eine einzige Wurzel übrig bleibt:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$

b) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}}$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{2}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$

e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2}$

f) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

g) $\sqrt{3} + \sqrt{5}$

h) $\sqrt{160} : \sqrt{5}$

i) $(\sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}$

j) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}$

k) $2 \cdot \sqrt{7}$

l) $\sqrt{6} + \sqrt{0}$

Aufgabe 5

Mache den Nenner rational:

a) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}}$

c) $\frac{10}{\sqrt{3}}$

d) $\frac{2}{\sqrt{2}}$

e) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}}$ $(a \geq 0)$

Aufgabe 6

Vereinfache so weit wie möglich:

a) $\sqrt{x^8 y^6}$

b) $\dfrac{\sqrt{x^{10}}}{\sqrt{x^4}}$

c) $\dfrac{\sqrt{x \cdot y^2}}{\sqrt{x^3}}$

d) $\sqrt{(x+3)^2}$

e) $\dfrac{\sqrt{x^3 y^5}}{x \cdot \sqrt{y^3}}$

f) $\sqrt{x} \cdot \left(\sqrt{xy^3} + \sqrt{x}\right)$

Aufgabe 7

Gib an, welche der folgenden Aussagen wahr bzw. falsch sind:

(1) $\sqrt{100}$ ist eine irrationale Zahl

(2) $\sqrt{6}$ hat zwar unendlich viele Nachkommastellen, wird aber nicht periodisch

(3) Alle Wurzeln sind irrationale Zahlen

(4) $\sqrt{3}$ kann als Bruch dargestellt werden. Der Nenner und der Zähler sind nur sehr sehr groß

(5) Es gibt Zahlen, die identisch sind mit ihrer Wurzel
$\sqrt{a} = a$

(6) Die Wurzel einer Zahl ist immer kleiner als die Zahl selbst

(7) $\sqrt{27}$ ist dreimal so groß wie $\sqrt{3}$

(8) $\sqrt{3} + \sqrt{5} = \sqrt{8}$

(9) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{8}$

<u>Aufgabe 8</u>

Bestimme x:

a) $\sqrt{x} = 6$

b) $\sqrt{x+1} = 7$

LÖSUNGEN (Teil A)

1 a) $\sqrt{25} = 5$

b) $\sqrt{81} = 9$

c) $\sqrt{-16}$ ↯ hat keine Lösung

d) $\sqrt[3]{27} = 3$

e) $\sqrt[3]{8} = 2$

f) $\sqrt[3]{-8} = -2$

g) $\sqrt[5]{1} = 1$

h) $\sqrt[5]{0} = 0$

2 a) $5; -7; 0; 20$

b) $7; 1{,}2; -2$

c) -5

d) (1) wahr

(2) wahr

(3) falsch

Sie bricht nicht ab & wird nicht periodisch

3 a) $\sqrt{x^{12}} = x^6$

b) $\sqrt{x^{100}} = x^{50}$

c) $\sqrt{x^2 \cdot x^4} = \sqrt{x^6} = x^3$

d) $(\sqrt{x})^6 = x^3$

LÖSUNGEN (Teil B)

1) 1. Wert 3

2. Wert $\dfrac{3+\frac{8}{3}}{2} = \dfrac{17}{6} = 2{,}8\overline{3}$

3. Wert $\dfrac{\frac{17}{6}+\frac{8}{17/6}}{2} = \dfrac{577}{204} = 2{,}82843\ldots$

4. Wert $\dfrac{\frac{577}{204}+\frac{8}{577/204}}{2} = 2{,}828427125\ldots$

2) $2 < \sqrt{8} < 3$

$2{,}5^2 = 6{,}25$ (zu wenig)

$2{,}5 < \sqrt{8} < 3$

$2{,}75^2 = 7{,}5625$ (zu wenig)

$2{,}75 < \sqrt{8} < 3$

Bestimmung der Mitte $\dfrac{2{,}75+3}{2} = 2{,}875$

$2{,}875^2 = 8{,}2656\ldots$ (zu viel)

$2{,}75 < \sqrt{8} < 2{,}875$

Bestimmung der Mitte $\dfrac{2{,}75+2{,}875}{2} = 2{,}8125$

$2{,}8125^2 = 7{,}91\ldots$ (zu wenig

$2{,}8125 < \sqrt{8} < 2{,}875$

3) Annahme: $\sqrt{5}$ rational

$$\Rightarrow \sqrt{5} = \frac{p}{q}$$

$$\sqrt{5} = \frac{p}{q} \quad |()^2$$

$$5 = \frac{p^2}{q^2} \quad |\cdot q^2$$

$$5 \cdot q^2 = p^2$$

p^2 ist ohne Rest durch 5 teilbar
Jede durch 5 teilbare Quadratzahl muss aber auch durch 25 teilbar sein (ohne Rest)

$$5 \cdot q^2 = 25 \cdot r^2 \quad (\text{mit } p^2 = 25r^2)$$

$$5q^2 = 25r^2 \quad |:5$$

$$q^2 = 5r^2$$

q^2 ist ohne Rest durch 5 teilbar
Jede durch 5 teilbare Quadratzahl muss aber auch durch 25 teilbar sein (ohne Rest)

$$25s^2 = 5r^2 \quad (\text{mit } q^2 = 25s^2)$$

$$25s^2 = 5r^2 \quad |:5$$

$$5s^2 = r^2$$

Ab hier wiederholt sich die Argumentation
$\Rightarrow$ Der Bruch $\frac{p^2}{q^2}$ wäre unendlich oft durch 5 teilbar ↯

$\Rightarrow \sqrt{5}$ irrational

4 a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{14}$

b) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{18}{3}} = \sqrt{6}$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$

d) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{7}{2}}$

e) $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{60}$

f) $\frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{16}{3}}$

g) kann nicht vereinfacht werden

h) $\sqrt{160} : \sqrt{5} = \frac{\sqrt{160}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{160}{5}} = \sqrt{32}$

i) $(\sqrt{3} + 2 \cdot \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{54}$

j) $\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{10}} = \sqrt{\frac{20}{10}} = \sqrt{2}$

k) $2 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{7} = \sqrt{28}$

l) $\sqrt{6} + \sqrt{0} = \sqrt{6} + 0 = \sqrt{6}$

5a) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{7} \cdot \sqrt{6}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{42}}{6}$

b) $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{24}}{3}$

c) $\frac{10}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{100} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{300}}{3}$

d) $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{8}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{a} \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3a}}{3}$

6a) $\sqrt{x^8 y^6} = \sqrt{x^8} \cdot \sqrt{y^6} = x^4 y^3$

b) $\frac{\sqrt{x^{10}}}{\sqrt{x^4}} = \sqrt{\frac{x^{10}}{x^4}} = \sqrt{x^6} = x^3$

c) $\frac{\sqrt{x y^2}}{\sqrt{x^3}} = \sqrt{\frac{x y^2}{x^3}} = \sqrt{\frac{\cancel{x} y^2}{\cancel{x} \cdot x \cdot x}} = \sqrt{\frac{y^2}{x^2}} = \frac{\sqrt{y^2}}{\sqrt{x^2}} = \frac{y}{x}$

d) $\sqrt{(x+3)^2} = x+3$

e) $\frac{\sqrt{x^3 y^5}}{x \cdot \sqrt{y^3}} = \frac{\sqrt{x^3 y^5}}{\sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^3}} = \frac{\sqrt{x^3 y^5}}{\sqrt{x^2 y^3}} = \sqrt{\frac{x^3 y^5}{x^2 y^3}}$

$= \sqrt{\frac{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot x \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot y \cdot y}{\cancel{x} \cdot \cancel{x} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{y}}} = \sqrt{x y^2} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y^2} = \sqrt{x} \cdot y$

f) $\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x y^3} + \sqrt{x}) = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x y^3} + \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

$= \sqrt{x \cdot x y^3} + x$

$= \sqrt{x^2 y^3} + x$

$= \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{y^3} + x$

$= x \cdot \sqrt{y^3} + x$

7) (1) wahr

(2) wahr

(3) falsch

$\sqrt{4} = 2$ ist rational

(4) falsch

Irrationale Zahlen können nicht als Bruch dargestellt werden

(5) wahr

z.B. $\sqrt{1} = 1$

(6) falsch

z.B. $\sqrt{0{,}25} = 0{,}5$

(7) $\sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3 \cdot \sqrt{3}$

wahr

(8) falsch!

(9) wahr $\sqrt{2} + \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{8}$

8a) $\sqrt{x} = 6 \Rightarrow x = 36$

b) $\sqrt{x+1} = 7 \Rightarrow x = 48$