LÖSUNGEN (Teil A)

1 a) $2^x = 16 \Rightarrow x = 4$, denn $2^4 = 16$

b) $x^3 = -27 \Rightarrow x = -3$, denn $(-3)^3 = -27$

c) $5^x = 1 \Rightarrow x = 0$, denn $5^0 = 1$

d) $5^x = \frac{1}{25} \Rightarrow x = -2$, denn $\frac{1}{25} = \frac{1}{5^2} = 5^{-2}$

e) $\log_2(8) = x \Rightarrow x = 3$, denn $2^3 = 8$

f) $\log_x(49) = 2 \Rightarrow x = 7$, denn $7^2 = 49$

g) $\log_2(x) = 5 \Rightarrow x = 2^5 = 32$

h) $3^{\log_3(7)} = x \Rightarrow x = 7$, denn $3^{\log_3(7)} = 7$

i) $\log_a(a^3) = x \Rightarrow x = 3$, denn $a^3 = a^3$

j) $\log_x(121) = 2 \Rightarrow x = 11$, denn $11^2 = 121$

k) $\log_7(x) = 0 \Rightarrow x = 7^0 = 1$

2a)
$$\begin{aligned} \log_2(x+7) &= 4 \quad \Big| \, 2^{(\ldots)} \\ x+7 &= 2^4 \\ x+7 &= 16 \quad \Big| -7 \\ x &= 9 \end{aligned}$$

b) $\log_2(2x+4)-3=2 \quad |+3$

$\log_2(2x+4)=5 \quad |2^{(\ldots)}$

$2x+4=2^5$

$2x+4=32 \quad |-4$

$2x=28 \quad |:2$

$x=14$

3a) $(2x-6)\cdot e^{3x}=0$

$2x-6=0$ oder $e^{3x}=0$

$2x=6 \qquad \lightning$

$x=3$

b) $(4x+8)\cdot e^{2x+4}=0$

$4x+8=0$ oder $e^{2x+4}=0$

$4x=-8 \qquad \lightning$

$x=-2$

c) $(x^2+2x-3)\cdot e^{2x+5}=0$

$x^2+2x-3=0$ oder $e^{2x+5}=0$

$\lightning$

$x=-1\pm\sqrt{1+3}$

$x=-1\pm\sqrt{4}$

$x=-1\pm2$

$x_1=-3$

$x_2=1$

d) $(x^3+5x^2)\cdot e^{2x-1}$

$x^3+5x^2=0$ oder $e^{2x-1}=0$

$x^2\cdot(x+5)=0 \qquad \lightning$

$x^2 = 0$ oder $x + 5 = 0$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x_2 = -5$

e) $(x^3 - 4x) \cdot e^{2x+3} = 0$

$x^3 - 4x = 0$ oder $e^{2x+3} = 0$

$x \cdot (x^2 - 4) = 0$ $\qquad$ $\lightning$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x^2 = 4$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

f) $(x^4 - 10x^2 + 9) \cdot e^{2x} = 0$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$ oder $e^{2x} = 0$

$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \quad | x^2 = z$ $\qquad$ $\lightning$

$z^2 - 10z + 9 = 0$

$z = 5 \pm \sqrt{25 - 9}$

$z = 5 \pm \sqrt{16}$

$z = 5 \pm 4$

$z_1 = 1$ $\qquad$ $z_2 = 9 \quad | z = x^2$

$x^2 = 1$ $\qquad$ $x^2 = 9 \quad | \sqrt{\ }$

$x_1 = 1$ $\qquad$ $x_3 = 3$

$x_2 = -1$ $\qquad$ $x_4 = -3$

g) $(x^5 - 8x^3 + 16x) \cdot e^{3x-5} = 0$

$x^5 - 8x^3 + 16x = 0$ oder $e^{3x-5} = 0$

$x \cdot (x^4 - 8x^2 + 16) = 0$ $\qquad$ $\lightning$

$x_1 = 0$ $\qquad$ $x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \quad | x^2 = z$

$z^2 - 8z + 16 = 0$

$z = 4 \pm \sqrt{16 - 16}$

$z = 4 \qquad | z = x^2$

$x^2 = 4 \qquad | \sqrt{\ }$

$x_2 = 2$

$x_3 = -2$

h) $e^{2x} - 4e^x + 4 = 0 \quad | e^x = z$

$z^2 - 4z + 4 = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4-4}$

$z = 2 \qquad | z = e^x$

$e^x = 2 \quad | \ln$

$x = \ln(2)$

i) $2e^x - \frac{4}{e^x} = 0 \quad | \cdot e^x$

$\left(2e^x - \frac{4}{e^x}\right) \cdot e^x = 0$

$2e^{2x} - 4 = 0$

$2e^{2x} = 4$

$e^{2x} = 2 \quad | \ln$

$2x = \ln(2) \quad | :2$

$x = \frac{\ln(2)}{2}$

4a) $(2x^2-8) \cdot (e^{2x}-6) = 0$

$2x^2 - 8 = 0$ oder $e^{2x} - 6 = 0$

$2x^2 = 8 \qquad e^{2x} = 6 \quad | \ln$

$x^2 = 4 \qquad 2x = \ln(6)$

$x_1 = 2 \qquad x_3 = \frac{\ln(6)}{2}$

$x_2 = -2$

b) $e^{4x} - 5 = 4e^{2x}$

$e^{4x} - 4e^{2x} - 5 = 0 \quad | e^{2x} = z$

$z^2 - 4z - 5 = 0$

$z = 2 \pm \sqrt{4+5}$

$z = 2 \pm \sqrt{9}$

$z = 2 \pm 3$

$z_1 = -1 \qquad z_2 = 5 \quad | z = e^{2x}$

$e^{2x} = -1 \qquad e^{2x} = 5 \quad | \ln$

$\lightning \qquad 2x = \ln(5)$

$x = \frac{\ln(5)}{2}$

c) $4e^{2x} + 6e^{x} = 4$

$4e^{2x} + 6e^{x} - 4 = 0 \quad | e^{x} = z$

$4z^2 + 6z - 4 = 0$

$z^2 + \frac{3}{2}z - 1 = 0$

$z = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1}$

$z = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{16}{16}}$

$z = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{25}{16}}$

$z = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4}$

$z_1 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \qquad z_2 = -\frac{8}{4} = -2 \quad | z = e^{x}$

$e^{x} = \frac{1}{2} \quad | \ln \qquad e^{x} = -2$

$x = \ln\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \lightning$

5a) $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$

b) $f(x) = (2x+1)\cdot e^x$

$\Rightarrow f'(x) = 2\cdot e^x + (2x+1)\cdot e^x$
$= (2x+3)\cdot e^x$

c) $f(x) = (2x^2+6x+4)\cdot e^x$
$\Rightarrow f'(x) = (4x+6)\cdot e^x + (2x^2+6x+4)\cdot e^x$
$= (2x^2+10x+10)\cdot e^x$

d)
$f(x) = x^2\cdot \sin(x)$
$\Rightarrow f'(x) = 2x\cdot \sin(x) + x^2\cdot \cos(x)$

e) $f(x) = (\sin(x))^2 = \sin(x)\cdot \sin(x)$
$\Rightarrow f'(x) = \cos(x)\cdot \sin(x) + \sin(x)\cdot \cos(x)$
$= 2\cdot \sin(x)\cdot \cos(x)$

6) $f(x) = (2x+3)\cdot e^x$
$f'(x) = 2e^x + (2x+3)\cdot e^x$
$= (2x+5)\cdot e^x$

$f''(x) = 2\cdot e^x + (2x+5)\cdot e^x$
$= (2x+7)\cdot e^x$
$f'''(x) = 2\cdot e^x + (2x+7)\cdot e^x$
$= (2x+9)\cdot e^x$

$f^{(n)}(x) = (2x+2n+3)\cdot e^x$

7a) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

e) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

8) Zu f gehört 3

$f(0) = 3 \cdot e^0 = 3$

$\Rightarrow$ nur Graph 3 kommt in Frage

Zu g gehört 5

$g(0) = (0+1) \cdot e^{0,1 \cdot 0} = e$

g hat eine Nullstelle:

$(x+1) \cdot e^{0,1x} = 0$

$x+1=0$ oder $e^{0,1x}=0$

$x=-1$ $\quad$ $\lightning$

$\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$

$\Rightarrow$ Nur Graph 5 passt

Zu h gehört 4

$h(0) = -2 \cdot e^{0} = -2$

$\Rightarrow$ Nur Graph 4 passt

Zu i gehört 1

$\lim\limits_{x\to\infty} i(x) = 4$

$\Rightarrow$ Nur Graph 1 passt

9a)

$(x^2+2x) \cdot e^{x} = 0$

$x^2+2x=0$ oder $e^{x}=0$

$x \cdot (x+2) = 0$ $\quad$ $\lightning$

$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$

b)

$F'(x) = 2x \cdot e^{x} + x^2 \cdot e^{x}$

$= (2x+x^2) \cdot e^{x}$

$= f(x)$

$\Rightarrow$ F Stammfunktion von f

alle Stammfunktionen:

$F(x) = x^2 e^{x} + c$

$G(1) = 2e \Rightarrow 1^2 \cdot e^1 + c = 2e$

$e + c = 2e$

$c = e$

$\Rightarrow G(x) = x^2 e^x + e$

10a) Achsenabschnitt (Schnittp. mit y-Achse): 10

$\Rightarrow$ Anfangswert 10

$f(x) = 10 \cdot a^x$

$P(-1 / 15)$ auf $f \Rightarrow f(-1) = 15$

$10 \cdot a^{-1} = 15$

$\frac{10}{a} = 15$

$10 = 15a \quad | : 15$

$\frac{2}{3} = a$

$\Rightarrow f(x) = 10 \cdot \frac{2}{3}^x$

oder $f(x) = 10 \cdot e^{\ln(\frac{2}{3}) \cdot x}$

b) gesucht: $f(x) = b \cdot a^x$

$P_1(1|12)$ auf $f \Rightarrow f(1) = 12$

$b \cdot a = 12$

$P_2(2|18)$ auf $f \Rightarrow f(2) = 18$

$b \cdot a^2 = 18$

$$b \cdot a^2 = 18$$

$$b \cdot a \cdot a = 18$$

Aus $P_1(1|12)$
folgt $b \cdot a = 12$

$$12 \cdot a = 18$$

$$a = 1{,}5$$

$\Rightarrow f(x) = b \cdot 1{,}5^x$

Suche nach b:

0	1	2
	12	18

$:1{,}5$ $\cdot 1{,}5$

$$12 : 1{,}5 = 8$$

$\Rightarrow f(x) = 8 \cdot 1{,}5^x$

11) a) $f(x) = x^2 \cdot e^x$ hat eine Nullstelle:

$$x^2 \cdot e^x = 0$$

$$x^2 = 0 \text{ oder } e^x = 0$$

$$x = 0 \qquad ↯$$

$\Rightarrow$ Bild 2 und Bild 3 kommen nicht in Frage

$x^2 \cdot e^x$ kann keine negativen Werte annehmen, da $x^2 \geq 0$ und $e^x > 0$

$\Rightarrow$ Bild 4 kommt nicht in Frage

b) f hat Extremstellen bei
$x = 0$ und ca. $x = -2$
Die Ableitung muss dort Nullstellen haben.
Das ist nur bei Bild 4 der Fall
$\Rightarrow$ f' gehört zu 4

f hat bei $x = 0$ eine Nullstelle, aber keinen Vorzeichenwechsel
$\Rightarrow$ F muss bei $x = 0$ einen Sattelpunkt haben
Das ist nur bei Bild 2 der Fall

f hat bei $x = 0$ eine Nullstelle
An diese Stelle kann $\frac{1}{f(x)}$ nicht definiert sein (da man sonst durch 0 teilt)
Das ist nur bei Bild 3 der Fall

12) $(x-1) \cdot \left(1 - \frac{1}{t} e^{x}\right) = 0$

$x - 1 = 0$ oder $1 - \frac{1}{t} e^{x} = 0$
$x_1 = 1$

$$1 = \frac{1}{t} e^{x} \quad | \cdot t$$
$$t = e^{x} \quad | \ln$$
$$\ln(t) = x$$

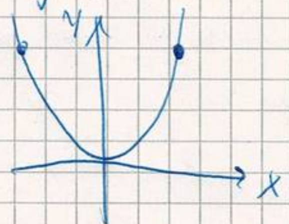
$\ln(t)$ ist dann definiert, wenn $t > 0$ ist (beachte: $e^{x} > 0$!)

Antwort: $t > 0$

13 a) ① f' ist im gesamten Bereich positiv
$\Rightarrow$ f wächst ununterbrochen
$\Rightarrow$ Aussage wahr

② f' hat eine Extremstelle
Extremstellen von f' sind Wendestellen von f
$\Rightarrow$ Aussage wahr

③ f kann nicht symmetrisch zur y-Achse sein, da es monoton wachsend ist
(die einander entsprechenden Punkte müssen auf derselben Höhe liegen)



④ Aussage unentscheidbar, da unbekannt ist, ob $f(x) > 0$ schon für den linken Rand gilt
(ab da würde das monotone Wachsen sicherstellen, dass $f(x) > 0$)

14a) $f_a(0) = \dfrac{a \cdot e^0}{(1+e^0)^2} = 9$ (siehe Abbildung)

$$\frac{a}{4} = 9$$

$$a = 36$$

b) $f_{36}(x) = \dfrac{36e^x}{(1+e^x)^2}$ $\quad g(x) = e^x$

$$\frac{36e^x}{(1+e^x)^2} = e^x \quad | : e^x \quad (e^x \neq 0)$$

$$\frac{36}{(1+e^x)^2} = 1 \quad | \cdot (1+e^x)^2$$

$$36 = (1+e^x)^2 \quad | \sqrt{\ }$$

$$6 = 1+e^x \quad (1+e^x > 0)$$

$$5 = e^x \quad | \ln$$

$$\ln(5) = x$$

$\Rightarrow S(\ln(5) / 5)$

allgemein:

$$\frac{a e^x}{(1+e^x)^2} = e^x \quad | : e^x$$

$$\frac{a}{(1+e^x)^2} = 1$$

$$a = (1+e^x)^2$$

Die Wurzel kann gezogen werden, wenn $a > 0$

$$\sqrt{a} = 1 + e^x$$

$$\sqrt{a} - 1 = e^x$$

$$\ln(\sqrt{a}-1) = x$$

$$\Rightarrow S(\ln(\sqrt{a}-1) / \sqrt{a}-1)$$

Den Punkt gibt es, wenn $a>0$