LÖSUNGEN (Teil B)

1 a) $f(x) = 10 \cdot 1{,}08^{x}$ | x: Zeit in Stunden ab 9 Uhr

$= 10 \cdot e^{\ln(1{,}08)x}$

$= 10 \cdot e^{0{,}0770x}$

b) 10:12 Uhr $\hat{=}$ 1 h 12 min nach 9 Uhr

= 1,2 h nach 9 Uhr

$f(1{,}2) = 10 \cdot 1{,}08^{1{,}2} \approx 10{,}97$

A: Die Kultur ist 10,97 cm² groß um 10:12 Uhr

c) $10 \cdot 1{,}08^{x} = 20$

$1{,}08^{x} = 2$

$x = \log_{1{,}08}(2)$

$x = 9{,}0065 \approx 9$

A: Es sind 9 h

d) $g(x) = 20 \cdot 1{,}04^{x}$ (Zeit ab 10 Uhr)

$g(-1) = 20 \cdot 1{,}04^{-1} = 19{,}23$

$g(x) = 19{,}23 \cdot 1{,}04^{x}$ (Zeit ab 9 Uhr)

$$19{,}23 \cdot 1{,}04^x = 10 \cdot 1{,}08^x \quad |:10$$

$$1{,}923 \cdot 1{,}04^x = 1{,}08^x \quad |:1{,}04^x$$

$$1{,}923 = \frac{1{,}08^x}{1{,}04^x}$$

$$1{,}923 = \left(\frac{27}{26}\right)^x$$

$$\log_{\frac{27}{26}}(1{,}923) = x$$

$$17{,}33 \approx x$$

Die beiden Kulturen sind 17,33 h nach Beobachtungsbeginn gleich groß (am nächsten Tag um ca. 02:20 Uhr am frühen Morgen)

Die erste Kultur wächst schneller. Sie wächst pro Stunde um 8%, die andere nur 4%

e) Größe von Kultur 1 um 11 Uhr:
11 Uhr ≙ 2 h nach 9 Uhr

$$f(2) = 10 \cdot 1{,}08^2 = 11{,}664$$

Kultur 3:
Zwei Punkte bekannt: $P_1(0|8)$
$P_2(2|11{,}664)$

Achsenabschnitt (Schnittpunkt mit y-Achse) ist $P_1(0|8)$

$\Rightarrow h(x) = 8 \cdot a^x$

$P_2(2|11,664)$ auf $h \Rightarrow h(2) = 11,664$

$8 \cdot a^2 = 11,664$

$a^2 = 1,458$

$a = 1,2074..\ (a>0)$

$\Rightarrow h(x) = 8 \cdot 1,21^x$

f) Größe von Kultur 1 um 12 Uhr

12 Uhr $\hat{=}$ 3 h nach 9 Uhr

$f(3) = 10 \cdot 1,08^3 = 12,59712$

die Hälfte der $12,59712\ cm^2$ verschwindet

→ Es sind noch $6,29856\ cm^2$ da

$6,29856 \cdot 1,08^x = 12,59712$

$1,08^x = 2$

$x = \log_{1,08}(2)$

$x = 9$

Es sind 9 h

2a)

1) Wachstumsfaktor

$\frac{2344}{1474} = 1,5902...$

$\frac{3379}{2344} = 1,4415..$

$\frac{4680}{3379} = 1{,}385$

$\frac{7021}{4680} = 1{,}5002$

$\frac{10358}{7021} = 1{,}4752$

$\Rightarrow$ meiste Werte um 1,5 herum

$\Rightarrow a = 1{,}5$

② Gleichung

$f(x) = a \cdot 1{,}5^x$

Anfangswert: $f(0) = 1474$

$\Rightarrow f(x) = 1474 \cdot 1{,}5^x$

$= 1474 \cdot e^{\ln(1{,}5)x}$

$= 1474 \cdot e^{0{,}4055x}$

③ Beurteilung

Die Funktion beschreibt nur im Bereich $x=0$ bis $x=5$ den Verlauf ungefähr.

Es gilt $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

Deshalb ist die F. insgesamt wenig geeignet.

④ Anzahl 5000

$5000 = 1474 \cdot 1{,}5^x$

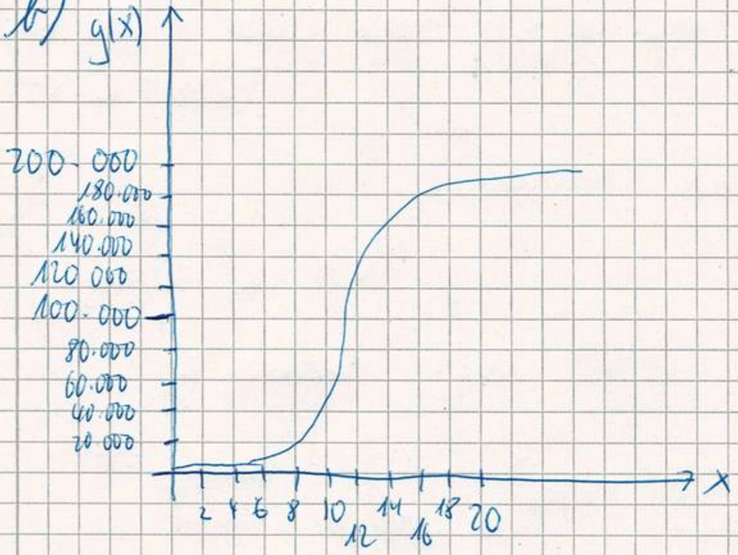
$\frac{5000}{1474} = 1{,}5^x$

$$x = \log_{1,5}\left(\frac{5000}{1474}\right)$$

$$x \approx 3{,}012$$

Der Wert wird kurz nach der 3. Woche erreicht.

b)



$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 201.632$$

$$g(5) = \frac{201.632}{1 + 1222 \cdot e^{0{,}8165 \cdot 5}} = 9330{,}78$$

Interpretation:

lim → Auf längere Sicht nähert sich die Zahl der insgesamt infizierten Patienten dem Wert 201.632 an

g(5) → 5 Wochen ab Beobachtungsbeginn wird mit ≈9331 Patienten gerechnet

c) Beschrieben wird der Wendepunkt.
Ab dem Wendepunkt lässt das Wachstum nach

Rechenweg: Notw. Bed $g''(x) = 0$

Hinr. Bed. $g''(x) = 0$ und $g'''(x) \neq 0$

Ränder

ungefährer Zeitpunkt: etwa bei $x = 9$

d) Grenzwert:

$$\lim_{x \to \infty} 41{,}29\, e^{-0{,}8165x} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} k + 41{,}29 \cdot e^{-0{,}8165x} = k$$

Das heißt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{-k^3 + 6k^2}{k + 41{,}29 \cdot e^{-0{,}8165x}} = \frac{-k^3 + 6k^2}{k} = -k^2 + 6k$$

Erläuterung:
Auf Dauer nähert sich die Zahl der insgesamt Infizierten dem Wert $-k^2 + 6k$ an (in Millionen).

höchste Anzahl

gesucht: Maximum von $g(k) = -k^2 + 6k$

$g'(k) = -2k + 6$
$g''(k) = -2$

Notw. Bed.: $g'(k) = 0$
$-2k + 6 = 0$
$6 = 2k$
$3 = k$

Hinr. Bed.: $g'(k) = 0$ und $g''(k) \neq 0$
$g''(3) = -2 < 0$
$\Rightarrow$ Max. bei $k = 3$

Da wir nur eine Extremstelle haben und zwar ein Maximum, kann kein Rand-Maximum vorliegen

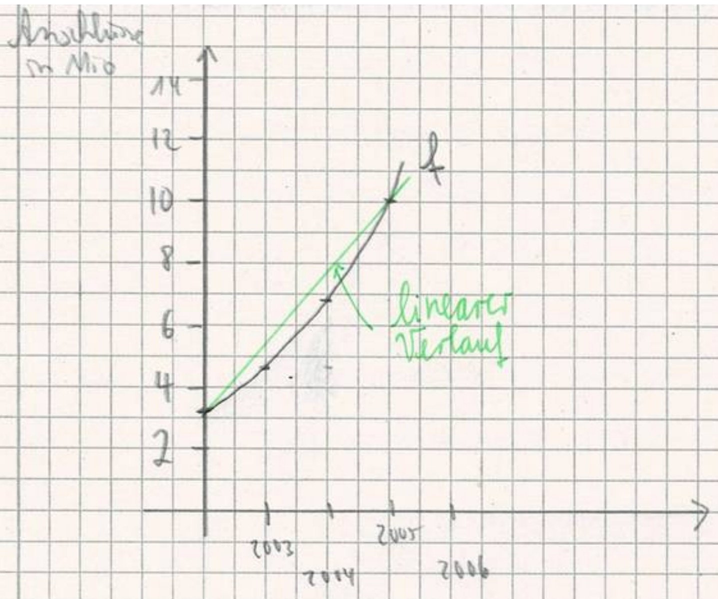
$g(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 18 = 9$

$\Rightarrow$ $k = 3$ und die Anzahl lautet 9 Millionen

3) a) $f(x) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot x}$

$f(0) = 3{,}3$ 2002
$f(1) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37} = 4{,}78$ 2003
$f(2) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot 2} = 6{,}92$ 2004
$f(3) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37 \cdot 3} = 10{,}01$ 2005

$\Rightarrow$ Werte von 2002 und 2005 stimmen fast genau überein



Gleichung des linearen Verlaufs:

$P_1(0|3{,}3)$
$P_2(3|10)$

$g(x) = mx + b$

$m = \frac{10-3{,}3}{3-0} = \frac{6{,}7}{3}$

Achsenabschnitt: 3,3

$\Rightarrow g(x) = \frac{67}{33}x + 3{,}3$

b)

$f(x) = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37x}$
$= 3{,}3 \cdot (e^{0{,}37})^x$
$= 3{,}3 \cdot 1{,}45^x$

$\Rightarrow$ Wachstumsfaktor 1,45
prozentuale Zunahme pro Jahr 45 %

Verdopplungszeit:

$$3{,}3 \cdot e^{0{,}37x} = 6{,}6$$
$$e^{0{,}37x} = 2 \quad | \ln$$
$$0{,}37x = \ln(2)$$
$$x = \frac{\ln(2)}{0{,}37} \approx 1{,}87$$

Die Verdopplungszeit liegt bei 1,87 Jahren

c)

$$30 = 3{,}3 \cdot e^{0{,}37x} \quad | :3{,}3$$
$$\frac{100}{11} = e^{0{,}37x} \quad | \ln$$
$$\ln\left(\frac{100}{11}\right) = 0{,}37x \quad | :0{,}37$$
$$\frac{\ln\left(\frac{100}{11}\right)}{0{,}37} = x$$
$$5{,}966 \approx x$$

Es handelt sich um 5,966 ≈ 6 Jahre

Die Funktion läuft nach rechts immer schneller gegen ∞ und es gilt $\lim_{x \to \infty} f(x) = +\infty$. Beides ist unrealistisch.
Es können nicht mehr als 40 Mio. Personen einen Anschluss haben und das Wachstum müsste irgendwann anfangen abzunehmen.

d) Ende 2005 nach der Statistik: 10 Mio

$$35-(35-a) = 10$$
$$35-35+a = 10$$
$$a = 10$$

$$\Rightarrow h(x) = 35 - 25 \cdot e^{-0,13x}$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = 35$$

$\Rightarrow$ 5 Millionen Haushalte (40-35) bleiben ohne Anschluss

Warum passt diese Funktion besser?
- Die Funktionswerte nähern sich einem endlichen Grenzwert an (statt $+\infty$)
- Das Wachstum nimmt ab, während es sich dem Wert 35 annähert (allerdings nimmt es ständig ab $\rightarrow$ am Anfang müsste es wachsen, um dann zu schrumpfen)
- Dass ein Teil der Haushalte ohne Anschluss bleibt ist realistisch

e) 2002: $x = 0$ $\qquad g(0) = \frac{105}{3+32\cdot e^0} = 3$

2005: $x = 3$

2010: $x = 8$ $\qquad g(3) = 10,35$

$g(8) = 29,28$

Vorhersage für 2010: 29,28 Mio

$$\frac{105}{3+32\cdot e^{-0{,}5x}} = \frac{3\cdot 35}{3\cdot\left(1+\frac{32}{3}\cdot e^{-0{,}5x}\right)} = \frac{35}{1+\frac{32}{3}\cdot e^{-0{,}5x}}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) = 35$$

$\Rightarrow$ Wieder ergibt sich eine Grenze von 35 Millionen Anschlüssen 4,5 Mio. Haushalte bleiben ohne Anschluss

f) Max $(4{,}75 / 4{,}4)$

Es handelt sich um den Wendepunkt des Graphen. Während das Wachstum von g vorher immer schneller wurde beginnt es nun zurückzugehen.

Rechenweg:

N.B.: $g''(x) = 0$

H.B.: $g''(x) = 0$ und $g'''(x) \neq 0$

Ränder

4a) $f(0) = (0+2)\cdot e^{0+1} = 2\cdot e$

$\Rightarrow S_y(0 | 2e)$

$(x+2)\cdot e^{x+1} = 0$

$x+2 = 0$ oder $e^{x+1} = 0$

$x = -2$ $\quad$ $\lightning$

$\Rightarrow N(-2/0)$

b)

c)

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

d) $(x+2) \cdot e^{x+1} = (3x-1) \cdot e^{x+1} \quad | : e^{x+1} \quad (e^{x+1} \neq 0)$

$$x+2 = 3x-1$$
$$2 = 2x-1$$
$$3 = 2x$$
$$1{,}5 = x$$

$$f(1{,}5) = (1{,}5+2) \cdot e^{1{,}5+1} = 3{,}5 \cdot e^{2{,}5}$$

$$\Rightarrow S(1{,}5 / 3{,}5 \cdot e^{2{,}5})$$

e)

$$(x+2) \cdot e^{x+1} = e^x$$
$$(x+2) \cdot e^x \cdot e = e^x \quad | : e^x \quad (e^x \neq 0)$$
$$(x+2) \cdot e = 1$$
$$x+2 = \frac{1}{e}$$
$$x = \frac{1}{e} - 2$$
$$h\left(\frac{1}{e}-2\right) = e^{\frac{1}{e}-2}$$
$$\Rightarrow S\left(\frac{1}{e}-2 / e^{\frac{1}{e}-2}\right)$$

5a) $(ax+1)\cdot e^{-ax}=0$

$ax+1=0$ oder $e^{-ax}=0$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ ↯

$ax=-1$

Fall 1:
$a\neq 0$

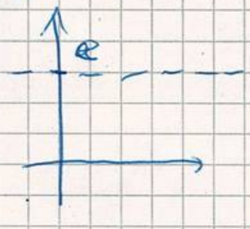
$\underline{x=-\frac{1}{a}}$

Fall 2:
$a=0$

$f_0(x)=1\cdot e^0=e$

f_0 hat keine Nullstellen

Der Wert für a, für den es keine NS gibt, ist $a=0$ $\Rightarrow$ $f_0(x)=e$



b) $a<0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$

$a>0$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

c) $f_2(x)=(2x+1)\cdot e^{-2x}$

$f_{-2}(x)=(-2x+1)\cdot e^{2x}$

Die Nullstellen liegen bei $x=\frac{1}{2}$ und $x=-\frac{1}{2}$ (oben: NS $\hat{=}-\frac{1}{a}$)

$\Rightarrow$ Es handelt sich um G_2 und G_{-2}.

G_2: durchgezogene Linie
G_{-2}: gestrichelte "